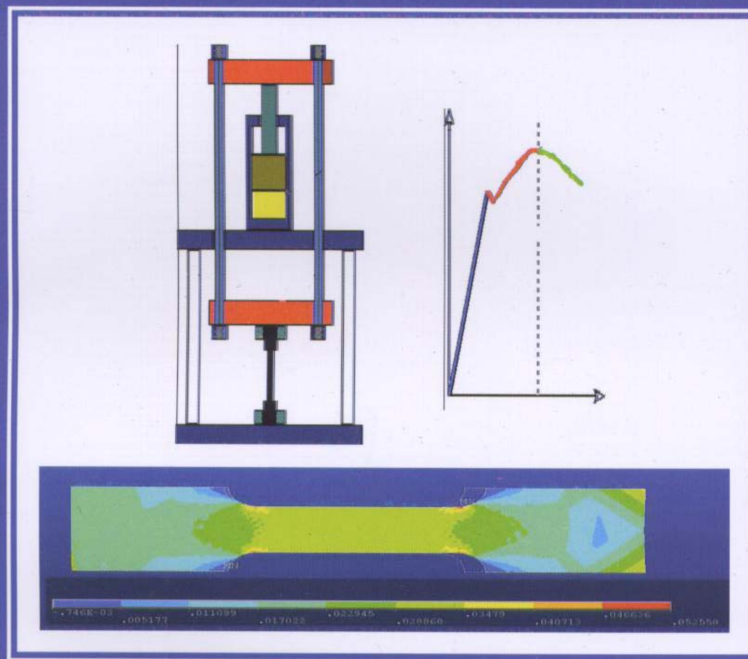
Marin Cornel



REZISTENȚA MATERIALELOR ȘI ELEMENTE DE TEORIA ELASTICITĂȚII

Editura Bibliotheca

Cornel Marin

REZISTENȚA MATERIALELOR ŞI ELEMENTE DE TEORIA ELASTICITĂȚII

EDITAT CU SPRIJINUL AUTORITĂŢII NAŢIONALE
PENTRU CERCETARE ŞTIINŢIFICĂ

EDITURA Bibliotheca
Târgovişte

• Atestată de Ministerul Culturii şi Cultelor
cu avizul nr. 4363 / 27.05.1997
• Acreditată de Consiliul Naţional al Cercetării
Ştiinţifice din Învăţământul Superior (CNCSIS)
cu avizul nr. 1142 / 30.06.2003, reacreditată în mai 2006
• Membru al Asociaţiei Editorilor din România – AER
(Romanian Publishers Association – RPA)

N. Radian, KB 2/3, Târgovişte, 130062
tel/fax: 0245.212241; tel. 0245.217145
e-mail: biblioth@gmail.com
www.bibliotheca.ro

Director editorial - Mihail-Florin Stan
Director executiv - Ion Anghel
Editor - Mihai Stan

Coperta - Bibliotheca, după o idee autorului
Corectură - Marin Cornel
Tehnoredactare - Ion Anghel

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
MARIN, CORNEL
Rezistenţa materialelor şi elemente de teoria elasticităţii /
Cornel Marin. - Târgovişte: Bibliotheca, 2006
Bibliogr.
ISBN (10) 973-721-198-8;
ISBN (13) 978-973-721-198-1;

539.3(075.8)
539.4(075.8)

CORNEL MARIN

REZISTENȚA MATERIALELOR ŞI ELEMENTE DE TEORIA ELASTICITĂȚII

Editura Bibliotheca

Târgovişte, 2006

Referenţi ştiinţifici:
Prof. dr. ing. Anton HADAR
Prof. dr. ing. Horia GHEORGHIU

Colecţia
UNIVERSITARIA-TEHNICA
coordonată de Dr. Ing. Mihail-Florin STAN

CUPRINS

4. TORSIUNEA BARELOR

5. INCOVOIEREA BARELOR DREPTE

6. FORFECAREA BARELOR

7. DEFORMAȚIILE BARELOR DREPTE SUPUSE LA ÎNCOVOIERE

8. METODE ENERGETICE PENTRU CALCULUL DEPLASĂRILOR

PREFAȚĂ

Lucrarea reprezintă prima parte a cursului de Rezistența materialelor predat studenților de la profilul tehnic al universităților. Acest curs îmbină noțiunile predate la cursurile Studiul şi Tehnologia materialelor, Mecanica teoretică, cu noțiuni specifice Rezistenței materialelor, ale Teoriei elasticității şi plasticității, în scopul creării unei baze ştiințifice solide pentru proiectarea şi analiza structurilor mecanice . Ca orice curs predat studenților de la specializările tehnice, acest curs se caracterizează printr-un limbaj tehnic specific iar conținutul şi forma de expunere (reprezentări grafice, demonstrații, etc.) este particulară respectând exactitatea şi acuratețea matematică cerute rezolvării problemelor de elasticitate cu ajutorul modelelor clasice de calcul.

Prezenta lucrare studiază solicitările simple ale pieselor de maşini pentru modelul simplu de bară dreaptă şi de bară curbă cu axa circulară, dar şi pentru sistemele plane formate din bare drepte sau curbe articulate în noduri sau cu noduri rigide (bare cotite) din punct de vedere al tensiunilor, deformațiilor şi deplasărilor specifice corpurilor deformabile. Solicitările studiate corespund celor patru tipuri de eforturi din barele drepte prezentate în primul capitol: întinderea sau compresiunea, răsucirea, încovoierea şi forfecarea. Pentru fiecare tip de solicitare s-a prezentat un model de calcul şi una sau mai multe aplicații rezolvate cu rolul de a demonstra şi fixa modelul de calcul prezentat.

În cele patru capitolele alocate solicitărilor simple a barelor drepte (III-VI) s-au prezentat diagramele de eforturi secționale, relațiile pentru calculul tensiunilor şi deformațiilor specifice, a energiei potențiale de deformație elastică, a deplasărilor prin metode analitice clasice şi moderne specifice Rezistenței materialelor.

De asemenea, un capitol special (VIII) a fost alocat metodelor energetice pentru calculul deformațiilor şi deplasărilor *(MOHR-MAXWELL* şi *CASTIGLIANO)* astfel încât studentul să poată verifica rezultatele obținute prin metodele clasice prezentate în capitolul VII de calcul al deplasărilor.

Calculele de rezistență ale barei curbe cu axa geometrică circulară sunt prezentate în capitolul IX pentru câteva cazuri particulare de încărcare cu sarcini concentrate sau sarcini uniform distribuite pe lungimea barei: radiale, verticale, orizontale şi tangențiale.

Pentru calculul grinzilor continue din capitolul X se prezintă pe lângă metoda celor trei momente *(CLAPEYRON)* şi o metodă originală pentru calculul reacțiunilor şi eforturilor numită metoda funcției de încărcare Ψ.

Pentru calculul sistemelor plane formate din bare articulate în noduri (capitolul XI) sau cu noduri rigide (capitolul XII) se prezintă pe lângă metoda eforturilor pentru calculul reacțiunilor şi eforturilor şi o metodă modernă, matriceală : metoda deplasărilor. Aplicațiile prezentate arată avantajele şi dezavantajele utilizării celor două metode.

Cele două capitole de Elemente de teoria elasticității prezentate (capitolele XIII şi XIV) permit înțelegerea şi aplicarea Teoriilor de rezistență pentru calculul tensiunilor echivalente în cazul solicitărilor simple şi compuse. Sunt prezentate Elemente de teoria

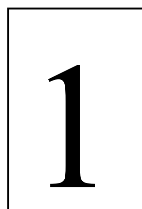
elasticității atât pentru starea plană de tensiuni şi deformații cât şi pentru starea spațială de tensiuni şi deformații, ecuațiile geometrice, fizice şi de echilibru al tensiunilor.

Analiza structurală modernă s stărilor de tensiuni şi deformații pentru piese ce nu pot fi modelate printr-o bară dreaptă sau curbă se realizează în prezent numeric prin utilizarea unor pachete de programe profesionale de analiză cu elemente finite.

Îmi exprim recunoştința colegilor prof. dr. ing. Anton HADAR şi prof. dr. ing. Horia GHEORGHIU de la Catedra de Rezistența Materialelor a Universității Politehnica din Bucureşti pentru răbdarea de a parcurge această lucrare cu ocazia recenziei ştiințifice şi pentru observațiile foarte utile, care au permis apariția lucrării sub această formă. De asemenea doresc să mulțumesc colegilor din cadrul Catedrei Echipamente de Proces şi Mecatronică a Universității Valahia din Târgovişte pentru sugestiile şi ajutorul acordat la apariția acestei lucrări şi nu în ultimul rând, să mulțumesc studenților care, prin lucrările realizate în cadrul cercurilor ştiințifice, au avut o anumită contribuție la apariția acestei lucrări, destinată în primul rând studenților.

Îmi exprim speranța că această lucrare va fi pe viitor utilă atât studenților cât şi inginerilor, proiectanților, precum şi tuturor celor interesați de îmbogățirea cunoştințelor de Rezistența materialelor şi Teoria elasticității. Sunt deschis oricărei discuții şi colaborări pe temele prezentate în această lucrare, adresa mea de contact email fiind: marin_cor@yahoo.com.

Târgovişte, mai 2006 Autorul



INTRODUCERE

1.1. Problemele Rezistenței materialelor

Rezistența materialelor este o știință în cadrul Mecanicii tehnice care studiază cu ajutorul anumitor *metode* și *modele de calcul, corpurile deformabile,* respectiv tensiunile și deformațiile care se produc în interiorul lor sub acțiunea sarcinilor sau câmpurilor exterioare. Această disciplină face legătura între disciplinele fundamentale fizico-matematice și cele inginerești de specialitate. Modelul de calcul are la bază o serie de *ipoteze simplificatoare* care rețin aspectele esențiale ale fenomenului fizic de deformație a piesei reale sub acțiunea sarcinilor exterioare, respectiv: geometria și dimensiunile piesei, tipul de sarcini exterioare și distiribuția lor, tipul legăturilor cu celelalte piese sau cu mediul considerat fix, proprietățile fizico-mecanice ale materialului corpului (modulul de elasticitate, coeficientul contracției transversale, limita de curere, rezistența de rupere, etc). *Validarea* modelului de calcul, a ipotezelor simplificatoare și metodelor de calcul utilizate se face de cele mai multe ori prin experimente și încercările mecanice .

Proiectarea unui produs se realizează pe baza unor scheme de funcționare, alegerea judicioasă a materialelor pieselor componente, determinarea dimensiunilor optime pe baza calculelor de rezistență, întocmirea desenului de ansamblu și a desenelor de execuție și stabilirea tehnologiei de execuție. Criteriile care stau la baza alegerii soluției constructive și funcționale optime sunt: siguranța în funcționare, consumul de material și energie și tehnologia de fabricație. La proiectarea unei piese, trebuie să se țină seama în primul rând de faptul că aceasta trebuie să îndeplinească un anumit rol funcțional în ansamblul din care face parte, piesa trebuie realizată cu un consum cât mai redus de material și energie și o tehnologie de fabricație care asigura un raport calitate/preț foarte bun.

În timpul funcționării unui ansamblu mecanic (mașină, echipament mecanic, instalație, structură de rezistență, etc) organele de mașini sau piesele componente suferă anumite deformații sub acțiunea sarcinilor sau câmpurilor de forțe exterioare. Spunem că o piesă este într-o stare de ”bună funcționare” dacă respectă una sau mai multe din condițiile:

1. *condiția de rezistență*: valoarea maximă a tensiunilor din zonele cele mai solicitate ale piesei nu trebuie să depășească un anumit nivel, considerat periculos pentru funcționarea ei în ansamblul din care face parte. Aceasta depinde de distribuția și valorile sarcinilor exterioare și de legătură, de geometria piesei, modul de legătură, proprietățile materialului.
2. *condiția de rigiditate* : valoarea maximă a deformațiilor piesei care nu trebuie să depășească un anumit nivel, considerat periculos pentru funcționarea ei în ansamblul din care face parte. Valoarea maximă a deformațiilor depinde de distribuția și valorile sarcinilor exterioare și de legătură, de geometria piesei, modul de legătură, proprietățile materialului.
3. *condiția de stabilitate*: valorile sarcinilor exterioare nu trebuie să depășească anumite valori (critice) pentru care care structurile mecanice își mențin forma de echilibru elastic. Deși, pentru o anumită stare de încărcare a piesei, condițiile de rezistență și rigiditate sunt satisfăcute, dacă valorile sarcinilor exterioare sunt mai

mari decât cele critice, se produc brusc deformaţii foarte mari (de exemplu pentru încărcarea de compresiune axială a unei bare drepte se produce flambajul).

În funcţie de mărimile cunoscute, pentru fiecare din cele trei condiţii de mai sus, se întâlnesc trei tipuri de probleme ale Rezistenţei materialelor. Mărimile caracteristice ale Rezistenţei materialelor pot fi grupate astfel:

A. *mărimi geometrice* – care caracterizează forma geometrică şi dimensiunile structurii mecanice şi rezultă din desenul de ansamblu şi desenele de execuţie;
B. *sarcini exterioare* – care caracterizează distribuţia, intensitatea şi variaţia în timp a sarcinilor exterioare direct aplicate sau de legătură (reacţiunile) şi rezultă din schema de încărcare;
C. *caracteristicile fizico-mecanice ale materialului* structurii mecanice:
- *mărimi naturale*: limita de proporţionalitate, limita de elasicitate, limita de curgere, rezistenţa la rupere, coeficientul contracţiei transversale, modulul de elasticitate longitudinală la întindere şi compresiune, coeficientul de dilatare termică, etc;
- *mărimi convenţionale*: rezistenţa admisibilă, deformaţia admisibilă, coeficientul de siguranţă, coeficientul de siguranţă la flambaj, coeficientul de siguranţă la oboseală, uzura admisibilă, etc.

Cele trei tipuri de probleme ale Rezistenţei materialelor sunt:

1. *problemele de dimensionare* – când se determină forma şi dimensiunile structurii mecanice dacă se cunosc: distribuţia şi intensitatea sarcinilor exterioare direct aplicate şi de legătură, caracteristicile fizico-mecanice ale materialului;
2. *probleme de verificare* – în care se determină tensiunile sau deformaţiile specifice maxime, când se cunosc: forma şi dimensiunile piesei, distribuţia şi intensitatea sarcinilor exterioare direct aplicate şi de legătură, caracteristicile fizico-mecanice ale materialului şi se compară aceste tensiuni sau deformaţii specifice cu cele admisibile;
3. *probleme de determinare a sarcinii capabile* – când se determină valoarea maximă a încărcărilor exterioare dacă se cunosc: forma şi dimensiunile structurii mecanice, distribuţia sarcinilor exterioare direct aplicate şi de legătură, caracteristicile mecanice ale materialului .

1.2. Metode de calcul

Metodele de calcul folosite pentru rezolvarea unor probleme specifice în Rezistenţa materialelor sunt:

1. *metodele experimentale* folosesc un *model real (prototip)* sau o *machetă de laborator* pentru verificarea soluţiei constructive din punct de vedere al rezistenţei, rigidităţii şi stabilităţii sau validarea modelului de calcul;
2. *metodele analitice* folosesc *modele de calcul, algoritmi sau programe de calcul* şi au la bază ecuaţiile matematice ale fenomenului. Validarea modelului de calcul şi a rezultatelor teoretice obţinute se face prin metode experimentale sau numerice;
3. *metodele numerice* folosesc *modele virtuale* sau *modele de simulare numerică*. Pentru creearea modelelor virtuale se folosesc programe profesionale de modelare cum ar fi: SOLID WORKS, CATIA, PROENGINEERING, SOLID EDGE, etc.

Pentru analiza stării de tensiuni şi deformații se folosesc programe profesionale de analiză cu elemente finite cum ar fi ANSYS, COSMOS M, NASTRAN, PATRAN etc.

Calculul ingineresc s-a dezvoltat pe baza *metodelor experimentale.*

Complexitatea sistemelor tehnologice din ultimul secol a limitat mult aria metodelor experimentale şi analitice şi a condus la apariția şi dezvoltarea *metodelor numerice de analiză şi simulare pe modele virtuale.* De asemenea, descoperirile din domeniul ştiințelor exacte şi progresul înregistrat de ştiințele tehnice au condus la apariția şi dezvoltarea acestor noi metode *numerice de analiză şi simulare.*

1.3. Modele de calcul

Modelele de calcul folosite în Rezistența materialelor sunt schematizări ale geometriei elementului mecanic, ale sarcinilor exterioare şi legăturilor, pe baza unor ipoteze de schematizare. Precizia rezultatelor obținute este legată direct de schematizarea adoptată. Un element mecanic (piesă reală) are trei dimensiuni principale: două care caracterizează forma şi mărimea unei secțiuni transversale iar cea de-a treia dimensiune caracterizează lungimea piesei. În funcție de raportul dintre cele trei dimensiuni principale, modelele de calcul folosite din Rezistența materialelor se împart în trei grupe:

a. *modelul de tip bară* se foloseşte atunci când una dintre dimensiunile structurii mecanice este mult mai mare în raport cu celelalte două. Elementele specifice modelului de tip bară sunt: *axa longitudinală* (axa centrelor de greutate ale secțiunilor transversale) şi *secțiunea transversală* (normală la axa longitudinală ca în figura 1.1.a). În cele mai multe cazuri, secțiunea transversală este *compactă*, dar sunt şi cazuri de secțiuni compuse, cum ar fi în cazul pieselor sudate sau lipite, materialelor compozite, fibrelor stratificate, etc. În funcție de forma axei longitudinale se deosebesc: *bare drepte, curbe, cotite, etc.* O categorie specială o formează barele cu secțiunea sub forma *profilelor subțiri*. Barele solicitate la încovoiere se numesc *grinzi*, cele solicitate la întindere - *tiranți,* la compresiune - *coloane* sau *stâlpi* iar cele solicitate la întindere şi compresiune se numesc *tije, zăbrele* sau *contrafişe. Arborii* sunt acele bare solicitate la răsucire şi încovoiere, iar *firele* sunt bare subțiri, flexibile care nu pot prelua decât eforturi axiale de întindere.

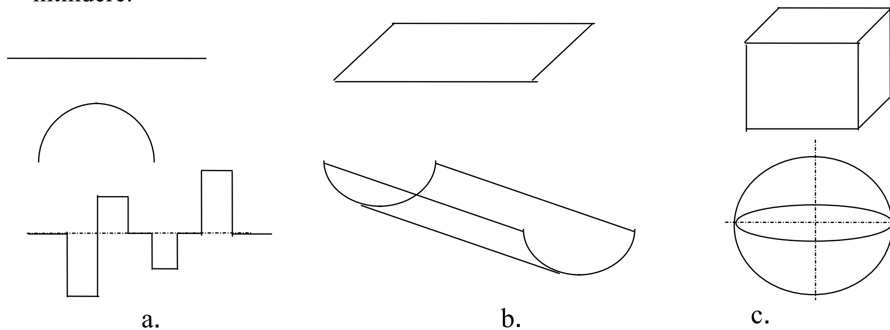


Fig. 1.1

b. *modelul de tip placă* sau *înveliş* se foloseşte atunci când una dintre dimensiunile elementului mecanic (grosimea) este mult mai mică în raport cu celelalte două. *Elementele specifice* ale acestui model sunt: *suprafaţa mediană a plăcii* şi *grosimea ei* (fig.1.1.b). În funcţie de forma suprafaţei mediane se deosebesc: *plăci plane* şi *plăci curbe* (suprafeţe de revoluţie, riglate, etc). În funcţie de grosimea lor se deosebesc: *plăci de grosime uniformă şi neuniformă*, *plăci subţiri şi plăci groase*. O categorie specială este *modelul de tip înveliş* sau *membrana* care este o placă subţire de grosime uniformă mică încărcată cu presiune interioară, care nu poate prelua decât sarcini de întindere. Plăcile groase se mai numesc: *planşee* (plăci orizontale), *panouri* (plăci verticale), *pereţi*, etc.
c. *modelul de tip bloc* se foloseşte atunci când dimensiunile după cele trei direcţii ale elementului mecanic sunt cam de acelaşi ordin de mărime (fig.1.1.c). Exemple: elementele de rulare ale unui rulment (bile, role conice, cilindrice, butoi), placa activă a unei matriţe, o roată dinţată, un arbore sau pinion scurt, un batiu de maşină, fundaţia unei construcţii, etc.

1.4. Ipoteze de bază în Rezistenţa materialelor

Ipotezele de bază din Rezistenţa materialelor se folosesc fie pentru modelarea proprietăţilor fizice ale corpurilor deformabile, fie pentru modelarea comportării sub acţiunea sarcinilor exterioare:

1. *ipoteza mediului continuu,* prin care se admite că tot volumul corpului este ocupat de material;
2. *ipoteza mediului omogen* în baza căreia proprietăţile fizico-mecanice (de exemplu densitatea) sunt constante în orice punct al corpului;
3. *ipoteza mediului izotrop*: proprietăţile fizico-mecanice nu depind de direcţia de măsurare (de exemplu modulul de elasticitate, coeficientul contracţiei transversale);
4. *ipoteza mediului elastic*: materialul corpului este considerat un mediu perfect elastic: sub acţiunea unei sarcini exterioare corpul se deformează instantaneu, iar după îndepărtarea acesteia revine instantaneu la forma şi dimensiunile iniţiale;
5. *ipoteza liniarităţii relaţiilor* între tensiuni şi deformaţii (*legea lui HOOKE*): se admite o relaţie liniară înte forţele aplicate şi deformaţii respectiv între tensiuni şi deformaţii specifice. O consecinţă a acestei ipoteze este *principiul suprapunerii efectelor* conform căruia efectul unei sarcini asupra unei piese (tensiunile şi deformaţiile) este independent de acţiunile altor sarcini asupra sa, *şi principiul independenţei acţiunii forţelor* conform căruia ordinea aplicării sarcinilor exterioare nu influenţează starea finală de tensiuni şi deformaţii, efectul final obţinându-se prin însumarea efectelor corespunzătoare fiecărei sarcini ce acţionează separat asupra corpului;
6. *ipoteza deformaţiilor mici* conform căreia mărimea deformaţiilor ce se produc sub acţiunea sarcinilor exterioare sunt mici în raport cu dimensiunile lor. Ipoteza exclude *neliniarităţile geometrice* (legate de forma corpurilor) şi *fizice* (legea liniară între tensiuni şi deformaţii) şi admite ca valabile pentru corpul deformabil ecuaţiile de echilibru ce se scriu pentru solidul rigid;

7. *principiul lui SAINT VENANT*: efectul produs asupra unei piese de două sarcini echivalente din punct de vedere static într-o zonă situată la o distanță suficient de mare de zona de acțiune a sarcinilor, este același. Conform acestei ipoteze, o sarcină distribuită care acționează la capătul unei bare încastrate produce în încastrare același efect cu cel al unei forțe concentrate echivalente;
8. *ipoteza secțiunii plane* (*BERNOULLI*) o secțiune plană perpendiculară pe axa longitudinală a unei bare supusă la încovoiere, rămâne tot plană și perpendiculară și după aplicarea sarcinilor exterioare; pentru o placă subțire supusă la încovoiere se admite *ipoteza perpendicularei rectilinii la suprafața mediană* (*KIRKHOFF*) conform căreia o linie dreaptă normală la suprafața mediană nedeformată rămâne dreaptă și perpendiculară la suprafața mediană și după deformare;

   În afară de ipotezele de bază de mai sus, pentru anumite cazuri de solicitare se mai folosesc următoarele ipoteze:
9. *ipoteza solicitărilor neglijabile:* de exemplu în cazul unei bare supusă la încovoiere simplă tensiunile tangențiale datorate solicitării de forfecare se neglijează în raport cu tensiunile normale datorate solicitării de încovoiere;
10. *ipoteza constanței secțiunii transversale* conform căreia după deformație forma și dimensiunile secțiunii transversale rămân constante pe toată lungimea ei.

Rezistența materialelor se ocupă cu studiul solicitărilor simple ale barelor drepte, ale sistemelor de bare drepte sau curbe având axa longitudinală un arc de cerc. Se studiază solicitările simple ale barelor drepte (întinderea-compresiunea, torsiunea, încovoierea și forfecarea) pentru anumite forme ale secțiunilor transversale. Studiul tuburilor și structurilor axial simetrice cu pereți groși, al discurilor în mișcare de rotație, al membranelor și barelor cu pereți subțiri, flambajul axial de compresiune, solicitărilor compuse și solicitărilor ciclice la oboseală, face obiectul *Teoriei aplicate a elasticității*.

1.5. Clasificarea sarcinilor exterioare

Un element mecanic este considerat corp elastic deformabil dacă sub acțiunea *sarcinilor exterioare* acesta își modifică forma și dimensiunile inițiale (se poate considera că își păstrează totuși forma inițială, conform ipotezei micilor deformații) iar după îndepărtarea acestor sarcini el revine la forma și dimensiunile inițiale. Sarcinile exterioare reprezintă rezultatul acțiunii unor câmpuri sau corpuri și se clasifică după mai multe criterii astfel:

- *după efectul* pe care îl produc asupra piesei pot fi: *forțe* care au ca efect deformații sau deplasări liniare și *cupluri de forțe* având ca efect deformații sau deplasări unghiulare ale planului în care acestea acționează;
- *după modul de aplicare* pot fi: *sarcini active* sau *direct aplicate* și *sarcini pasive* sau *forțe de legătură (reacțiuni);*
- *după modul de distribuție în spațiu* pot fi*: sarcini concentrate* - care acționează pe o suprafață foarte mică ce poate fi modelată cu un punct teoretic, *sarcini distribuite liniar* - care acționează pe o suprafață lungă și foarte îngustă ce poate fi asimilată

cu o linie, *sarcini distribuite pe o suprafață* - care acționează pe o suprafață exterioară sau interioară a corpului şi în cazul câmpurilor de forțe *sarcini distribuite volumic* - care acționează în tot volumul corpului (de exemplu: forța de greutate, de inerție, forța electromagnetică, etc.);

- *după modul de variație în timp* pot fi: *sarcini constante* sau *sarcini variabile în timp*, *sarcini statice* sau *sarcini dinamice;*
- *după modul de variație în spațiu* pot fi*: sarcini fixe* sau *sarcini mobile;*
- *după natura lor* pot fi: *sarcini fundamentale* (sarcini permanente, utile, controlate) şi *sarcini accidentale* (sarcini întâmplătoare, aleatoare, necontrolate, suprasarcini).

1.6. Modelarea legăturilor

Pentru realizarea legăturilor corpului cu mediul fix sau cu celelalte elemente se folosecs următoarele tipuri de legături în plan sau în spațiu:

1. *reazemul rigid simplu* este legătura care permite deplasarea şi rotirea corpului pe suprafața de rezemare, dar o împiedică după o direcție perpendiculară pe această suprafață; conform axiomei legăturilor reazemul rigid simplu se înlocuieşte cu o reacțiune normală *N* (fig.1.2.a);
2. *reazemul elastic simplu* este legătura care permite deplasarea şi rotirea corpului pe suprafața de rezemare, iar deplasarea după direcția perpendiculară pe suprafața de rezemare este în funcție de reacțiunea din elementul intermediar. În cazul unui element liniar elastic reacțiunea normală este direct proporțională cu deplasarea conform relației: $V=kw$ (fig.1.2.b);
3. *articulația rigidă* este legătura care permite rotirea corpului în jurul unei axe în plan (articulația cilindrică în plan) sau în jurul celor trei axe în spațiu (articulația sferică în spațiu), însă nu permite deplasări ale punctului teoretic corespunzător centrului articulației: conform axiomei legăturilor articulația rigidă plană se înlocuieşte reacțiunile *H* şi *V* (fig.1.2.c);
4. *încastrarea rigidă fixă* este legătura care anulează toate posibilitățile de deplasare şi rotire ale corpului (fig.1.2.d); conform axiomei legăturilor aceasta se înlocuieşte în plan cu trei reacțiuni: *H, V* şi *M* ;
5. *încastrarea rigidă mobilă* sau *culisa axială* este legătura care anulează posibilitățile de rotire ale corpului, permițând numai deplasarea după direcția axială: conform axiomei legăturilor culisa axială în plan se înlocuieşte cu o reacțiunea normală *N* şi un cuplu *M* (fig.1.2.e);
6. *încastrarea elastică plană* este legătura ce anulează posibilitățile de deplasare ale corpului permițând numai rotirea în jurul unei axe perpendiculare pe plan, unghiul de rotire fiind proporțional cu cuplul din elementul elastic intermediar; conform axiomei legăturilor încastrarea elastică plană se înlocuieşte cu două reacțiuni *H, V* şi un cuplu proporțional cu unghiul de rotire: $M=k\varphi$ (fig.1.2.f).

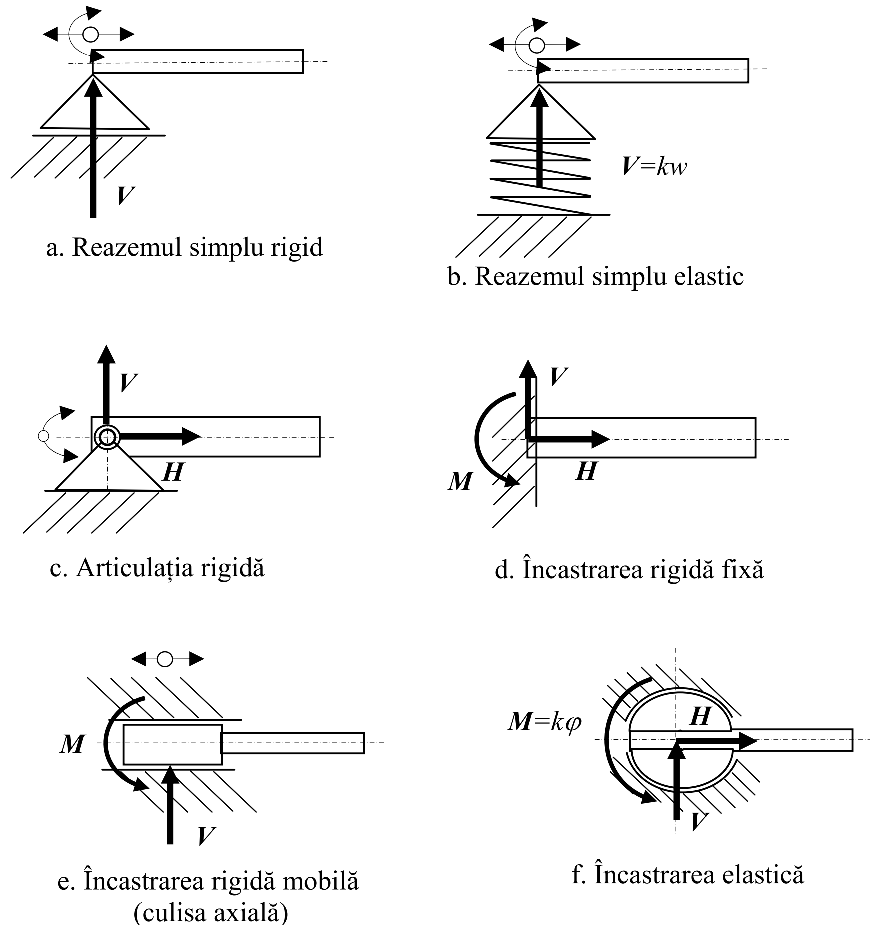


Fig. 1.2

1.7. Forțe interioare, tensiuni şi eforturi secționale

Sub acțiunea *sarcinilor exterioare* în interiorul corpurilor deformabile se produc *forțe interioare, tensiuni sau eforturi unitare* .

Tensiunea sau *efortul unitar* într-un punct al unei secțiuni imaginare dintr-un corp reprezintă raportul dintre *forța interioară elementară* $d\overline{F}$ şi aria elementară dA pe care acționează: $\overline{p} = d\overline{F} / dA$. Distribuția tensiunilor ce apar într-un corp deformabil sub acțiunea sarcinilor exterioare depinde de geometria piesei, mărimea şi configurația încărcării cu sarcini exterioare, proprietățile fizice ale materialului.

Este evident faptul că tensiunea $\overline{p}$ depinde atât de orientarea normalei suprafeței secțiunii plane cât şi de orientarea forței elementare $d\overline{F}$. Se consideră un corp care se secționează cu un plan imaginar. Pentru a se păstra echilibrul forțelor exterioare care acționează asupra fiecăreia din cele două piese obținute după secționare, se introduc *forțele interioare elementare* $d\overline{F}$ corespunzătoare ariilor elementare dA. Conform *teoremei de echivalență a tensiunilor*, *eforturile secționale* reprezintă *torsorul de reducere* al forțelor interioare elementare dintr-o secțiune a unui corp, în centrul de greutate al acesteia.

Un exemplu îl reprezintă eforturile axiale din barele grinzilor cu zăbrele, care se obțin prin *metoda secțiunilor (RITTER):* în punctele de intersecție ale barelor grinzii cu zăbrele cu planul imaginar se introduc *eforturile axiale pozitive* N_{ij}, după direcțiile axelor barelor (fig.1.3).

Conform *teoremei echilibrului părților* forțele exterioare direct aplicate F_i şi de legătură H, V, N se află în echilibru cu eforturile axiale N_{ij} pentru fiecare din cele două părți ale grinzii rezultate în urma secționării:

- partea din stânga: $\sum F_{xs} = 0;\quad \sum F_{ys} = 0;\quad \sum M_{Ozs} = 0$
- partea din dreapta: $\sum F_{xd} = 0;\quad \sum F_{yd} = 0;\quad \sum M_{Ozd} = 0$ (1.1)

Pentru grinda cu zăbrele din figura 1.3 eforturile axiale necunoscute N_{47} şi N_{56} se determină scriind ecuațiile de momente pentru fiecare din cele două părți ale grinzii cu zăbrele rezultate în urma secționării cu un plan imaginar:

- partea din stânga: $\sum M_{5z} = 0 \Rightarrow N_{74}$
- partea din dreapta: $\sum M_{7z} = 0 \Rightarrow N_{56}$

Efortul axial necunoscut N_{57} se determină scriind ecuațiile de echilibru pe direcția Oy şi anume, pentru una din cele două părți :

$$\sum F_y = 0$$

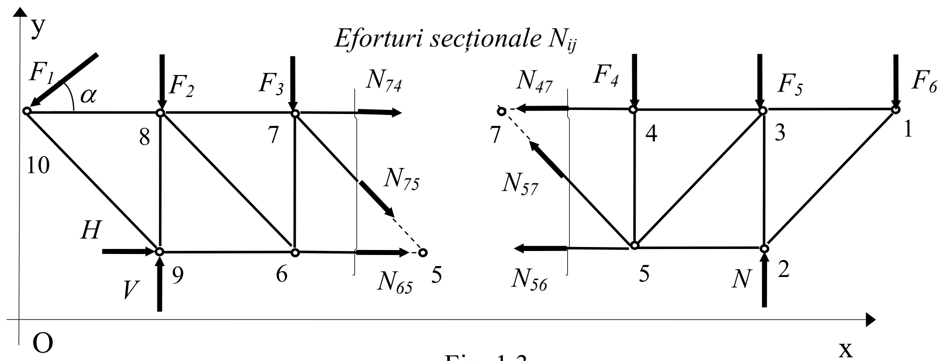


Fig. 1.3

Se consideră în continuare o bară prismatică în echilibru sub acțiunea unui sistem de forțe exterioare direct aplicate F_{ai} şi a forțelor de legătură F_{Li} (fig.1.4). Prin secționarea ei cu un plan imaginar perpendicular pe axa barei se obțin două părți ca în figura 1.5.

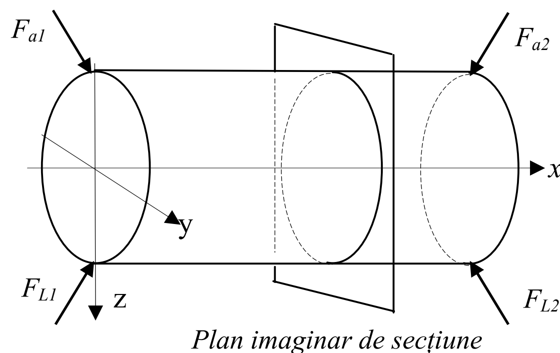


Fig 1.4

Pentru a se păstra echilibrul forțelor exterioare pentru fiecare din cele două părți, se introduc *forțele interioare elementare* $d\overline{F}$, pe cele două fețe ale secțiunii, corespunzătoare celor două părți obținute: *fața pozitivă* pentru partea din stânga şi *fața negativă* pentru partea din dreapta (fig.1.5).

Forțele interioare elementare $d\overline{F}$ reprezintă de fapt forțele de legătură interatomice ale rețelei cristaline care a fost secționată cu planul imaginar, fiind *egale şi opuse* pe cele două fețe ale secțiunii: $dF_s = dF_d$.

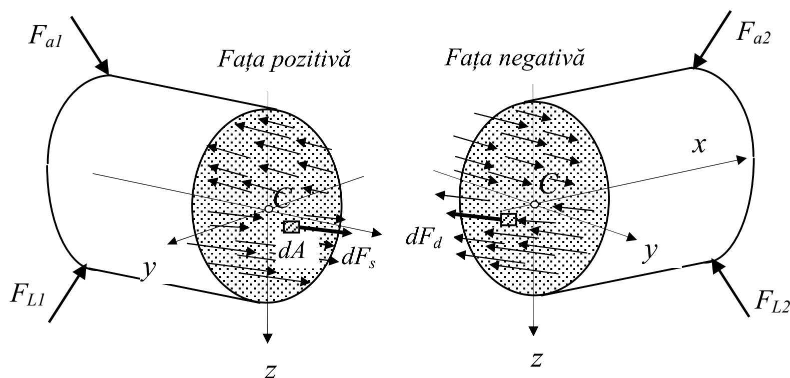


Fig 1.5

Dacă se reduc forțele elementare dF_s şi dF_d corespunzătoare celor două fețe ale secțiunii în centrul de greutate al secțiunii *C,* se obțin torsorii de reducere ale forțelor interioare (fig.1.6):

- pentru *fața pozitivă* torsorul (τ^{int}) format din ($\overline{R}^{int}$) şi cuplul ($\overline{M}^{int}$) ;
- pentru *fața negativă* torsorul (-τ^{int}) format din (- $\overline{R}^{int}$) şi un cuplu (- $\overline{M}^{int}$);

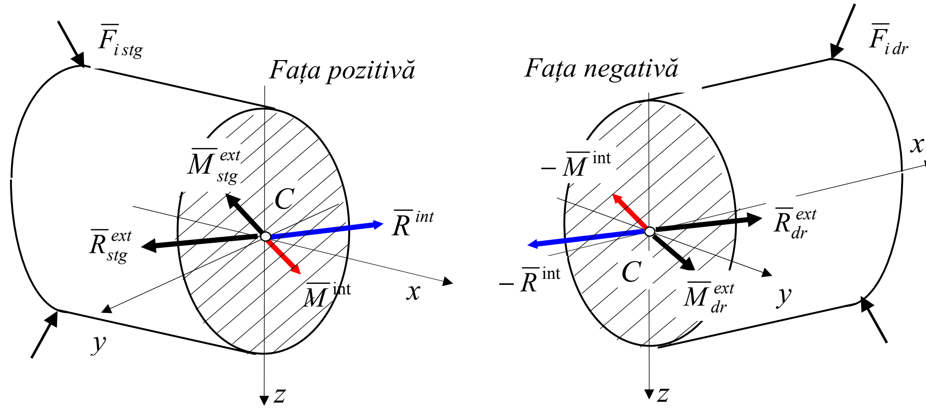


Fig 1.6

Dacă se reduc forțele în punctul *C* şi sarcinile exterioare se obțin torsoarele de reducere ale forțelor exterioare (fig.1.6):

- pentru partea din stânga torsorul forțelor exterioare (τ_{stg}^{ext}) format din rezultanta $\overline{R}_{stg}^{ext}$ şi cuplul rezultant $\overline{M}_{stg}^{ext}$;
- pentru partea din dreapta torsorul forțelor exterioare (τ_{dr}^{ext}) este format din rezultanta $\overline{R}_{dr}^{ext}$ şi cuplul rezultant $\overline{M}_{dr}^{ext}$ (fig.1.6).

Pentru fiecare dintre cele două părți se scriu ecuațiile de echilibru:

a. pentru partea din stânga:

$$\tau^{int} + \tau_{stg}^{ext} = 0 \Rightarrow -\tau^{int} = \tau_{stg}^{ext} \tag{1.2}$$

sau pe componete ale torsorului:

$$\overline{R}_{stg}^{ext} + \overline{R}^{int} = 0; \qquad \overline{M}_{stg}^{ext} + \overline{M}^{int} = 0; \tag{1.3}$$

$$-\overline{R}^{int} = \overline{R}_{stg}^{ext}; \quad -\overline{M}^{int} = \overline{M}_{stg}^{ext}; \tag{1.4}$$

b. pentru partea din dreapta:

$$-\tau^{int} + \tau_{dr}^{ext} = 0 \Rightarrow \tau^{int} = \tau_{dr}^{ext} \tag{1.5}$$

sau pe componente ale torsorului:

$$\overline{R}_{dr}^{ext} - \overline{R}^{int} = 0; \qquad \overline{M}_{dr}^{ext} - \overline{M}^{int} = 0; \tag{1.6}$$

$$\overline{R}^{int} = \overline{R}_{dr}^{ext}; \quad \overline{M}^{int} = \overline{M}_{dr}^{ext} \tag{1.7}$$

Observație:

- elementele torsorului forțelor interioare corespunzătoare *feței negative* ($-\tau^{int}$) *sunt egale cu elementele corespunzătoare ale torsorului forțelor exterioare ce acționează asupra părții din stânga* (τ^{ext}_{stg});
- elementele torsorului forțelor interioare corespunzătoare *feței din pozitive* (τ^{int}) *sunt egale cu elementele corespunzătoare ale torsorului forțelor exterioare ce acționează asupra părții din dreapta* (τ^{ext}_{dr});

Conform relațiilor de echivalență ale trosorului de reducere, dacă se descompune torsorul forțelor interioare pe fața pozitivă (sau negativă) a secțiunii după cele trei direcții ale sistemului triortogonal drept *Oxyz* se obțin șase componente (fig. 1.7), numite *eforturi secționale* notate cu: N_x, T_y, T_z, M_{tx}, M_{iy}, M_{iz}:

$$\begin{cases} \overline{R}^{int} = \overline{N}_x + \overline{T}_y + \overline{T}_z \\ \overline{M}^{int} = \overline{M_{iy}} + \overline{M_{iz}} + \overline{M_{tx}} \end{cases} \tag{1.8}$$

În funcție de efectul pe care îl produce fiecare din cele șase eforturi secționale asupra corpului se deosebesc *patru tipuri*:

- N_x - *eforturile axiale* care produc solicitări de *întindere sau compresiune* a barei după direcția axială *Ox;*
- T_y, T_z - *eforturile tăietoare* care produc *solicitări de forfecare* a barei după cele două direcții *Oy și Oz* situate în planul secțiunii;
- M_{iy}, M_{iz} - *eforturile încovoietoare* care produc *solicitări de încovoiere* a barei după cele două direcții *Oy și Oz* situate în planul secțiunii;
- M_{tx} - *eforturile de răsucire* care produc *solicitări de răsucire sau de torsiune* după direcția axială *Ox;*

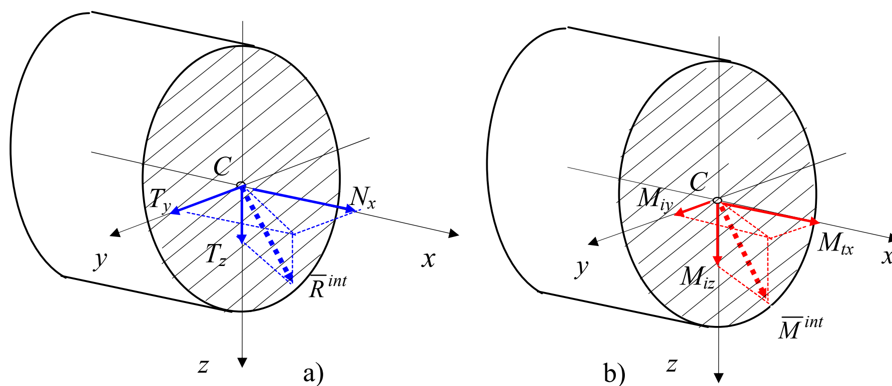


Fig. 1.7

1.8. Diagrame de eforturi secționale şi convenții de semne

Diagramele de eforturi secționale sunt reprezentări ale variației eforturilor secționale pe lungimea barei. Pentru trasarea acestor diagrame de eforturi se consideră următoarele convenții de semne:

- *pentru fața pozitivă* eforturile secționale sunt pozitive dacă au *acelaşi sens* cu sensul axelor corespunzătoare ale sistemului triortogonal drept *Oxyz* şi negative dacă au sensuri opuse (fig.1.8.a);
- *pe fața negativă* eforturile sunt pozitive dacă au *sensuri opuse* axelor corespunzătoare ale sistemului triortogonal drept *Oxyz* şi negative dacă au acelaşi sens (fig.1.8.b).

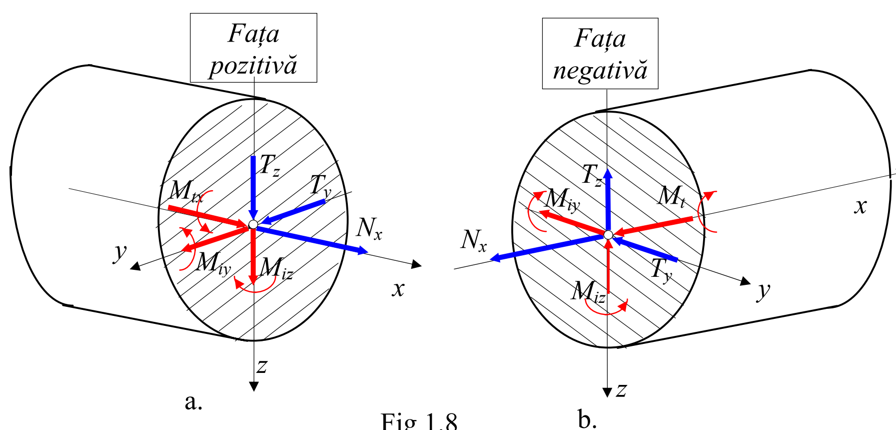


Fig 1.8

Pe baza convențiilor de semne de mai sus se poate afirma că:

- un efortul axial N_x pozitiv produce totdeauna o *solicitare de întindere* iar unul negativ o *solicitare de compresiune*;
- eforturile încovoietoare M_{iy} şi M_{iz} pozitive produc totdeauna *alungirea fibrei inferioare* şi *comprimarea celei superioare* (direcția de observare fiind cea corespunzătoare axei, iar sensul invers axei);
- eforturile tăietoare T_z şi T_y pozitive produc totdeauna *rotirea în sens orar* a celor două secțiuni ale capetele unui tronson de bară (direcția de observare fiind cea corespunzătoare axei, iar sensul invers axei).

În cazul unui *sistem de forțe coplanare* situate în planul *Oxz* convenția de semne pentru eforturile pozitive *N*, M_{iy} şi T_z pe cele două fețe ale secțiunii barei este prezentată în figura 1.9.

Eforturile de pe fața negativă corespund sensului de parcurgere al barei de la stânga la dreapta iar cele de pe fața pozitivă corespund sensului de parcurgere de la dreapta la stânga al barei .

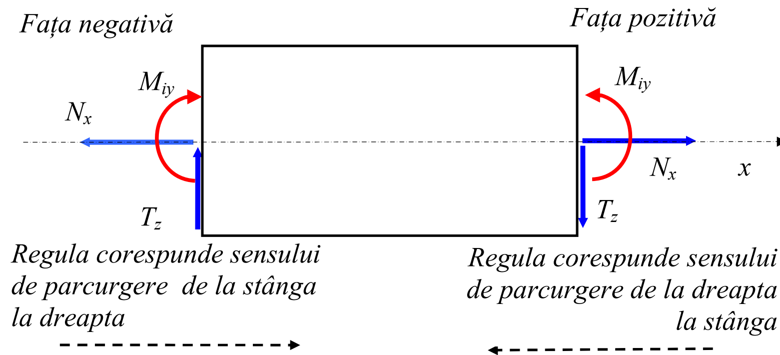


Fig 1.9

Pentru calculul eforturilor secționale se aplică rezultatul dat de relațiile (1.4) pentru fața negativă, respectiv (1.7) pentru fața pozitivă:

- eforturile pe fața negativă se calculează ca suma forțelor exterioare, respectiv a momentelor forțelor care acționează asupra porțiunii de bară din stânga secțiunii;
- eforturile pe fața pozitivă se calculează ca suma forțelor exterioare, respectiv a momentelor forțelor care acționează asupra porțiunii de bară din dreapta secțiunii.

Diagramele de eforturi se reprezintă astfel:

- pentru eforturile axiale N_x , eforturile tăietoare T_z și T_y valorile pozitive se reprezintă deasupra axei diagramei (fig.1.10.a);
- pentru eforturile încovoietoare M_{iy} și M_{iz} valorile pozitive se reprezintă sub axa diagramei (fig.1.10.b);
- pentru eforturile torsionale M_{tx} nu există o anumită convenție la reprezentarea diagramei.

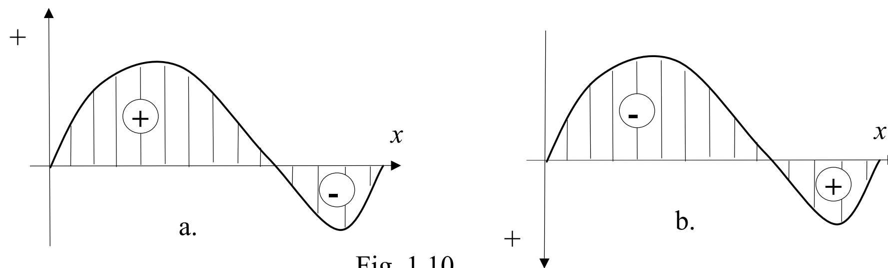


Fig. 1.10

1.9. Deformații specifice şi deplasări

Pentru a pune în evidență *deformațiile specifice liniare* se consideră o piesă cilindrică de lungime L_0 şi diametru d_0, solicitată la întindere cu o forță axială F (fig. 1.11.a).

Bara suferă o deformație longitudinală numită *lungire longitudinală* ($\Delta L = L_1 - L_0$) şi o deformație transversală numită *contracție transversală* ($\Delta d_0 = d_1 - d_0$).

Cu ajutorul celor două deformații se definesc:

- *deformația specifică longitudinală* sau *alungirea*:

$$\varepsilon_l = \Delta L / L_0 \tag{1.11}$$

- *deformația specifică transversală* :

$$\varepsilon_t = \Delta d / d_0 \tag{1.12}$$

Între cele două deformații specifice există relația de legătură:

$$\varepsilon_t = -\nu \cdot \varepsilon_l \tag{1.13}$$

în care ν este *coeficientul contracției transversale* sau *coeficientul lui POISSON*.

Pentru a pune în evidență *deformațiile unghiulare* se consideră o piesă cilindrică de diametru *d* solicitată de momentul de răsucire M_{tx} (fig. 1.11.b). Dacă se studiază un element paralelipipedic drept de volum *dV* aflat în vecinătatea conturului se observă că în urma aplicării momentului de răsucire acesta suferă deformații unghiulare γ (în radiani) ale unghiurilor drepte ($\pi/2$) dintre muchiile paralelipipedului. Aceste deformații se numesc *deformații unghiulare specifice* sau *lunecări specifice.*

Deplasările reprezintă distanțele parcurse de un punct *M* în raport cu un sistem de referință fix *Oxyz.* Acestea se exprimă prin deplasările *u, v, w,* după cele trei direcții *Ox, Oy şi* respectiv *Oz* .

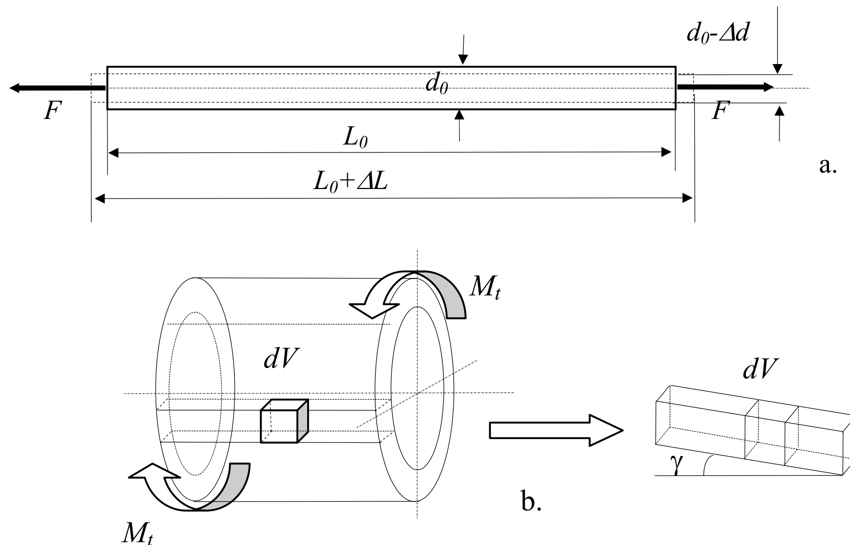


Fig. 1.11

În figura 1.12 a fost reprezentat un element de volum dV înainte şi după deformare. Sunt reprezentate atât deplasările (de corp solid) cât şi deformațiile specifice longitudinale şi lunecările specifice din cele trei plane ale elementului de volum.

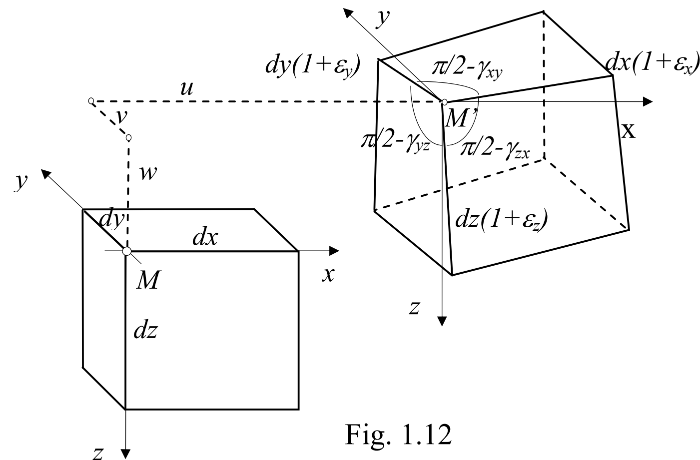


Fig. 1.12

1.10. Curba caracteristică a materialului

Încercarea la tracțiune se face conform STAS SR EN 10002-1/1995 în scopul trasării curbei caracteristice a materialului şi determinării caracteristicilor mecanice:

- *limita de curgere convențională (R_p);*
- *rezistența la rupere (R_r).*
- *alungirea procentuală la rupere (A);*
- *gâtuirea la rupere (Z).*

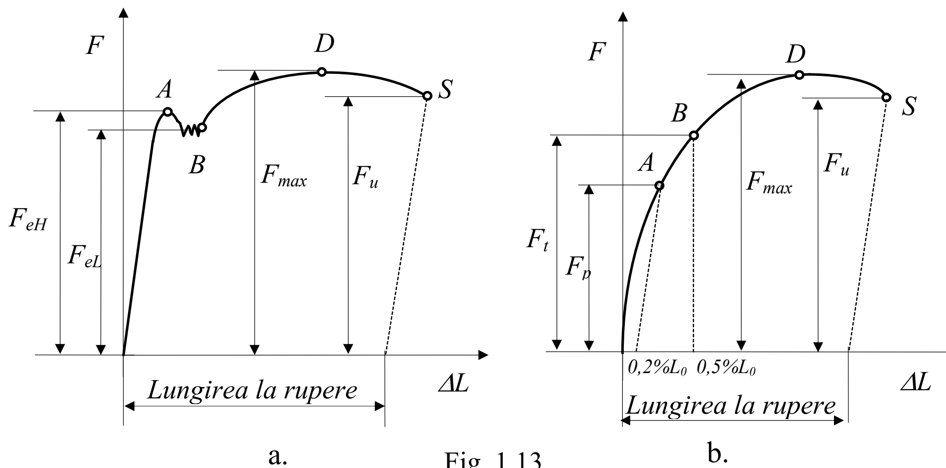


Fig. 1.13

Încercarea la tracţiune constă în aplicarea progresivă a unei forţe de întindere pe direcţia longitudinală a unei piese cilindrice numită *epruvetă.* Sub acţiunea acestei forţe epruveta suferă atât lungire longitudinală cât şi contracţie transversală.

Dacă se exprimă lungirea longitudinală în funcţie de forţa de tracţiune se obţine diagrama forţă-deformaţii. Pentru materialele tenace (oţeluri carbon, aliate, etc.) se obţine o diagramă ca în figura 1.13.a. Pentru materialele cu un comportament neliniar (bronzuri, alame, aliaje neferoase, etc.) se obţine o diagramă ca în figura 1.13.b. Conform STAS SR EN 10002-1/1995, notaţiile din figura 1.13 au următoarele semnificaţii:

- F_{eH} forţa de tracţiune în momentul când se înregistrează prima scădere a sarcinii marchează începutul curgerii plastice a materialului;
- F_{eL} forţa de tracţiune cea mai mică înregistrată în timpul curgerii plastice a materialului;
- F_{max} forţa de tracţiune maximă înregistrată după ecruisarea materialului, înainte de rupere;
- F_u forţa de tracţiune înregistrată în momentul ruperii epruvetei, sau ultima valoare înregistrată de aparat înainte de rupere, mai mică decât F_{max};
- F_t forţa de tracţiune corespunzătoare unei lungiri totale prescrise $\Delta L= 0,5\%\ L_0$
- F_P forţa de tracţiune corespunzătoare unei lungiri remanente prescrise $\Delta L= 0,2\%\ L_0$, unde L_0 este lungimea iniţială a epruvetei.

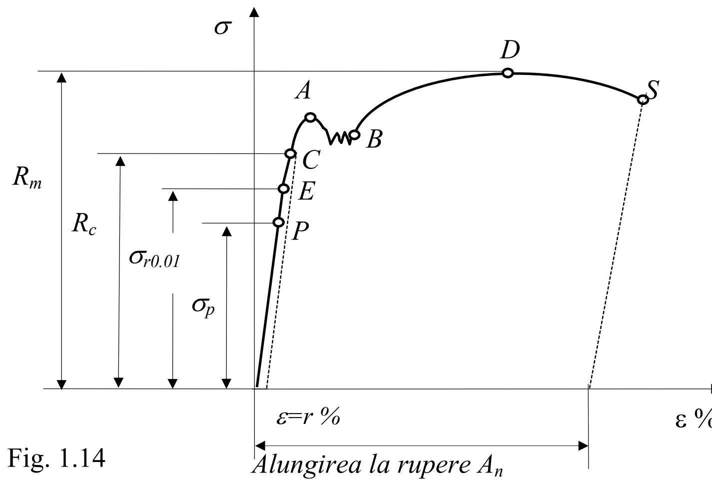


Fig. 1.14

Pe baza diagramei forţe-deformaţii se poate reprezenta diagrama *tensiuni - deformaţii specifice* sau *curba caracteristică a materialului* (fig. 1.14) în care:

$$\sigma = \frac{F}{S_0};\ \ \varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0};\quad S_0 = \frac{\pi d_0^2}{4}. \qquad (1.14)$$

în care:
-S_0 este aria secțiunii inițiale a epruvetei;
-d_0 diametrul epruvetei;
-L_0 lungimea părții calibrate inițiale a epruvetei;
-ΔL alungirea părții calibrate a epruvetei.

Conform STAS SR EN 10002-1/1995, pe *curba caracteristică a materialului* sunt marcate unele puncte ce corespund următoarelor caracteristici importante:

1. punctul P corespunde *limitei de proporționalitate* σ_p (R_p) ce reprezintă valoarea maximă a tensiunii din material pentru care există o relație liniară între tensiuni și deformațiile specifice (este valabilă legea lui Hooke):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{1.15}$$

în care: E este modulul de elasticitate longitudinal.

Limita de proporționalitate convențională σ_{P10} este valoarea tensiunii care corespunde unui modul de elasticitate E_P care nu depășește $e=10\%$ din valoarea medie E_0, determinată pentru prima porțiune a curbei caracteristice conform relației:

$$e = \frac{E_0 - E_p}{E_0} \times 100\% < 10\% \qquad 1.16)$$

2. punctul E corespunde *limitei de elasticitate* σ_e ce reprezintă valoarea maximă a tensiunii din material pentru care comportarea materialului se poate considera perfect elastică (după anularea forței de întindere epruveta revine la forma și dimensiunile inițiale). În realitate, cu câteva excepții, materialele nu au un comportament perfect elastic. Se definește *limita de elasticitate tehnică* $\sigma_{e0,01}$ ca fiind valoarea tensiunii ce corespunde unei deformații specifice remanente la descărcarea epruvetei: $\varepsilon_r = 0,01\%$.
3. punctul C corespunde *limitei de curgere aparentă* σ_c (R_c) ce reprezintă valoarea tensiunii din material pentru care se produc deformații plastice sub acțiunea unei forțe F practic constantă. După atingerea limitei de curgere aparentă**,** curba caracteristică are un traseu sinuos, numit *palier de curgere*. Se definește *limita de curgere remanentă* $\sigma_{c0,2}$ $(R_{c0,2})$ ca fiind valoarea tensiunii ce corespunde unei deformații specifice remanente la descărcarea epruvetei: $\varepsilon_r = 0,2\%$;
4. punctul D corespunde *rezistenței la rupere* σ_r (R_m) ce reprezintă valoarea tensiunii din epruvetă pentru care sarcina F atinge valoarea maximă:

$$R_m = F_{max} / S_0 \tag{1.17}$$

unde S_0 este aria *secțiunii inițiale* a epruvetei.

5. punctul S corespunde ruperii epruvetei pentru care se definesc următoarele caracteristici:
   - *alungirea la rupere* A_n este raportul dintre creșterea lungimii epruvetei măsurată după rupere (deformația remanentă la rupere) și lungimea inițială exprimată în procente:

$$A_n = \frac{L_u - L_0}{L_0} \cdot 100 \;\; [\%] \tag{1.18}$$

în care:

-L_0 este lungimea părții calibrate inițiale a epruvetei;

- L_u lungimea zonei calibrate a epruvetei, măsurată după deformația remanentă la rupere. Indicele n este un factor dimensional care, pentru epruvete de secțiune circulară, reprezintă raportul dintre lungimea şi diametrul epruvetei:

$$n = L_0 / d_0 . \qquad (1.19)$$

- *Gâtuirea la rupere Z* este raportul între variația ariei secțiunii transversale a epruvetei $\Delta S = S_0 - S_u$ şi aria suprafaței secțiunii inițiale exprimat procentual:

$$Z = \frac{S_0 - S_u}{S_0} \cdot 100 \quad [\%] \qquad (1.20)$$

unde S_u este aria secțiunii transversale minime a epruvetei după încercare;
S_0 aria secțiunii inițiale a epruvetei.

1.11. Coeficienți de siguranță şi rezistențe admisibile

Pentru a realiza rolul funcțional în ansamblul din care face parte o piesă sau un organ de maşină trebuie să îndeplinească:

a) *Condiții de rezistență* dacă *tensiunea echivalentă maximă* nu depăşeşte o anumită valoare convențională numită *tensiune admisibilă* σ_a *:*

$$\sigma_{ech} < \sigma_a \qquad (1.21)$$

Tensiunea echivalentă maximă se calculează cu ajutorul uneia din cele cinci teorii clasice de rezistență sau în cazul materialelor cu comportament diferit la întindere-compresiune cu ajutorul teoriei lui Mohr.

Tensiunea admisibilă σ_a se determină cu ajutorul uneia dintre caracteristicile mecanice naturale ale materialului cum ar fi limita de curgere σ_c sau rezistența de rupere σ_r şi folosind relațiile:

$$\sigma_a = \frac{\sigma_c}{c_c} \qquad \text{sau} \qquad \sigma_a = \frac{\sigma_r}{c_r} \qquad (1.22)$$

c_c este coeficientul de siguranță față de limita de curgere (materiale tenace);
c_r - coeficientul de siguranță față de limita de rupere (pentru materiale fragile).

Coeficientul de siguranță este o mărime ce ține seama de o serie de parametri cum ar fi: tipul de material, tehnologia de obținere a semifabricatului, tratamentele termice aplicate, durata de utilizare, mărimea şi tipul sarcinilor aplicate, regimul de funcționare, modelul de calcul ales, condițiile şi mediul de lucru;

b) *Condiții de rigiditate* dacă *deformația echivalentă maximă* nu depăşeşte o anumită *valoare admisibilă*, în caz contrar piesa pierzându-şi rolului funcțional sau distrugându-se.

c) *Condiții de stabilitate* dacă sub acțiunea sarcinilor exterioare, deşi aceste sarcini nu depăşesc anumite valori critice cerute de condițiile de rezistență şi rigiditate, funcționarea nu este compromisă datorită pierderii echilibrului elastic. Exemplul clasic este flambajul de compresiune axială a barelor drepte: forța maximă de compresiune a barei nu trebuie să depăşească valoarea forței critice de flambaj care corespunde pierderii echilibrului elastic.

2

DIAGRAME
DE EFORTURI

2.1. Introducere

Diagramele de eforturi pentru cele patru tipuri de solicitări corespunzătoare eforturilor secționale axiale, tăietoare, încovoietoare şi torsionale, sunt reprezentări ale variației acestor eforturi pe lungimea barelor.

Aşa cum s-a prezentat şi în primul capitol, pentru o bară dreaptă solicitată de un sistem de forțe şi cupluri cuprinse în planul axial *Ozx* şi un sistem de cupluri torsionale din planul secțiunii *Oyz,* cele patru eforturi corespunzătoare *feței negative a secțiunii barei* reprezintă torsorul de reducere al sarcinilor exterioare direct aplicate şi de legătură care acționează asupra părții din *stânga secțiunii* (fig. 2.1). Convenția de semne din figura 2.1 corespunde *sensului de parcurgere de la stânga la dreapta*.

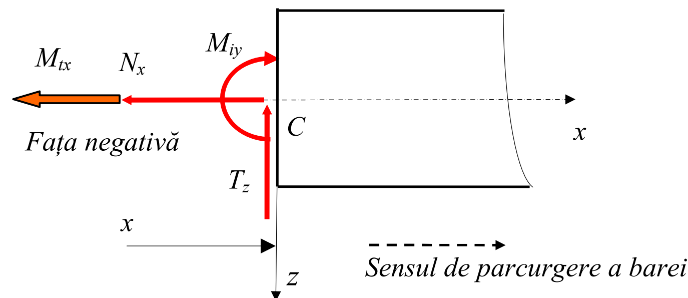


Fig. 2.1

Eforturile secționale pe *fața pozitivă* reprezintă torsorul de reducere al sarcinilor exterioare direct aplicate şi de legătură care acționează asupra părții din *dreapta secțiunii* (fig. 2.2). Convenția de semne din figura 2.2 corespunde sensului de parcurgere al barei de la dreapta la stânga .

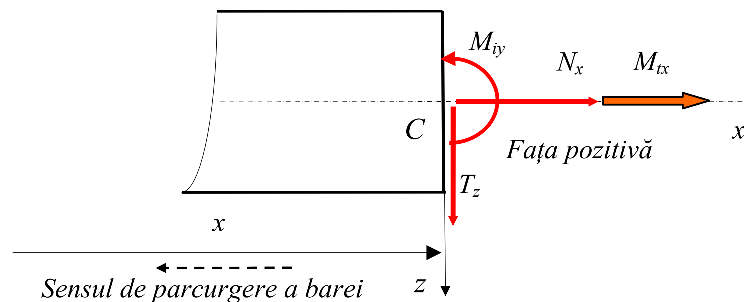


Fig. 2.2

2.2. Diagrame de eforturi axiale

Se consideră o bară dreaptă supusă acțiunii unor sarcini axiale concentrate sau distribuite, având secțiunea constantă pe lungimea ei. Fie un element de lungime dx din această bară delimitat de două secțiuni transversale, aflat la distanța x de capătul din stânga (fig.2.3). Pe cele două secțiuni transversale ale elementului de bară acționează eforturile axiale pozitive N_x respectiv N_x+dN_x (fig. 2.3).

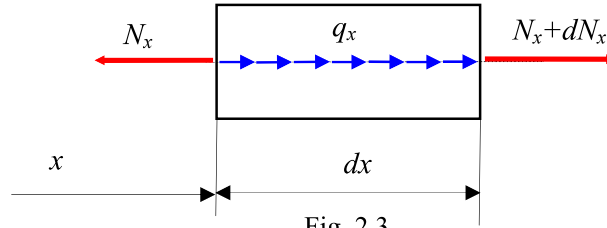


Fig. 2.3

Relațiile diferențiale dintre eforturile axiale N_x şi sarcinile exterioare q_x se obțin din ecuația de echilibru după direcția Ox a forțelor care acționează asupra elementului de bară de lungime dx: $-N_x + q_x dx + N_x + dN_x = 0$ (2.1)

Rezultă: $$dN_x = -q_x dx \quad (2.2)$$

sau: $$\frac{dN_x}{dx} = -q_x \quad (2.2')$$

Dacă se integrează prima relație diferențială (2.2) se obține relația pentru calculul eforturilor axiale: $N_x = \int -q_x dx$ (2.3)

Observații:

- dacă asupra barei nu acționează sarcini distribuite axial ($q_x=0$), din relația (2.3) rezultă eforturi axiale $N_x(x)$ constante;
- dacă sarcinile axiale sunt uniform distribuite: $q_x=q_0$, atunci funcția $N_x(x)$ este liniară: $N_x = \int -q_0 dx \Rightarrow N_x = -q_0 x + C$
- dacă sarcinile axiale sunt distribuite liniar: $q_x=q_0+sx$, atunci funcția $N_x(x)$ este de gradul al doilea: $N_x = \int (-q_0 - sx)dx \Rightarrow N_x = -q_0 x - sx^2/2 + C$
- dacă în secțiunea situată la distanța x_0 acționează o forță axială concetrată P, diagrama are un salt, cele două valori ale efortului axial se determină ca limite la stânga, respectiv la dreapta secțiunii (fig.2.4):

$$N_{st} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} N(x) = H; \quad N_{dr} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} N(x) = H - P \quad (2.4)$$

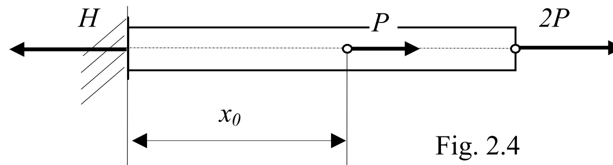


Fig. 2.4

Aplicația 2.1

Să se traseze diagrama de eforturi axiale pentru o bară dreaptă încărcată cu două sarcini axiale uniform distribuite: $q_{x1}=P/a$, $q_{x2}=2P/a$ şi trei forțe axiale concentrate $P_1=4P$, $P_2=P$ şi $P_3=2P$, ca în figura 2.5.

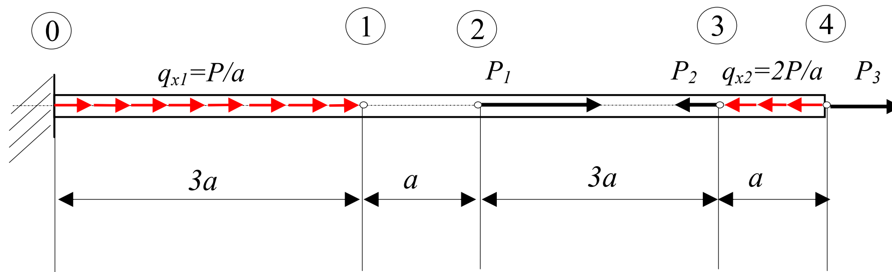


Fig 2.5

Rezolvare

Diagrama de eforturi axiale se va trasa parcurgând bara de la stânga la dreapta după determinarea reacțiunii H_0 din încastrare (fig.2.6). Ecuația de echilibru se scrie astfel:

$$-H_0 + q_{1x}3a + P_1 - P_2 - q_{2x}2a + P_3 = 0 \qquad (2.5)$$

Se obține: $H_0 = 6P$

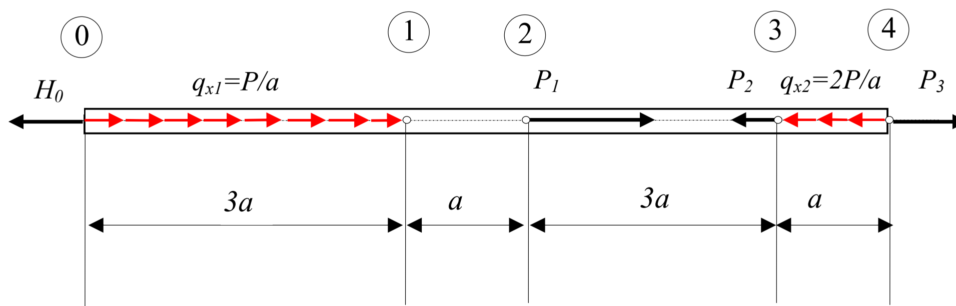


Fig. 2.6

Se numerotează atât secțiunile în care acționează forțele axiale concentrate cât şi cele care delimitează zonele de acțiune a sarcinilor uniform distribuite (fig.2.6). Diagrama de eforturi axiale se obține folosind *metoda originii mobile* şi integrând pentru fiecare tronson de bară:

- *Pe tronsonul (0-1)* avem $q_{x1}=P/a$:

$$N_{0-1}(x) = \int -q_{x1}dx = -\frac{P}{a}x + C_1 \qquad (2.6)$$

Constanta de integrare C_1 se determină din condiția la limită:

$$x=0 \ : \ N(0)=H_0 \ \Rightarrow \ C_1=6P$$

Rezultă: $$N_{0-1}(x)=\left(-\frac{x}{a}+6\right)P \qquad (2.7)$$

Efortul axial din secțiunea (1) este: $N_1=N_{0\text{-}1}(3a)=3P$

- *Pe tronsonul (1-2)* avem $q_x=0$:

$$N_{1-2}(x)=C_2 \qquad (2.8)$$

Constanta C_2 se determină din condiția la limită a tronsonului:

$$x=0\ :\ N(0)=N_1=3P \ \Rightarrow\ C_2=3P$$

Rezultă: $$N_{1\text{-}2}(x)=3P \qquad (2.9)$$

- *Pe tronsonul (2-3)* avem $q_x=0$:

$$N_{2-3}(x)=C_3 \qquad (2.10)$$

Constanta de integrare C_3 se determină din condiția la limită a tronsonului:

$$x=0\ :\ N(0)=N_{2dr}=N_{2st}-4P \Rightarrow C_3=-P$$

Rezultă: $$N_{2\text{-}3}(x)=-P \qquad (2.11)$$

- *Pe tronsonul 3-4* avem $q_{x2}=-2P/a$:

$$N_{3-4}(x)=\int -q_{x2}dx=\frac{2P}{a}x+C_4 \qquad (2.12)$$

Constanta de integrare C_4 se determină din condiția la limită a tronsonului:

$$x=0:\ N(0)=N_{3dr}=N_{3st}+P \ \Rightarrow\ C_4=0$$

Rezultă: $$N_{3-4}(x)=\frac{2x}{a}P \qquad (2.13)$$

Diagrama de eforturi axiale obținută *analitic* prin *metoda originii mobile* are forma din figura 2.7.

Metoda grafică constă în calculul eforturilor axiale în fiecare secțiune, a limitelor la stânga şi dreapta pentru secțiunile în care acționează forțele axiale concentrate şi unirea punctelor respective cu linii drepte sau curbe în funcție de tipul sarcinilor axiale distribuite: constante, liniare, parabolice, etc.

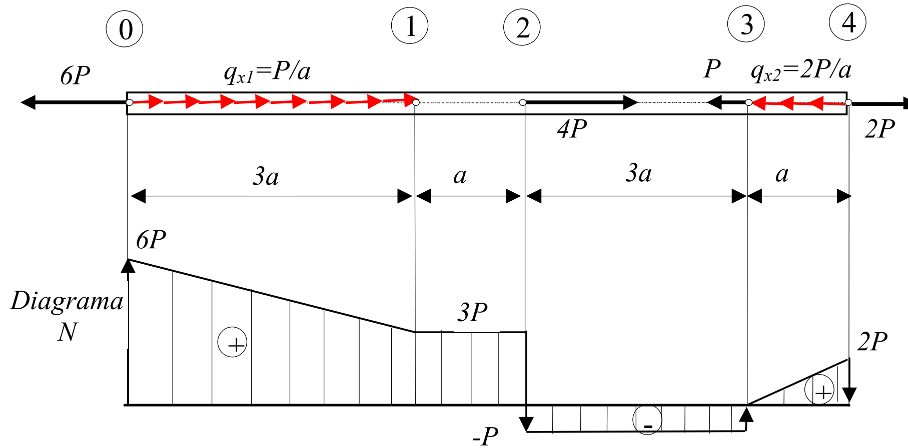


Fig 2.7

2.3. Diagrame de eforturi tăietoare şi încovoietoare

Se consideră o bară dreaptă de secțiune constantă pe lungimea ei, supusă acțiunii unor forțe transversale concentrate sau distribuite, cupluri de forțe cuprinse în planul axial *Oxz*. Fie un element de lungime *dx* delimitat de două secțiuni transversale, aflat la distanța *x* de capătul din stânga barei (fig.2.8). Pe fața din stânga a elementului de bară acționează eforturile tăietoare T_z şi încovoietoare M_{iy}, iar pe cea din dreapta eforturile tăietoare T_z+dT_z, respectiv eforturile încovoietoare $M_{iy}+dM_{iy}$, pozitive ca în figura 2.8.

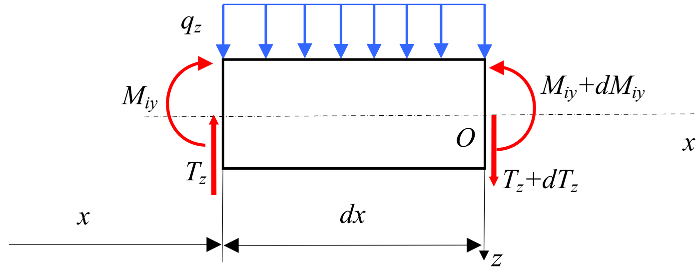


Fig 2.8

Relațiile diferențiale dintre eforturile tăietoare T_z, încovoietoare M_{iy} şi sarcinile exterioare q_z se obțin cu ajutorul ecuațiilor de echilibru:

$$\begin{aligned} &\sum F_z=0 \quad \Rightarrow -T_z+q_z dx+T_z+dT_z=0 \quad \Rightarrow dT_z=-q_z dx \\ &\sum M_{Oy}=0 \quad \Rightarrow -M_{iy}-T_z dx+\frac{q_z(dx)^2}{2}+M_{iy}+dM_{iy}=0 \quad \Rightarrow dM_{iy}=T_z dx \end{aligned} \tag{2.14}$$

Dacă în relațiile (2.14), se neglijează infiniții de ordinul II (dx^2) în raport cu cei de ordinul I (dx), se obțin următoarele relații diferențiale dintre eforturile tăietoare T_z , încovoietoare M_{iy} şi sarcinile exterioare:

$$\frac{dT_z}{dx}=-q_z; \qquad \frac{dM_{iy}}{dx}=T_z \tag{2.15}$$

Dacă se integrează relațiile diferențiale (2.14) se obțin expresiile eforturilor tăietoare şi încovoietoare în funcție de forțele exterioare:

$$\begin{aligned} &T_z(x)=\int -q_z dx \\ &M_{iy}(x)=\int T_z dx \end{aligned} \tag{2.16}$$

Observații: Din relațiile (2.16), pentru un tronson de bară rezultă că:

- dacă $T_z=0$ efortul încovoietor este constant;
- dacă $q_z=0$ efortul tăietor este constant iar efortul încovoietor o funcție liniară de *x* (de gradul I);
- dacă sarcinile q_z sunt uniform distribuite ($q_z=q_0$) atunci T_z este o funcție liniară de *x* : $T_z=\int -q_z dx \Rightarrow T_z=-q_0 x+C_1$ iar efortul încovoietor o funcție de gradul al doilea de *x*: $M_{iy}=\int T_z dx \Rightarrow M_{iy}=-q_0 x^2/2+C_1 x+C_2$; constantele C_1 şi C_2 se determină din condițiile la limită ($x=0$) ale tronsonului;

- dacă sarcinile q_z sunt distribuite liniar ($q_z=q_0+sx$) atunci efortul T_z este o funcție de gradul al doilea: $T_z=-q_0x-sx^2/2+C_1$ iar efortul încovoietor o funcție de gradul al treilea: $M_{iy}=-q_0x^2/2-sx^3/6+C_1x+C_2$; constantele C_1 și C_2 se determină din condițiile la limită ($x=0$) ale tronsonului, ş.a.m.d. ;
- dacă într-o secțiune situată la distanța x_0 de capătul barei, acționează o forță concentrată P sau un cuplu de forțe N, atunci în secțiunea respectivă diagrama de eforturi tăietoare sau încovoietoare prezintă un salt, cele două valori ale eforturilor se determină cu ajutorul limitelor la stânga, respectiv la dreapta secțiunii:

$$T_{st}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}T_z(x);\quad T_{dr}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}T_z(x) \tag{2.17}$$

$$M_{iy\,st}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}M_{iy}(x);\quad M_{iy\,dr}=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}M_{iy}(x) \tag{2.17'}$$

- dacă $T_z(x)=0$ atunci diagrama de momente $M_{iy}(x)$ prezintă un maxim sau minim, deoarece între cele două funcții $T_z(x)$ și $M_{iy}(x)$ există relația diferențială (2.15).

Aplicația 2.2

Să se traseze diagramele de eforturi tăietoare şi încovoietoare pentru bara dreaptă în consolă, încărcată cu un sistem de sarcini exterioare format din forțele uniform distribuite $q_{z1}=2q$, $q_{z2}=q$, forțele concentrate $P_1=4qa$, $P_2=5qa$ şi cuplurile de forțe $N_1=2qa^2$, $N_2=8qa^2$, ca în figura 2.9.

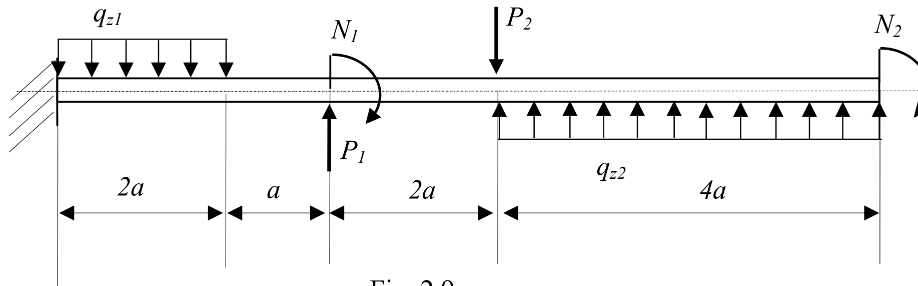


Fig. 2.9

Rezolvare

Pentru a trasa diagramele de eforturi tăietoare şi încovoietoare se calculează reacțiunile V_0 şi M_0 din încastrare cu ajutorul ecuațiilor de echilibru (fig. 2.10):

$$\sum F_z=0: \quad V_0+q_{1z}2a-P_1+P_2-q_{2z}4a=0 \ \Rightarrow V_0=qa;$$

$$\sum M_{Oy}=0: \quad -M_0+q_{1z}2a\cdot a+P_1 3a-N_1-P_2 5a-q_{2z}4a\cdot 7a-N_2=0 \tag{2.18}$$

$$\Rightarrow M_0=qa^2;$$

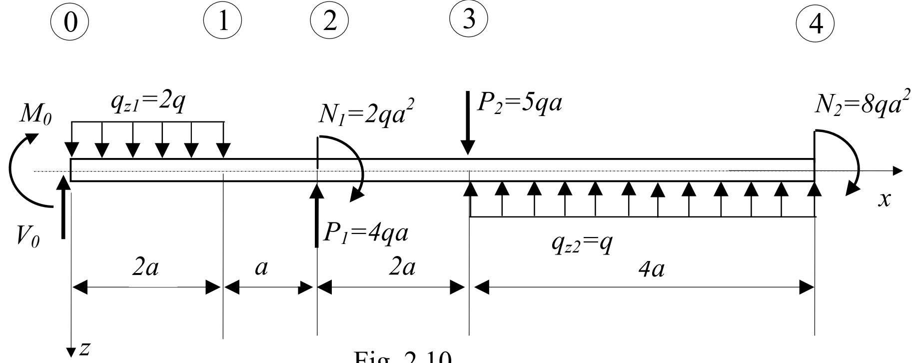


Fig. 2.10

Se numerotează secțiunile în care acționează forțele şi cuplurile concentrate şi cele care delimitează tronsoanele pe care acționează sarcinile distribuite (fig.2.10).

Diagramele de eforturi tăietoare şi încovoietoare se trasează parcurgând bara de la stânga la dreapta, aplicând *metoda originii mobile* şi integrând pentru fiecare tronson conform relațiilor (2.16) :

- *Pe tronsonul (0-1) avem* $q_{z0-1}=2q$**:**

  Eforturile tăietoare se scriu:

  $$T_{0-1}(x) = \int -q_{z1}dx = -2qx + C_1 \tag{2.19}$$

  Constanta de integrare C_1 se determină din condiția la limită:

  $x=0: \ T(0)=+V_0 \ \Rightarrow \ C_1=qa$

  Rezultă: $$T_{0-1}(x) = -2qx + qa \tag{2.20}$$

  În secțiunea (1) vom avea efortul tăietor: $T_1=T_{0-1}(2a)= -3qa$.

  Eforturile încovoietoare se scriu:

  $$M_{0-1}(x) = \int Tdx = -qx^2 + qax + C_2 \tag{2.21}$$

  Constanta de integrare C_2 se determină din condiția la limită:

  $x=0: \ M(0)=M_0, \ C_2=qa^2$

  Rezultă: $$M_{0-1}(x) = -qx^2 + qax + qa^2 \tag{2.22}$$

  În secțiunea (1) vom avea efortul încovoietor: $M_1=M_{0-1}(2a)= -qa^2$.

- *Pe tronsonul (1-2) avem* $q_{z1-2}=0$**:**

  Eforturile tăietoare se scriu:

  $$T_{1-2}(x) = \int -q_z dx = C_3 \tag{2.23}$$

  Constanta de integrare C_3 se determină din condiția la limită:

  $x=0: \ T(0)=T_1=-3qa \ \Rightarrow \ C_3= -3qa$

  Rezultă: $$T_{1-2}(x) = -3qa \tag{2.24}$$

  În secțiunea (2) vom avea efortul tăietor: $T_{2st}=T_{1-2}(a)= -3qa$.

  Eforturile încovoietoare se scriu:

  $$M_{1-2}(x) = \int Tdx = -3qax + C_4 \tag{2.25}$$

Constanta de integrare C_4 se determină din condiția la limită:

$x=0\ :\ M(0)=M_1 \Rightarrow C_4=-qa^2$

Rezultă: $$M_{1-2}(x)=-3qax-qa^2 \tag{2.26}$$

În secțiunea (2) vom avea efortul încovoietor: $M_{2st}=M_{1\text{-}2}(a)=-4qa^2$.

- *Pe tronsonul (2-3) avem $q_{z2\text{-}3}=0$:*

Eforturile tăietoare se scriu: $$T_{2-3}(x)=\int -q_z dx=C_5 \tag{2.27}$$

Constanta de integrare C_5 se determină din condiția la limită:

$x=0\ :\ T(0)=T_{2dr}=T_{2st}+4qa=qa \Rightarrow C_5=q$

Rezultă: $$T_{2-3}(x)=qa \tag{2.28}$$

În secțiunea (3) vom avea efortul tăietor: $T_{3st}=T_{2\text{-}3}(2a)=qa$.

Eforturile încovoietoare se scriu:

$$M_{2-3}(x)=\int Tdx=qax+C_6 \tag{2.29}$$

Constanta de integrare C_6 se determină din condiția la limită:

$x=0\ :\ M(0)=M_{2dr}=M_{2st}+2qa^2=-2qa^2 \Rightarrow C_6=-2qa^2$

Rezultă: $$M_{2-3}(x)=qax-2qa^2 \tag{2.30}$$

În secțiunea (3) vom avea efortul încovoietor: $M_3=M_{2\text{-}3}(2a)=0$.

- *Pe tronsonul (3-4) avem $q_{z3\text{-}4}=-q$:*

Eforturile tăietoare se scriu: $$T_{3-4}(x)=\int -q_{z2}dx=qx+C_7 \tag{2.31}$$

Constanta de integrare C_7 se determină din condiția la limită:

$x=0\ :\ T(0)=T_{3dr}=T_{3st}-5qa=-4qa \Rightarrow C_7=-4qa$

Rezultă: $$T_{3-4}(x)=qx-4qa \tag{2.32}$$

În secțiunea (4) vom avea efortul tăietor: $T_4=T_{3\text{-}4}(4a)=0$.

Eforturile încovoietoare se scriu:

$$M_{3-4}(x)=\int Tdx=\frac{qx^2}{2}-4qax+C_8 \tag{2.33}$$

Constanta de integrare C_8 se determină din condiția la limită:

$x=0\ :\ M(0)=M_3 \Rightarrow C_8=0$

Rezultă: $$M_{3-4}(x)=\frac{qx^2}{2}-4qax \tag{2.34}$$

În secțiunea (4) vom avea efortul încovoietor: $M_4=M_{3\text{-}4}(4a)=-8qa^2$.

Diagramele de eforturi tăietoare T şi încovoietoare M_i obținute *analitic* prin *metoda originii mobile* conform relațiilor de mai sus, sunt date în figura 2.11.

Metoda grafică constă în calculul eforturilor tăietoare şi încovoietoare în fiecare secțiune, a limitelor stânga-dreapta pentru secțiunile în care acționează forțe concentrate sau cupluri de forțe şi unirea punctelor respective cu linii drepte sau curbe conform observațiilor de mai sus: de exemplu, dacă sarcinile transversale q_z sunt uniform distribuite, efortul tăietor T_z este o funcție liniară iar cel încovoietor M_{iy} este o funcție de gradul al II lea, ş.a.m.d.

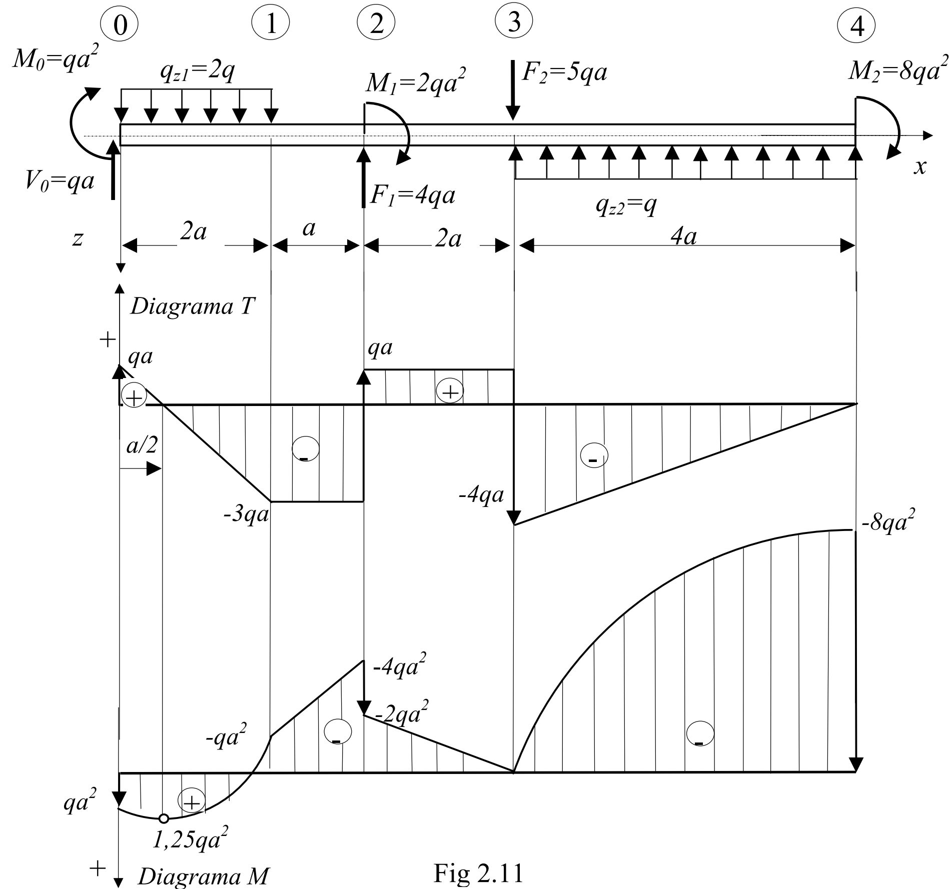


Fig 2.11

Observații:

- există o legătură dintre concavitatea diagramei M_{iy} şi direcția sarcinilor distribuite în sensul că aceasta "reține sarcina distribuită"(fig. 2.11);
- pe tronsoanele barei (1-2) şi (2-3) unde nu acționează sarcini transversale distribuite, eforturile tăietoare T_z sunt constante iar cele încovoietoare M_{iy} variază liniar;
- pe tronsoanele (0-1) şi (3-4) unde acționează sarcini transversale uniform distribuite eforturile tăietoare T_z variază liniar iar eforturile încovoietoare M_{iy} variază după o funcție de gradul al doilea;
- în secțiunea de capăt (4) valorile eforturilor tăietoare şi încovoietoare sunt egale cu cele ale sarcinilor exterioare corespunzătoare ținând seama de convenția semnelor din figura 2.1: $T_4=0$ *şi* $M_4= -8qa^2$. Spunem că *"diagramele se închid"*.

2.4 Diagrame de eforturi torsionale

Se consideră bara dreaptă supusă acțiunii unor momente torsionare (după direcție axială) şi un tronson elementar delimitat de două secțiuni transversale, de lungime dx, aflat la distanța x de capătul din stânga al barei (fig.2.12). Pe cele două secțiuni ale elementului de bară acționează eforturile torsionale axiale M_{tx} respectiv $M_{tx}+dM_{tx}$ pozitive (fig.2.12).

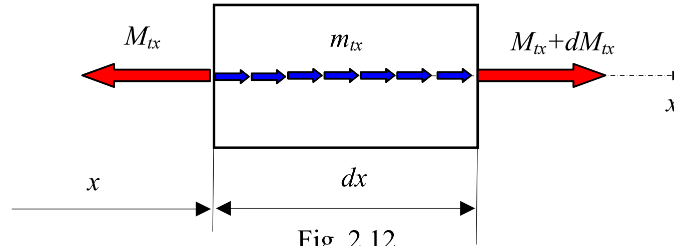


Fig. 2.12

Relațiile diferențiale dintre eforturile torsionale M_{tx} şi cuplurile exterioare m_{tx} se obțin din ecuația de echilibru:

$$-M_{tx} + m_{tx}dx + M_{tx} + dM_{tx} = 0 \tag{2.35}$$

Rezultă:

$$dM_{tx} = -m_{tx}dx \tag{2.36}$$

sau

$$\frac{dM_{tx}}{dx} = -m_{tx} \tag{2.37}$$

Dacă se integrează relația diferențială (2.36) se obține relația de calcul a eforturilor torsionale în funcție de momentele torsionale distribuite:

$$M_{tx}(x) = \int -m_x dx \tag{2.38}$$

Observații:

- dacă asupra tronsonului de bară nu acționează momente torsionale $(m_{tx}=0)$, din relația (2.38) rezultă că eforturile torsionale sunt constante: $M_{tx}=constant$;
- dacă momente torsionale sunt distribuite uniform $(m_{tx}=m_0)$, atunci M_{tx} este o funcție liniară:

$$M_{tx} = \int -m_{tx}dx \quad \Rightarrow M_{tx} = -m_0 x + C \tag{2.39}$$

- dacă într-o secțiune a barei acționează un cuplu torsional concentrat N, atunci în secțiunea respectivă diagrama prezintă un salt, cele două valori ale efortului torsional din stânga, respectiv dreapta secțiunii, se determină cu ajutorul limitelor:

$$M_{st} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} M_{tx}(x); \qquad M_{dr} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} M_{tx}(x) \tag{2.40}$$

2.5. Metoda funcției treaptă Φ

Metodele analitice şi grafice prezentate mai sus pentru trasarea diagramelor de eforturi, se bazează pe integrarea ecuațiilor diferențiale ale eforturilor pentru fiecare tronson (fiecare tronson fiind delimitat de sarcini exterioare aplicate şi de legătură), determinarea constantelor de integrare din condițiile la limită pentru fiecare tronson, calculul limitelor la stânga, respectiv la dreapta secțiunii în care acționează forțele sau cuplurile concentrate. Din acest motiv se mai numesc şi *metode cu originea mobilă.*

Metoda funcției treaptă este o metodă cunoscută cu origine fixă ce foloseşte funcția de tip treaptă *Φ(x-a),* care permite scrierea unitară a expresiilor eforturilor şi trasarea diagramelor folosind pachetul de programe *MATCAD*.

Funcția *Φ(x-a)* este prezentată în figura 2.13 are expresia analitică:

$$\Phi(x-a)=\begin{cases}0 & daca \quad x<a\\ 1 & daca \quad x\geq a\end{cases} \tag{2.41}$$

a := 2

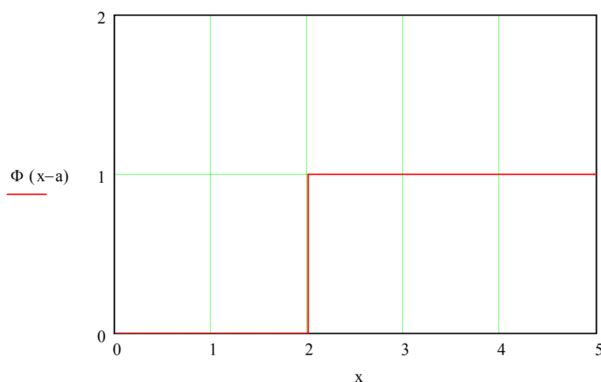


Fig 2.13. *Funcția de tip treaptă Φ(x-a)*

Întrucât expresiile analitice ale eforturilor: axiale *N(x),* torsionale $M_t(x)$ şi tăietoare *T(x)* au la bază ecuații diferențiale similare (vezi relațiile 2.2, 2.14, 2.36), în continuare se prezintă doar expresiile analitice ale eforturilor tăietoare *T(x)* şi încovoietoare $M_i(x)$.

Se consideră o bară dreaptă de lungime *L* şi rigiditatea la încovoiere constantă pe lungimea sa, supusă la încovoiere simplă sub acțiunea a patru tipuri de sarcini prezentate în figura 2.14:

- momentul încovoietor *N* , la distanța *a* de capătul din stânga al barei;
- forța concentrată *P,* la distanța *b* de capătul din stânga al barei;
- sarcina uniform distribuită q_0 , care acționează pe lungimea unui tronson de bară delimitat de distanțele *e* şi *f* de capătul din stânga al barei;
- sarcina liniar distribuită distribuită $q(x)=q_1\dfrac{x-g}{h-g},\quad x\in[g,h]$ care acționează pe lungimea unui tronson delimitat de distanțele *g* şi *h* de capătul din stânga al barei.

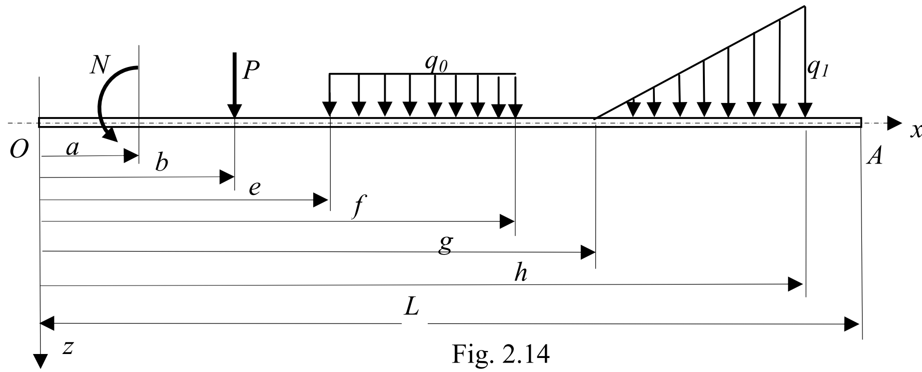


Fig. 2.14

Pentru fiecare din cele patru tipuri de sarcini se reprezintă expresiile analitice şi diagramele de variaţie a eforturilor *T(x)* şi *M(x)* pe lungimea barei, astfel:

- în cazul încărcării barei cu un cuplu de forţe *N* la distanţa *a* faţă de capătul din stânga al barei, efortul tăietor *T(x)* este nul iar efortul încovoietor *M(x)* are expresia analitică:

$$M_i(x) = -N \cdot \Phi(x-a) \tag{2.42}$$

Diagrama de eforturi încovoietoare $M_i(x)$ s-a reprezentat din figura 2.15.

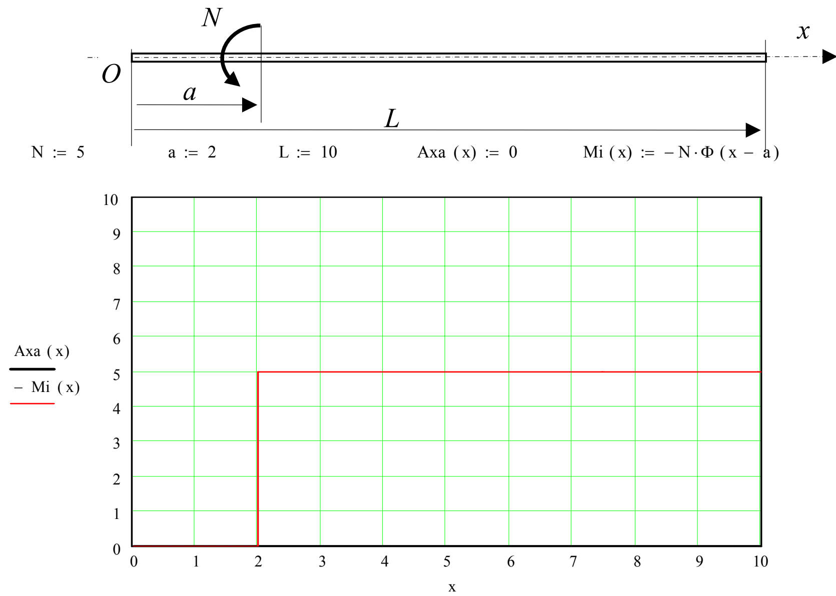


Fig. 2.15

- în cazul încărcării barei cu o forță concentrată P la distanța b față de capătul din stânga al barei, expresiile analitice ale eforturilor $T(x)$ și $M_i(x)$ sunt:

$$T(x) = -P \cdot \Phi(x-b);$$
$$M_i(x) = -P \cdot \Phi(x-b) \cdot (x-b) \qquad (2.43)$$

Diagramele de forturi tăietoare $T(x)$ și încovoietoare $-M_i(x)$ s-au reprezentat în figura 2.16. Se observă că la stânga secțiunii în care acționează forța P eforturile $T(x)$ și $M_i(x)$ sunt nule iar în dreapta, efortul $T(x)$ este constant iar efortul $M_i(x)$ variază liniar.

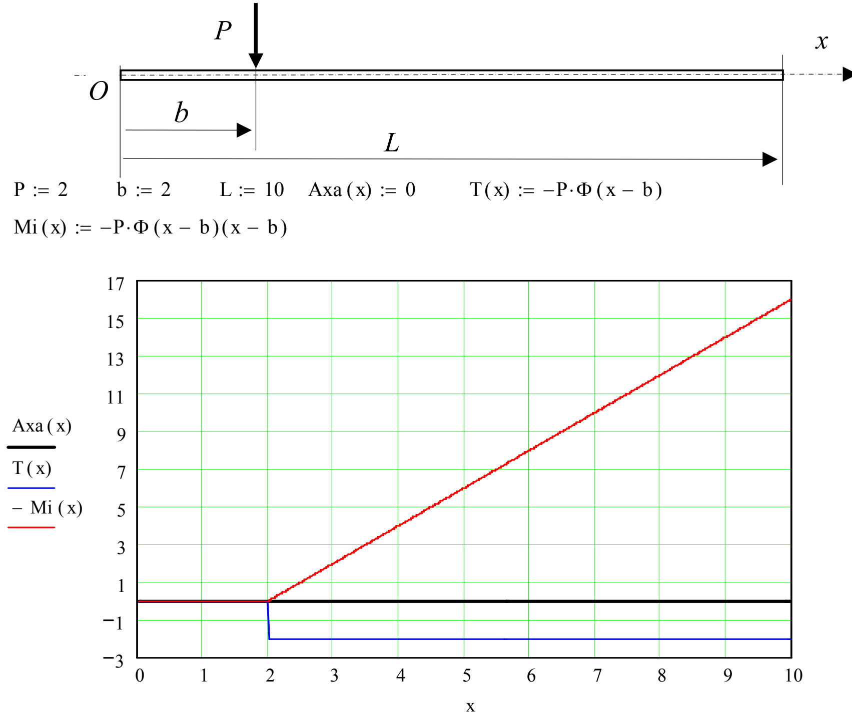


Fig. 2.16

- în cazul încărcării barei cu o sarcină uniform distribuită q_0 care acționează pe un tronson delimitat de distanțele e și f față de capătul din stânga al barei, se adaugă și se scade sarcina uniform distribuită q_0 pentru tronsonul de capăt $x \in (f, L)$. Acest lucru nu modifică cu nimic starea de încărcare a barei. Expresiile analitice ale eforturilor $T(x)$ și $M_i(x)$ sunt:

$$T(x) = -q_0 \cdot \Phi(x-e) \cdot (x-e) + q_0 \cdot \Phi(x-f) \cdot (x-f);$$
$$M_i(x) = -\frac{q_0}{2} \cdot \Phi(x-e) \cdot (x-e)^2 + \frac{q_0}{2} \cdot \Phi(x-f) \cdot (x-f)^2; \qquad (2.44)$$

Diagramele de eforturi $T(x)$ și $-M_i(x)$ sunt reprezentate în figura 2.17.

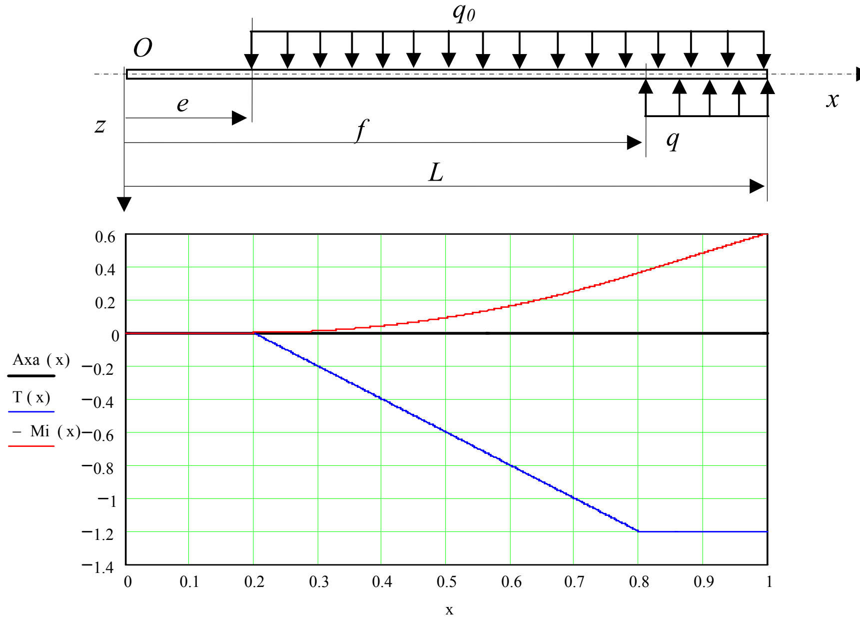


Fig. 2.17

Se observă că pe tronsonul din stânga secțiunii corespunzătoare lui $x=e$, eforturile $T(x)$ şi $M_i(x)$ sunt nule. Pe tronsonul $x\in(e,f)$ pe care acționează sarcina uniform distribuită efortul $T(x)$ variază liniar iar $M_i(x)$ este o funcție de gradul al II lea. Pe ultimul tronson corespunzător lui $x\in(f,L)$ efortul $T(x)$ este constant iar $M_i(x)$ este o funcție de gradul I.

- în cazul în care bara este încărcată cu o sarcină distribuită liniar care acționează pe tronsonul delimitat de distanțele g şi h față de capătul din stânga: $q(x)=q_1\dfrac{x-g}{h-g}$, $x\in[g,h]$, se adaugă şi se scade sarcina distribuită liniar $q(x)=q_1+q_1\dfrac{x-h}{h-g}$, $x\in[h,L]$, acest lucru nu modifică cu nimic starea de încărcare a barei.

  Expresiile analitice ale eforturilor $T(x)$ şi $M_i(x)$ sunt în acest caz:

$$T(x)=-\frac{q_1}{2(h-g)}\cdot\Phi(x-g)\cdot(x-g)^2+q_1\cdot\Phi(x-h)\cdot(x-h)+\frac{q_1}{2(h-g)}\cdot\Phi(x-h)\cdot(x-h)^2;$$
$$M_i(x)=-\frac{q_1}{6(h-g)}\cdot\Phi(x-g)\cdot(x-g)^3+\frac{q_1}{2}\cdot\Phi(x-h)\cdot(x-h)^2+\frac{q_1}{6(h-g)}\cdot\Phi(x-h)\cdot(x-h)^3; \quad (2.45)$$

Diagramele de eforturi $T(x)$ şi $-M_i(x)$ sunt reprezentate în figura 2.18.

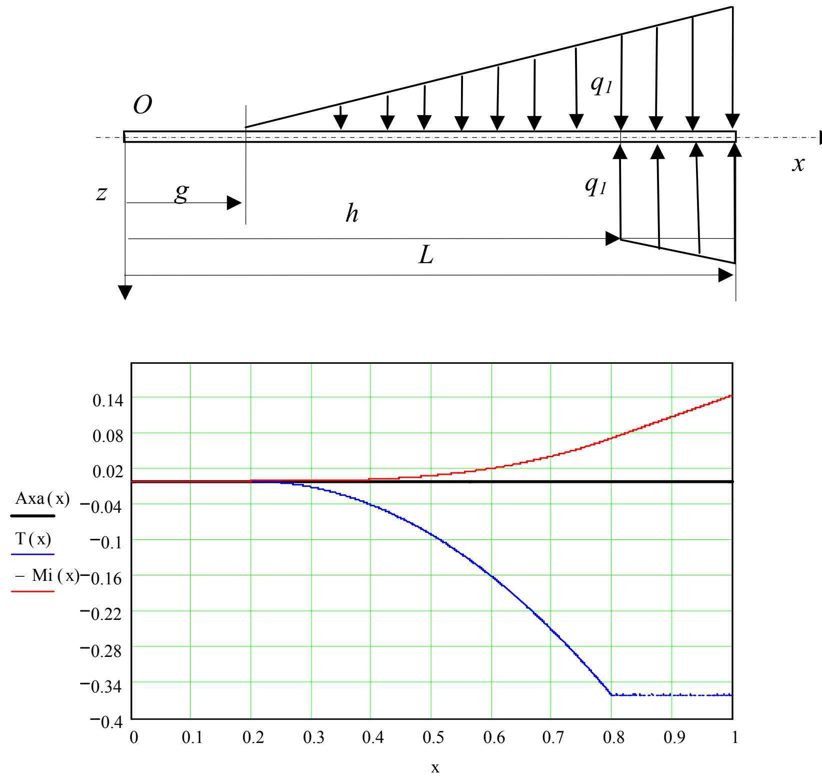


Fig. 2.18

Se observă că pe tronsonul din stânga secțiunii din care acționează sarcina distribuită liniar $x = g$, eforturile *T(x)* şi $M_i(x)$ sunt nule. Pe porțiunea pe care acționează sarcina distribuită liniar $x \in (g, h)$, efortul *T(x)* este o funcție de gradul al doilea şi $M_i(x)$ o funcție de gradul al treilea, iar pe ultimul tronson $x \in (h, L)$ efortul *T(x)* este constant şi efortul $M_i(x)$ este o funcție de gradul I.

Pentru cazul general când asupra barei acționează mai multe sarcini de acelaşi fel sau diferite tipuri de sarcini din cele prezentate mai sus, se folosesc expresiile analitice corespunzătoare şi se aplică *principiul suprapunerii efectelor* .

Aplicația 2.3

Folosind metoda funcției treaptă Φ să se traseze diagramele de eforturi tăietoare şi încovoietoare pentru bara în consolă din figura 2.19 şi pentru cazul particular: $q=1kN$, $a=1m$.

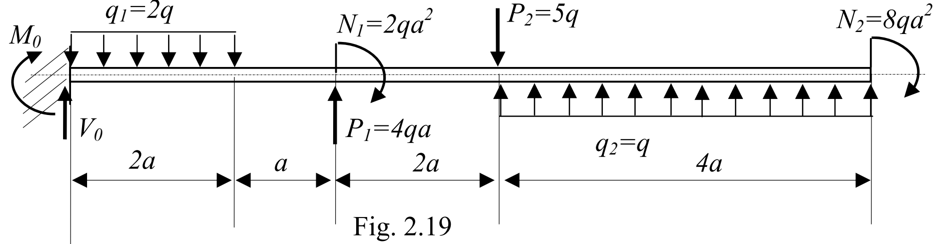


Fig. 2.19

Rezolvare:

Reacțiunile V_0 şi M_0 din încastrare s-au calculat la aplicația 2.2:

$V_0=qa;\qquad M_0=qa^2.$

După înlocuirea valorilor $a=1m$ şi $q=1kN/m$ rezultă:

$V_0=1\ kN;\qquad M_0=1\ kNm$

Utilizând expresiile analitice ale eforturilor pentru fiecare tip de sarcină prezentate mai sus şi aplicând principiul suprapunerii efectelor pentru cele 8 sarcini exterioare şi forțe de legătură se obțin următoarele expresii ale eforturilor tăietoare şi încovoietoare:

$$T(x)=V_0\cdot\Phi(x)+P_1\cdot\Phi(x-3)-P_2\cdot\Phi(x-5)-q_1\cdot\Phi(x)\cdot x+q_1\cdot\Phi(x-2)\cdot(x-2)+$$
$$+q_2\cdot\Phi(x-5)\cdot(x-5)-q_2\cdot\Phi(x-9)\cdot(x-9);$$
$$M_i(x)=M_0\cdot\Phi(x)+N_1\cdot\Phi(x-3)+N_2\cdot\Phi(x-9)+V_0\cdot\Phi(x)\cdot x+ \qquad (2.46)$$
$$+P_1\cdot\Phi(x-3)\cdot(x-3)-P_2\cdot\Phi(x-5)\cdot(x-5)-\frac{q_1}{2}\cdot\Phi(x)\cdot x^2+$$
$$+\frac{q_1}{2}\cdot\Phi(x-2)\cdot(x-2)^2+\frac{q_2}{2}\cdot\Phi(x-5)\cdot(x-5)^2-\frac{q_2}{2}\cdot\Phi(x-9)\cdot(x-9)^2;$$

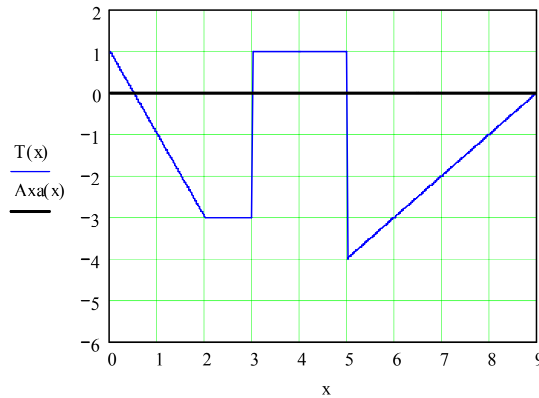


Fig. 2.20

Diagramele de forturi tăietoare $T(x)$ şi încovoietoare $-M_i(x)$ s-au trasat în figurile 2.20 şi 2.21.

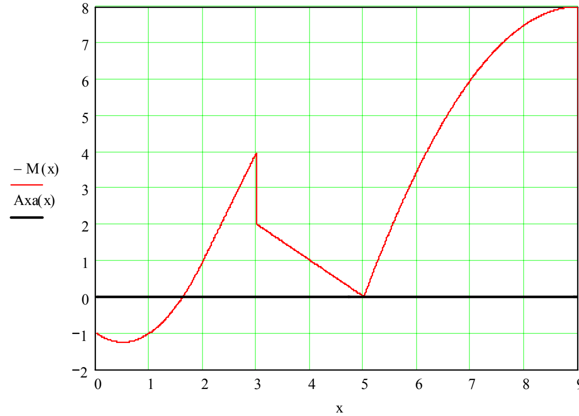


Fig. 2.21

Aplicația 2.4

Folosind metoda funcției treaptă Φ să se traseze diagramele de eforturi tăietoare şi încovoietoare pentru bara dreaptă simplu rezemată, încărcată cu trei sarcini distrbuite ca în figura 2.22, pentru cazul particular: $q=1kN$, $a=1m$.

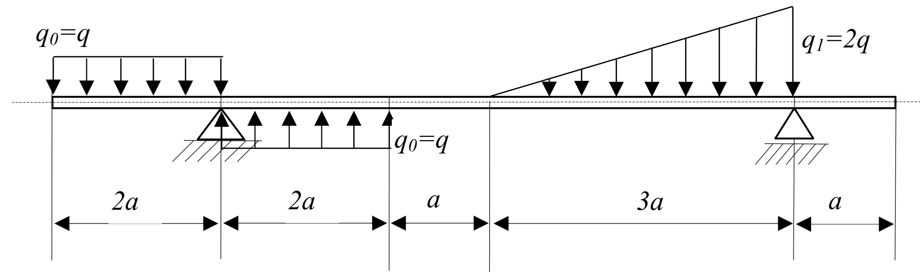


Fig. 2.22

Reacțiunile V_1 şi V_2 din cele două reazeme se determină din ecuațiile de momente față de axa Oy pentru forțele echivalente din figura 2.23:

$$\sum M_{Oy1}=0 \Rightarrow V_2\cdot 6a-\frac{1}{2}3a\cdot 2q\cdot 5a+2a\cdot q\cdot a+2a\cdot q\cdot a=0 \quad \Rightarrow V_2=\frac{11}{6}qa$$
$$\sum M_{Oy2}=0 \Rightarrow -V_1\cdot 6a+\frac{1}{2}3a\cdot 2q\cdot a-2a\cdot q\cdot 5a+2a\cdot q\cdot 7a=0 \quad \Rightarrow V_1=\frac{7}{6}qa \tag{2.47}$$

Relația de verificare a reacțiunilor calculate V_1 şi V_2 este :

$$\sum F_z=0: \quad 2a\cdot q-2a\cdot q+\frac{1}{2}3a\cdot 2q=V_1+V_2 \tag{2.48}$$

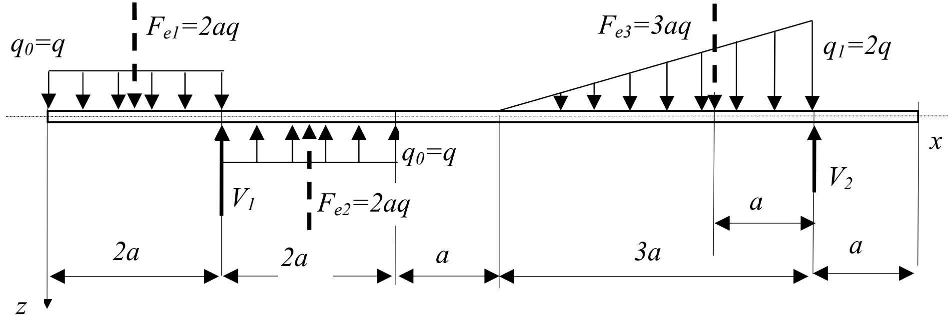


Fig. 2.23

Utilizând expresiile analitice ale cele trei tipuri de sarcini: concentrate V_1 şi V_2, uniform distribuite q_0 şi liniar distribuită 0-q_1 şi aplicând principiul suprapunerii efectelor se obțin următoarele expresii analitice ale eforturilor $T(x)$ şi $M_i(x)$:

$$T(x)=V_1\cdot\Phi(x-2a)+V_2\cdot\Phi(x-8a)-q_0\cdot\Phi(x)\cdot x+q_0\cdot\Phi(x-2a)\cdot(x-2a)+q_0\cdot\Phi(x-2a)\cdot(x-2a)-$$
$$-q_0\cdot\Phi(x-4a)\cdot(x-4a)-\frac{q_1}{2\cdot 3a}\cdot\Phi(x-5a)\cdot(x-5a)^2+q_1\cdot\Phi(x-8a)\cdot(x-8a)+\frac{q_1}{2\cdot 3a}\cdot\Phi(x-8a)\cdot(x-8a)^2. \tag{2.49}$$

$$M_i(x)=V_1\cdot\Phi(x-2a)(x-2a)+V_2\cdot\Phi(x-8a)(x-8a)-\frac{q_0}{2}\cdot\Phi(x)\cdot x^2+\frac{q_0}{2}\cdot\Phi(x-2a)\cdot(x-2a)^2+$$
$$+\frac{q_0}{2}\cdot\Phi(x-2a)\cdot(x-2a)^2-\frac{q_0}{2}\cdot\Phi(x-4a)\cdot(x-4a)^2-$$
$$-\frac{q_1}{6\cdot 3a}\cdot\Phi(x-5a)\cdot(x-5a)^3+\frac{q_1}{2}\cdot\Phi(x-8a)\cdot(x-8a)^2+\frac{q_1}{6\cdot 3a}\cdot\Phi(x-8a)\cdot(x-8a)^3 \tag{2.50}$$

Introducând valorile numerice $a=1m$ şi $q=1kN/m$ în relațiile (2.49) se obțin diagramele de forturi tăietoare $T(x)$ şi încovoietoare $-M_i(x)$ prezentate în figura 2.24.

Observații:

- pentru $x\in(0,\ 2a)$ şi $x\in(2a,\ 4a)$ efortul $T(x)$ variază liniar iar $M(x)$ după o funcție de gradul al doilea;
- pentru $x\in(4a,\ 5a)$ efortul $T(x)$ este constant iar $M(x)$ variază liniar;
- pentru $x\in(5a,\ 8a)$ efortul $T(x)$ variază după o funcție de gradul al doilea iar $M(x)$ după o funcție de gradul al treilea;
- pentru $x\in(8a,\ 9a)$ eforturile $T(x)$ şi $M(x)$ sunt nule.

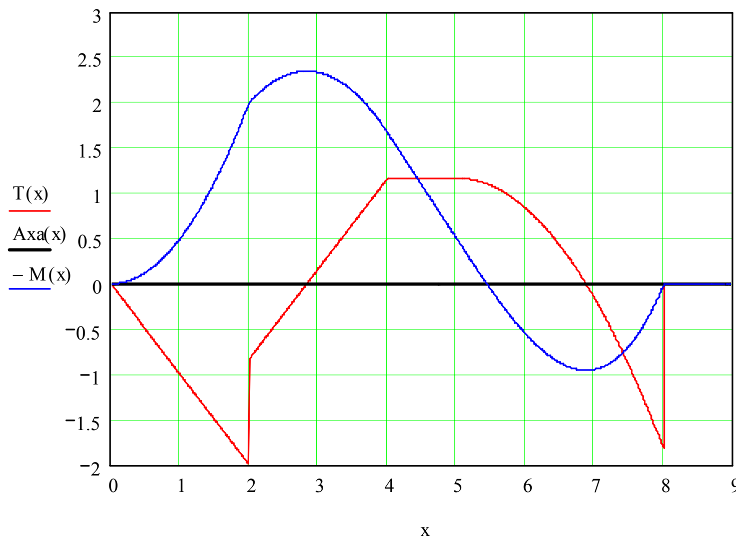


Fig. 2.24. *Diagramele de eforturi T şi* M_i

2.6. Diagrame de eforturi pentru bare cotite plane

Barele cotite plane sunt sisteme de bare conținute în acelaşi plan, sudate în noduri (sau având noduri rigide), încărcate cu forțe sau cupluri de forțe conținute în planul lor supuse la solicitări axiale de întindere-compresiune, tăietoare şi încovoietoare.

Pentru a trasa diagramele de eforturi se parcurg următoarele etape:

1. se calculează reacțiunile din cele trei ecuații de echilibru ale sistemelor plane;
2. se alege pentru fiecare tronson sistemul de axe *Oxz* astfel încât axa *Ox* să fie orientată după direcția axei tronsonului de bară iar sensul de parcurgere să fie acelaşi (de preferință de la stânga la dreapta);
3. se reduc forțele şi cuplurile de forțe care acționează asupra porțiunii din bara cotite din stânga secțiunii pentru sensul de parcurgere al tronsonului de la stânga la dreapta, sub forma torsorului de reducere :

$$\begin{cases} \overline{R} = F_x \overline{i} + F_z \overline{k} \\ \overline{M}_O = M_{Oy} \overline{j} \end{cases} \tag{2.51}$$

4. se trasează diagramele de eforturile secționale pentru fiecare tronson de bară folosind aceleaşi convenții de semne stabilite la bara dreaptă;
5. se verifică rezultatele obținute.

Observație

În cazul barelor cotite având unghiuri drepte între două tronsoane alăturate, eforturile axiale se schimbă în tăietoare şi invers, iar eforturile încovoietoare îşi păstrează atât valoarea cât şi semnul.

Aplicația 2.5

Să de traseze diagramele de eforturi axiale *N*, tăietoare *T* şi încovoietoare M_i pentru bara cotită plană (sistemul format din cinci bare cu noduri rigide) din figura 2.25.

Se parcurg etapele de mai sus:

1. *Determinarea reacțiunilor* V_6, H_6 şi M_6 din încastrare :

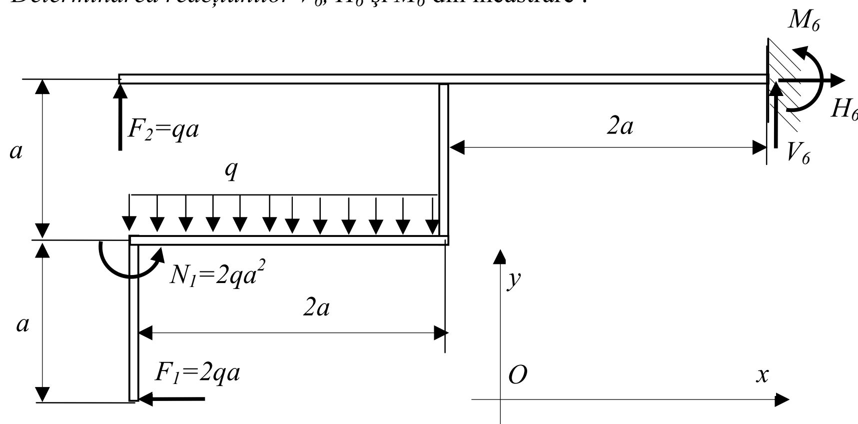


Fig. 2.25

Ecuațiile de echilibru se scriu:

$$\sum F_x = 0: \; H_6 - F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_6 = 2qa;$$
$$\sum F_y = 0: \; V_6 - q\cdot 2a + F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_6 = qa \qquad (2.52)$$
$$\sum M_z = 0: \; M_6 + N_1 - F_1 \cdot 2a \cdot 3a - F_2 \cdot 4a = 0 \quad \Rightarrow \quad M_6 = 0$$

2. *Se alege pentru fiecare tronson* de bară un sistem de axe *Oxz* local astfel încât axa *Ox* să fie orientată după direcția axei tronsonului de bară în sensul de parcurgere al tronsonului de bară (de preferință de la stânga la dreapta) (fig.2.26).

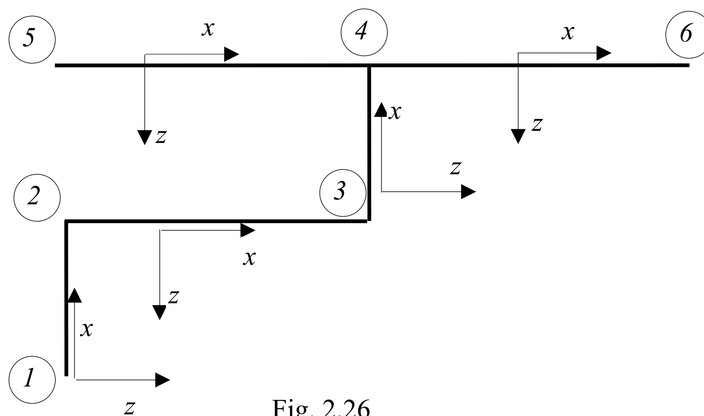


Fig. 2.26

3. *Se reduc forţele şi cuplurile de forţe* care acţionează asupra barei cotite, situate la stânga secţiunii tronsonului (sensul de parcurgere fiind de la stânga la dreapta), sub forma torsorului de reducere, ca în figura 2.27

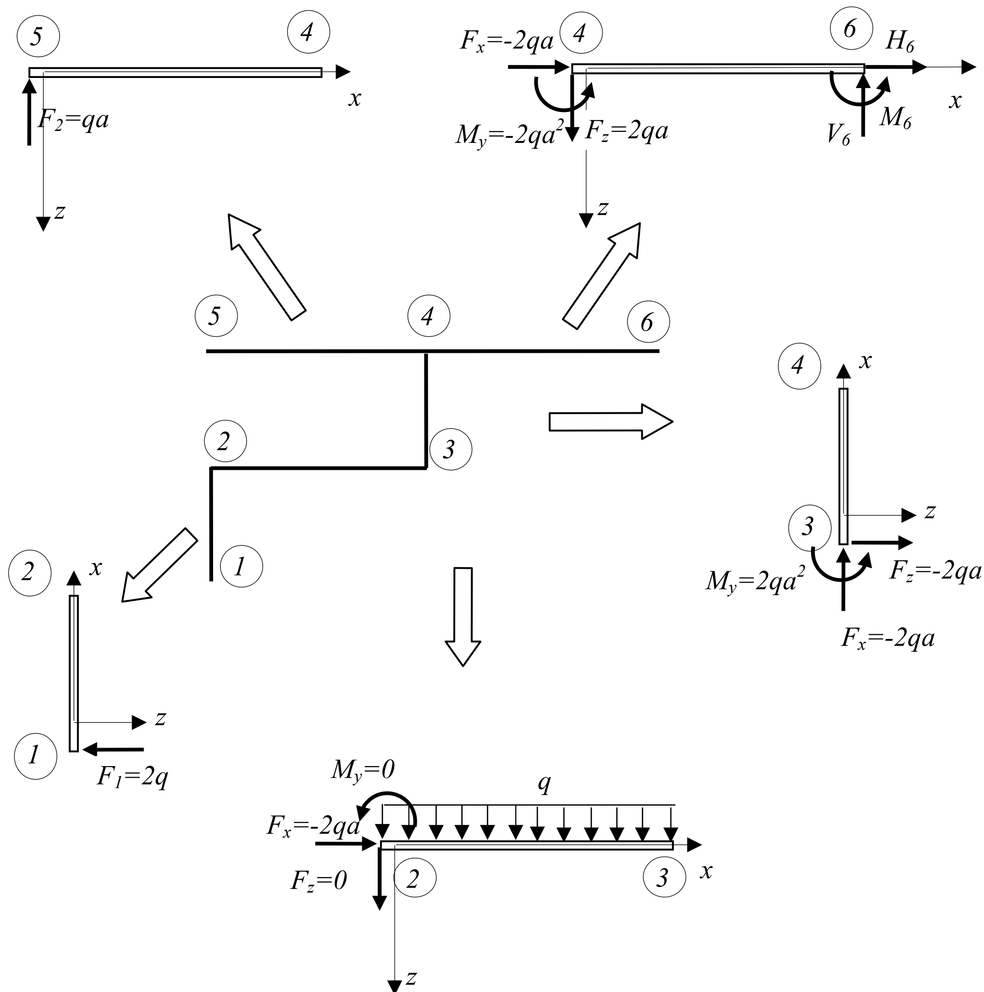


Fig. 2.27

4. *Se trasează diagramele de eforturi secţionale* pentru fiecare tronson folosind aceleaşi convenţii de semne de la bara dreaptă. Se obţin diagramele de eforturi axiale N tăietoare T şi încovoietoare M_i din figurile 2.28, 2.29, 2.30.

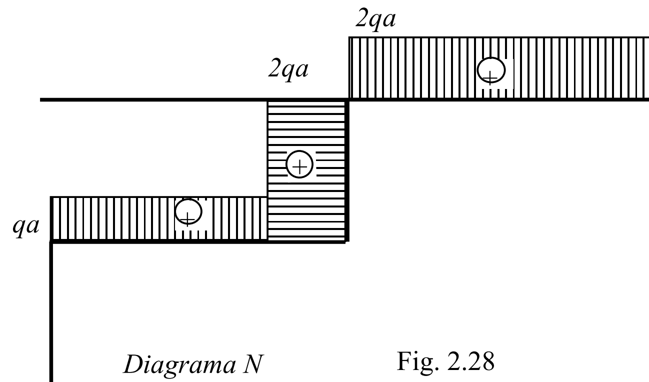


Diagrama N Fig. 2.28

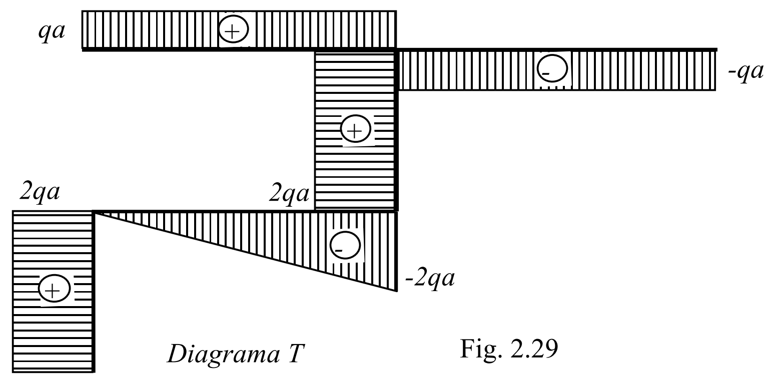


Diagrama T Fig. 2.29

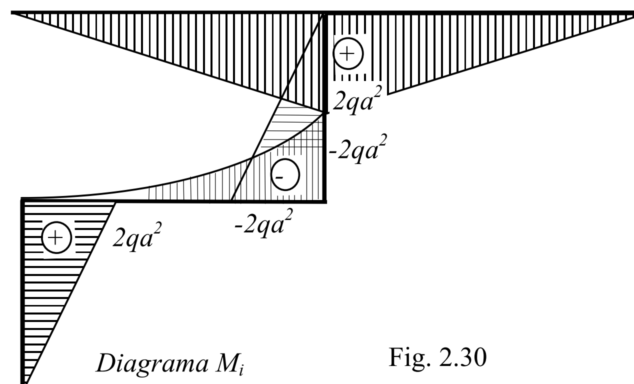


Diagrama M_i Fig. 2.30

5. Verificarea rezultatelor obținute

După trasarea diagramelor de eforturi secționale se verifică rezultatele pentru ultimul tronson de bară (4-6) : astfel valorile eforturilor obținute în secțiunea (6) pentru sarcinile care acționează la stânga secțiunii trebuie să fie egale cu valorile reacțiunilor respectând convenția de semne pentru sensul de parcurgere de la dreapta la stânga:

$$N = H_6; \quad T = -V_6; \quad M_i = M_6. \qquad (2.53)$$

Se observă că rezultatele obținute se verifică şi diagramele se închid:

$$N = 2qa; \quad T = -qa; \quad M_i = 0. \qquad (2.54)$$

2.7. Diagrame de eforturi pentru bare cotite spațiale

Barele cotite spațiale sunt sisteme formate din bare drepte cu noduri rigide, încărcate cu forțe sau cupluri de forțe spațiale. Ca şi în cazul barelor cotite plane pentru trasarea diagramelor de eforturi se foloseşte metoda torsorului de reducere a forțelor şi cuplurilor de forțe şi se parcurg următoarele etape:

1. se alege pentru bara cotită spațială un sistem de axe triortogonal drept *Oxyz* şi se calculează reacțiunile folosind cele şase ecuații de echilibru din Mecanica solidului pentru sistemele spațiale de forțe;
2. se alege pentru fiecare tronson câte un sistem de axe local *Oxyz* astfel încât axa *Ox* să fie orientată după direcția axei barei iar sensul de parcurgere să fie acelaşi, de preferință de la stânga la dreapta;
3. se reduc forțele şi cuplurile de forțe care acționează asupra barei cotite în secțiunea situată în capătul tronsonului, sub forma torsorului de reducere :

$$\begin{cases} \overline{R} = F_x\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k} \\ \overline{M}_O = M_{Ox}\bar{i} + M_{Oy}\bar{j} + M_{Oz}\bar{k} \end{cases} \qquad (2.55)$$

4. se trasează diagramele de eforturi secționale pentru fiecare tronson de bară folosind convențiile de semne stabilite la bara dreaptă ;
5. se verifică rezultatele obținute.

Observație : la trasarea diagramelor de eforturi în barele cotite spațiale se ține seama că eforturile axiale şi cele de răsucire corespund axei *Ox* a sistemului local de axe, iar eforturile tăietoare şi încovoietoare cu câte două componente fiecare, corespund axelor *Oz* şi *Oy* ale sistemului local de axe.

Aplicația 2.6

Să de traseze diagramele de eforturi axiale *N*, tăietoare *T* încovoietoare M_i şi de răsucire M_t pentru sistemul format din patru bare cu noduri rigide şi unghiuri drepte între tronsoane din figura 2.32.

Rezolvare

1. *Se determină reacțiunile* din încastrarea (5) cu ajutorul celor şase ecuații de echilibru din Mecanică pentru sistemul de forțe care acționează asupra cadrului adică forțele exterioare F_1, F_2, sarcina uniform distribuită *q* respectiv forțele şi cuplurile de legătură din încastrare, în raport cu sistemul de axe *Oxyz* din figura 2.32:

$$\begin{aligned}
&\sum F_x = 0: \; X_6 - F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_5 = qa; \\
&\sum F_y = 0: \; Y_5 + F_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad Y_5 = -2qa \\
&\sum F_z = 0: \; Z_5 - q \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad Z_5 = qa \\
&\sum M_{Ox} = 0: \; L_5 + F_1 \cdot a - qa \cdot a = 0 \quad \Rightarrow \quad L_5 = -qa^2 \\
&\sum M_{Oy} = 0: \; M_5 + qa \cdot \frac{3a}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad M_5 = -\frac{3}{2}qa^2 \\
&\sum M_{Oz} = 0: \; N_5 + F_2 \cdot a + F_1 \cdot 2a = 0 \quad \Rightarrow \quad N_5 = -5qa^2
\end{aligned} \tag{2.56}$$

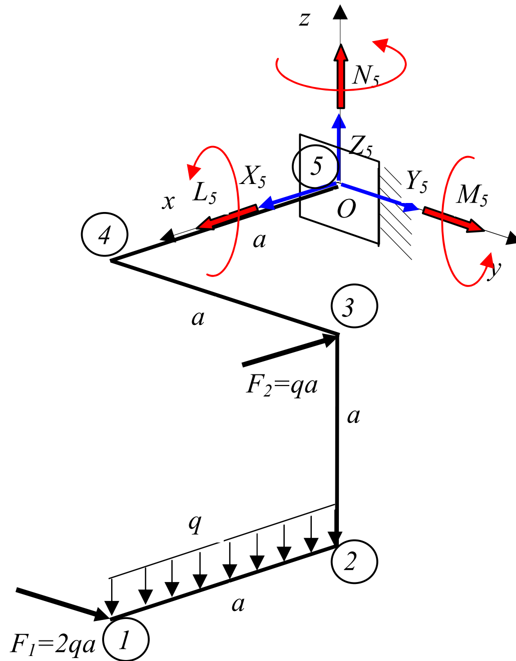


Fig. 2.32

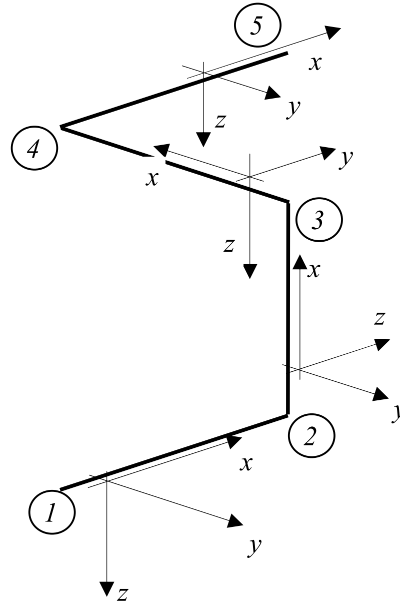


Fig. 2.33

2. *Se alege pentru fiecare tronson* de bară câte un sistem local de axe drept *Oxyz* astfel încât axa *Ox* să fie orientată după direcția axei tronsonului de bară, iar sensul de parcurgere să fie același pentru toate tronsoanele (fig.2.33).
3. *Se reduc forțele care acționează* asupra barei cotite, situate la stânga secțiunii fiecărui tronson, sub forma torsorului de reducere a sistemului de forțe.
4. *Se trasează diagramele de eforturi secționale* pentru fiecare tronson al bari cotite spațiale folosind convenția de semne stabilită pentru bara dreaptă obținându-se diagramele de eforturi axiale *N,* torsionale M_t, tăietoare *T* şi încovoietoare M_i din figurile 2.34, 2.35, 2.36 respectiv 2.37.

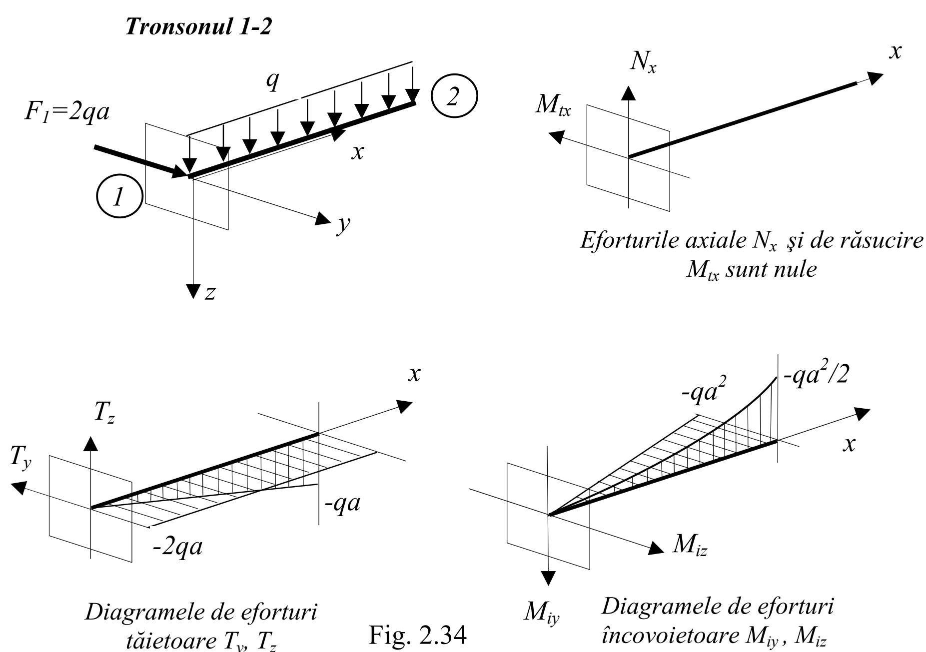


Fig. 2.34

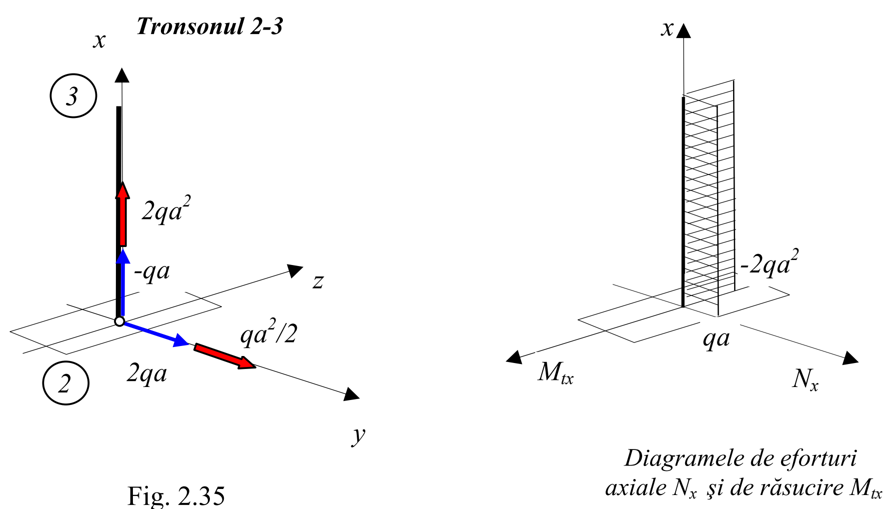
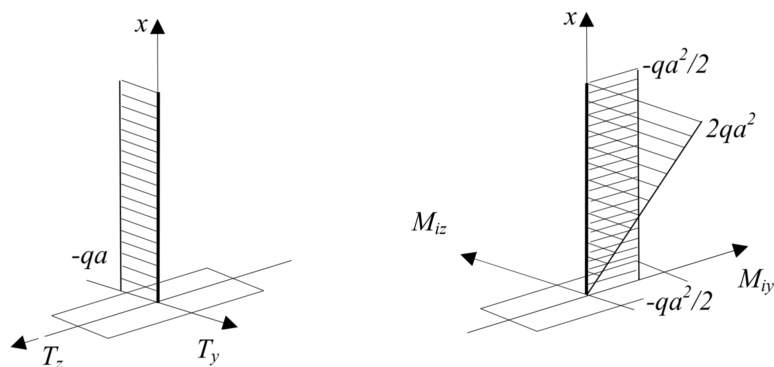


Fig. 2.35

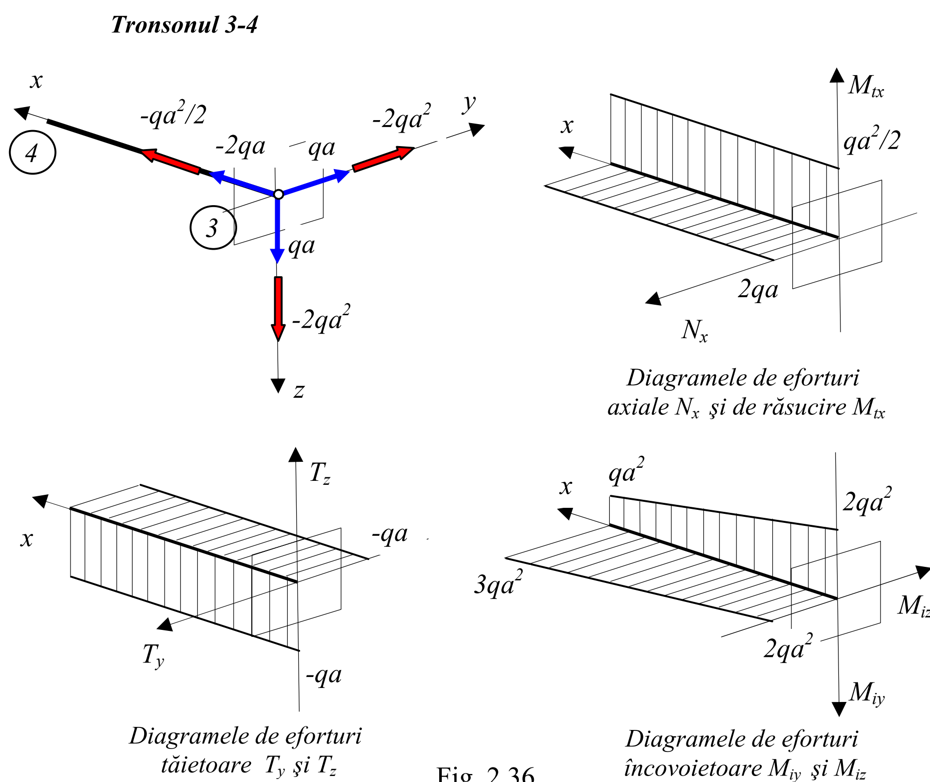


Diagramele de eforturi tăietoare T_y şi T_z

Diagramele de eforturi încovoietoare M_{iy} şi M_{iz}

Fig. 2.35

Tronsonul 3-4



Diagramele de eforturi tăietoare T_y şi T_z

Diagramele de eforturi încovoietoare M_{iy} şi M_{iz}

Fig. 2.36

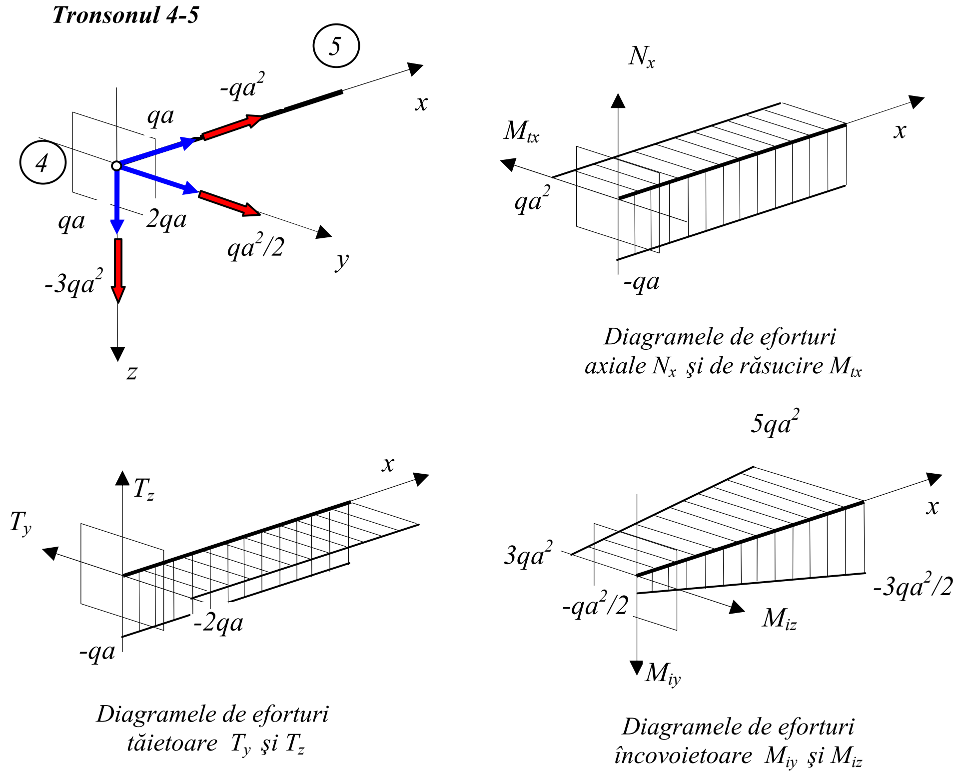


Fig. 2.37

5. Verificarea rezultatelor obținute

După trasarea diagramelor de eforturi secționale se verifică rezultatele pentru ultimul tronson de bară (4-5) : conform convenției de semne, pentru sensul de parcurgere de la dreapta la stânga, în secțiunea (5) valorile eforturilor obținute în acest caz pentru sarcinile care acționează la stânga secțiunii trebuie să fie egale ca mărime cu reacțiunile şi să aibă următoarele semne (fig.2.38):

$$\begin{cases} N_x = -X_5 \\ T_y = Y_5 \\ T_z = -Z_5 \end{cases} \qquad \begin{cases} M_{tx} = -L_5 \\ M_{iy} = M_5 \\ M_{iz} = -N_5 \end{cases} \tag{2.57}$$

Se observă că rezultatele obținute se verifică şi diagramele se închid (fig.2.39):

$$\begin{cases} N = -qa \\ T_y = -2qa \\ T_z = -qa \end{cases} \qquad \begin{cases} M_{tx} = qa^2 \\ M_{iy} = -3qa^2 \\ M_{iz} = 5qa^2 \end{cases} \tag{2.58}$$

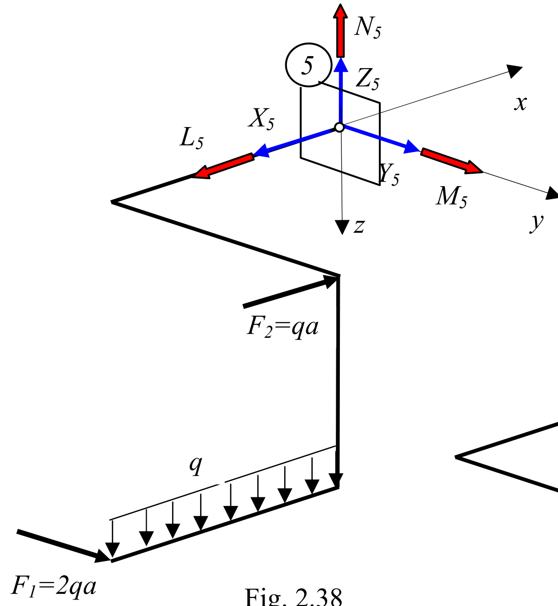


Fig. 2.38

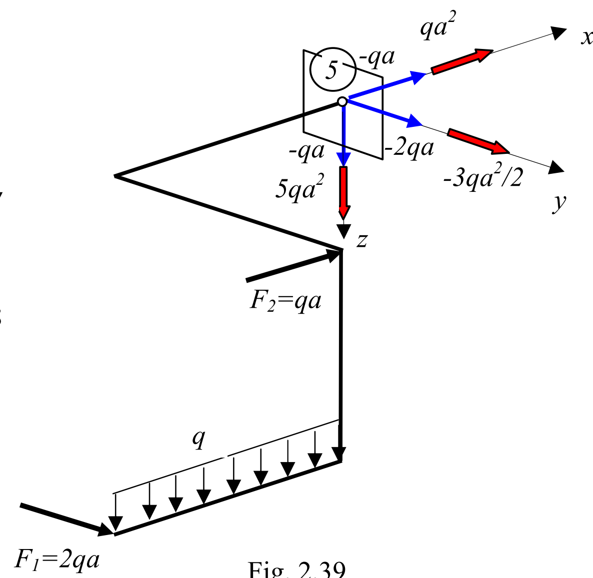


Fig. 2.39

2.8. Probleme propuse

2.8.1. Se consideră grinda având încărcarea şi rezemarea din figura 2.40, unde $a=1m$ şi $q=20kN/m$. Se cere să se traseze diagramele de eforturi tăietoare şi încovoietoare *(Concursul de Rezistenţa materialelor, Ploieşti 1988)*

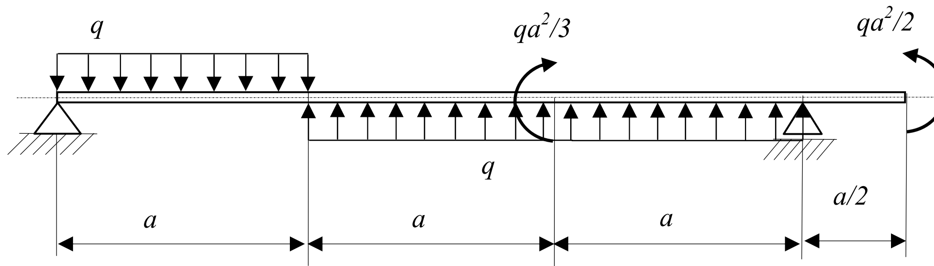


Fig. 2.40

2.8.2. Se dă grinda metalică rezemată şi încărcată ca în figura 2.41. Se cere să se traseze diagramele de eforturi tăietoare şi încovoietoare
(Concursul de Rezistența materialelor, Cluj-Napoca 1987).

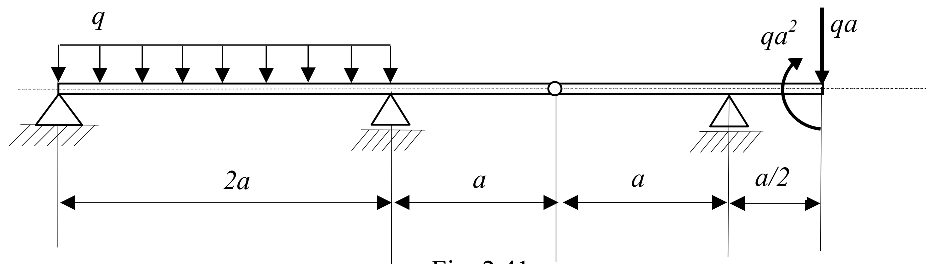


Fig. 2.41

2.8.3. Se consideră grinda metalică rezemată şi încărcată ca în figura 2.42 unde $a=0,5m$ şi $q=20kN/m$. Se cere să se traseze diagramele de eforturi tăietoare şi încovoietoare.
(Concursul de Rezistența materialelor, Cluj-Napoca 1991).

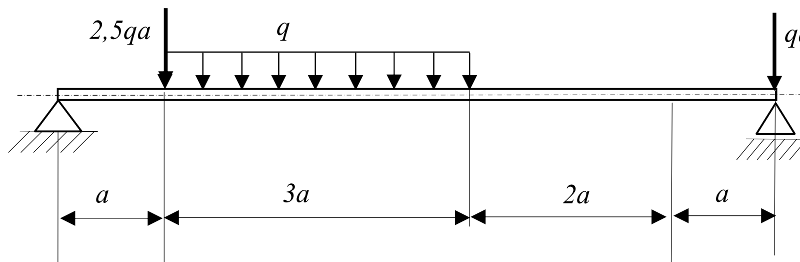


Fig. 2.42

2.8.4. O grinda dreaptă rezemată în punctele (1) şi (2) are forma, dimensiunile şi încărcarea din figura 2.43, unde $a=0,8m$ şi $F=10kN$. Se cere
a. să se determine cotele x astfel încât eforturile încovoietoare din reazemul (1) şi secțiunea (B) să fie egale în valoare absolută;
b. să se traseze diagramele de eforturi tăietoare şi încovoietoare pentru $x=3m$.
(Concursul de Rezistența materialelor, Bucureşti 2001).

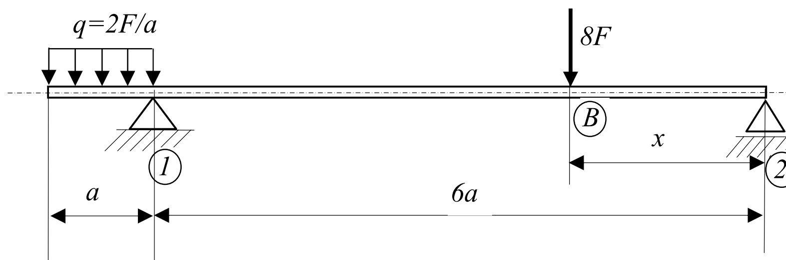


Fig. 2.43

2.8.5. O bară de secţiune circulară având diametrul *d* este încastrată la un capăt şi încărcată ca în figura 2.44, unde *d=60 mm* şi *F=2kN.* Se cere să se traseze diagramele de eforturi axiale, tăietoare, încovoietoare şi de răsucire.
(Concursul de Rezistenţa materialelor, Bucureşti 2000).

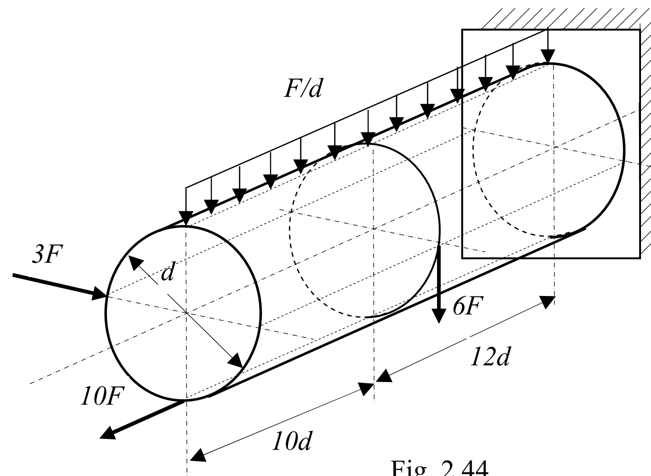


Fig. 2.44

2.8.6. Se dă grinda spaţială cotită având toate unghiurile dintre tronsoane drepte, alcătuită din trei bare omogene, de secţiune inelară de diametre *D=120mm* şi *d=96mm,* încastrată la un capăt şi încărcată ca în figura 2.45, unde *a=0,5m* şi *q=20kN/m*. Se cere să se traseze diagramele de eforturi axiale, tăietoare, încovoietoare şi de răsucire.
(Concursul de Rezistenţa materialelor, Ploieşti 1988).

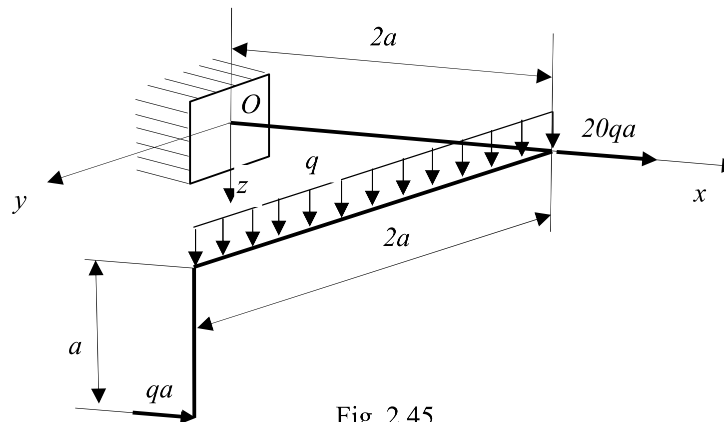


Fig. 2.45

2.8.7. Se dă grinda spaţială cotită având unghiurile dintre tronsoane drepte, formată din cinci bare de secţiune circulară cu diametrul *d,* care este încastrată la un capăt şi încărcată ca în figura 2.46, unde *P=2kN, a=10d*. Să se traseze diagramele de eforturi axiale, tăietoare, încovoietoare şi de răsucire . *(Concursul de Rezistenţa materialelor, Cluj-Napoca 1987).*

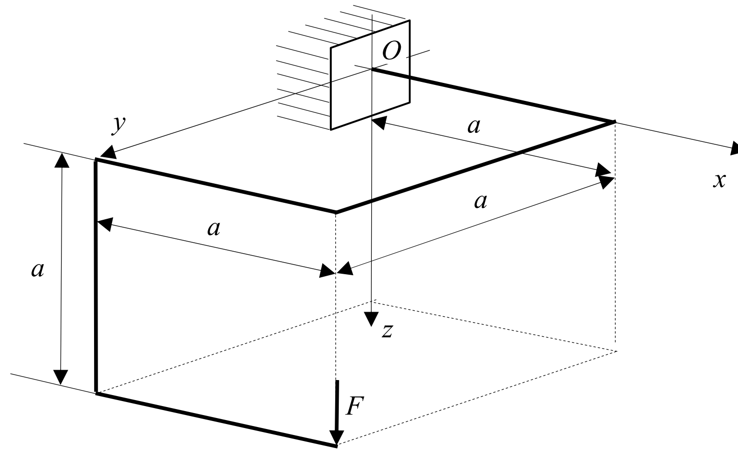


Fig. 2.46

2.8.8. Se dă bara spaţială cotită cu toate unghiurile dintre tronsoane drepte, alcătuită din trei bare de secţiune circulară de diametru *d,* care este încastrată la un capăt şi încărcată ca în figura 2.47 cu forţa *P=20kN/m;* se dă: *a=10d*. Să se traseze diagramele de eforturi axiale, tăietoare, încovoietoare şi de răsucire. *(Concursul Naţional de Rezistenţa materialelor "C.C.Teodorescu", profil mecanic, Bucureşti 2002).*

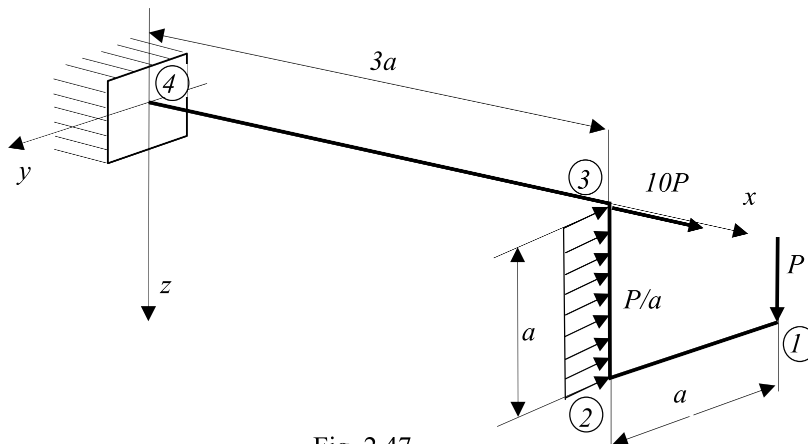


Fig. 2.47

2.8.9. Se dă bara spațială cotită cu toate unghiurile dintre tronsoane drepte, alcătuită din trei bare de secțiune circulară cu diametrul *d,* care este încastrată la un capăt şi încărcată ca în figura 2.48, unde *q=10kN/m, a=1m.*. Să se traseze diagramele de eforturi axiale, tăietoare, încovoietoare şi de răsucire. *(Concursul de Rezistența materialelor, Cluj-Napoca 1988).*

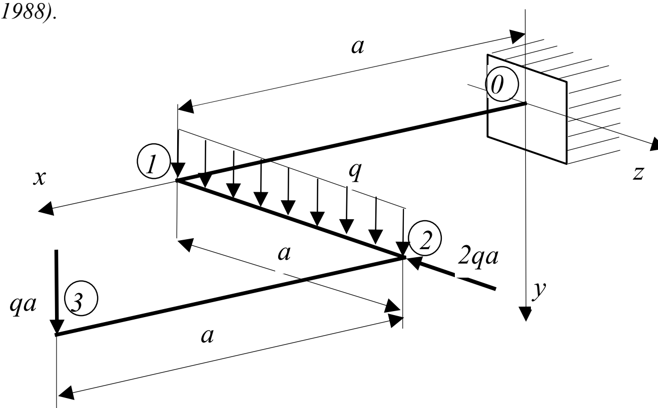


Fig. 2.48

2.8.10. Se dă bara spațială cotită având toate unghiurile dintre tronsoane drepte, alcătuită din trei bare de secțiune circulară de diametru *d,* care este încastrată la un capăt, rezemată pe direcție verticală în punctul (2) şi încărcată ca în figura 2.49, unde *q=1kN/m, a=0,2m.* Să se traseze diagramele de eforturi axiale, tăietoare, încovoietoare şi de răsucire . *(Concursul de Rezistența materialelor, Cluj-Napoca 1991).*

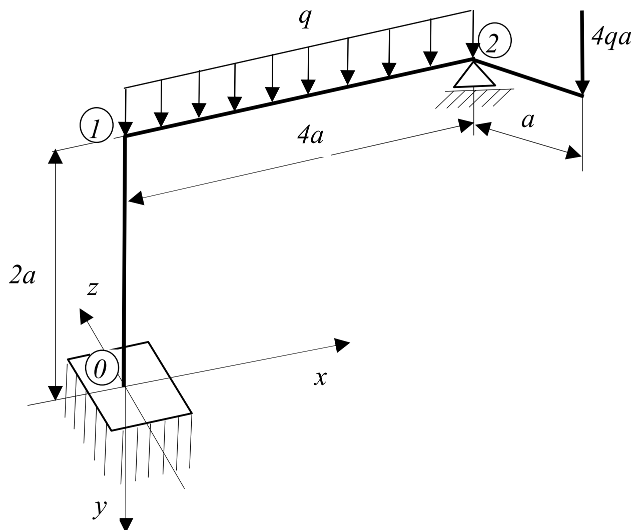


Fig. 2.49

3

ÎNTINDEREA ŞI COMPRESIUNEA BARELOR DREPTE

3.1. Introducere

O bară dreaptă supusă acțiunii unor forțe axiale este solicitată la întindere sau compresiune: dacă eforturile axiale într-o secțiune a sa sunt pozitive, bara este supusă la *întindere* (fig.3.1.a), iar dacă sunt negative este supusă la *compresiune* (fig.3.1.b).

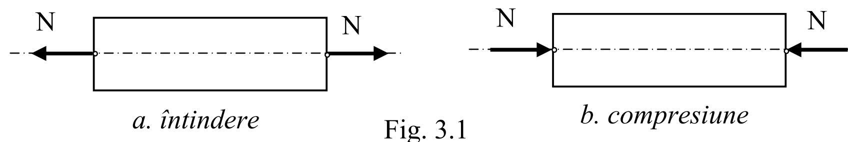


Fig. 3.1

Pentru a trasa digramele de eforturi axiale se parcurge bara de la stânga la dreapta aplicând convenția de semne pentru fața *negativă* sau de la dreapta la stânga aplicând convenția corespunzătoare feței *pozitive.*

În cazul barei din figura 3.2.a încărcată cu forțele axiale *P, 2P, 3P* şi *4P,* diagrama de eforturi axiale *N* este reprezentată în figura 3.2.b.

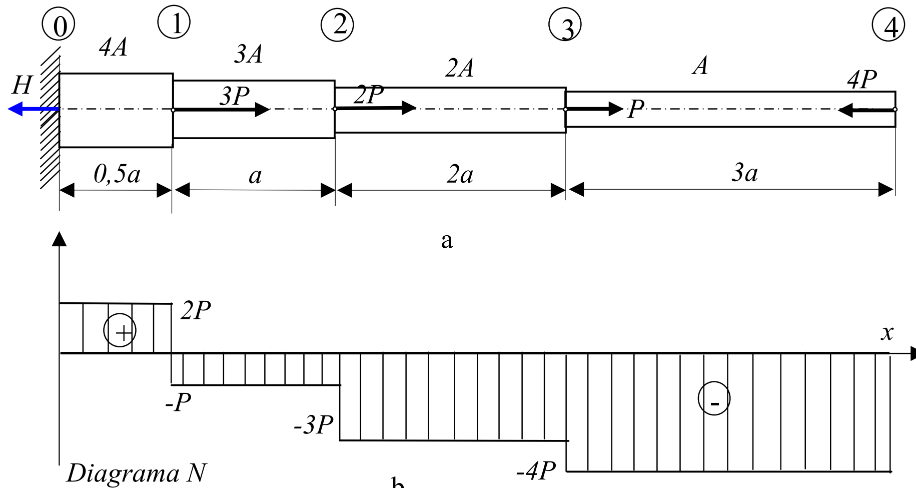


Fig.3.2

Pe tronsonul (0-1) efortul axial este pozitiv (*N>0),* deci bara este solicitată la *întindere,* iar pe celelalte tronsoane eforturile axiale sunt negative (*N<0)* deci bara este solicitată la *compresiune.*

3.2. Tensiuni normale la întindere-compresiune

Se consideră o bară dreaptă solicitată la întindere sau compresiune şi un element de lungime *dx* din această bară, aflat la distanța *x* de capătul ei (fig. 3.3.a).

Dacă se admite valabilă legea lui *HOOKE* şi se aplică principiul suprapunerii efectelor, sub acțiunea sarcinilor exterioare, toate fibrele elementului de lungime *dx* suferă deformația *Δ(dx)* (fig. 3.3.a).

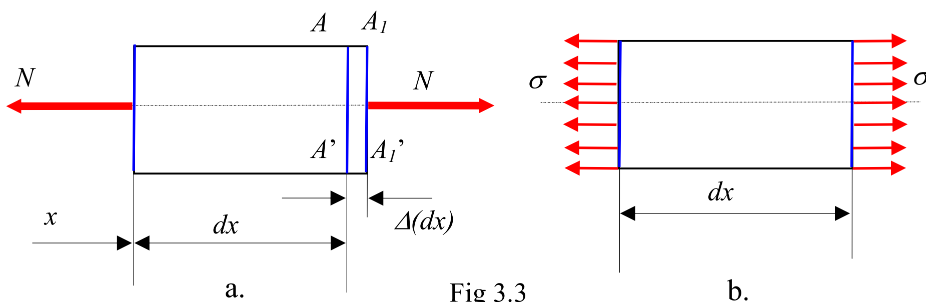


Fig 3.3

Conform legii lui *HOOKE* între tensiunile normale σ de pe suprafața secțiunii şi deformațiile specifice ε ale fibrelor corespunzătoare există o relație liniară:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \tag{3.1}$$

Ținând seama de faptul că deformațiile specifice ε sunt constante pentru toate fibrele elementului, rezultă că tensiunile normale σ *sunt constante* pe suprafata secțiunii (fig. 3.3.b):

$$\sigma = constant \tag{3.2}$$

Forța elementară corespunzătoare tensiunii normale σ într-un punct oarecare al secțiunii are expresia:

$$dN = \sigma\, dA \tag{3.3}$$

Conform teoremei de echivalență a tensiunilor, efortul axial N se scrie:

$$N = \int_A \sigma dA = \sigma \cdot A \tag{3.4}$$

Relația (3.4) dintre tensiunea normală şi efortul axial stă la baza calculelor de rezistență pentru solicitarea de întindere-compresiune şi se mai scrie:

$$\sigma = \frac{N}{A} \tag{3.5}$$

Pentru cele trei tipuri de calcule de rezistență relația (3.5) devine:

- pentru calcule de verificare: $\sigma_{max} = \frac{N}{A} \leq \sigma_a$ (3.6)

unde N este efortul axial maxim iar σ_a este rezistența admisibilă a materialului;

- pentru calcule de dimensionare: $A_{nec} = \frac{N}{\sigma_a}$ (3.7)

unde: N este efortul axial maxim , A_{nec} aria necesară a secțiunii periculoase;

- pentru calculul sarcinii capabile:

$$N_{max} = \sigma_a A \tag{3.8}$$

Pentru exemplul din figura 3.2 valorile eforturilor axiale, ariile secțiunilor şi tensiunile corespunzătoare pentru fiecare tronson sunt prezentate în tabelul 3.1.

Tabelul 3.1

Tronsonul	0-1	1-2	2-3	3-4
Efortul N	*2P*	*-P*	*-3P*	*-4P*
Aria secțiunii	*4A*	*3A*	*2A*	*A*
Tensiunea σ	*P/2A*	*-P/3A*	*-3P/2A*	*-4P/A*
Tipul de solicitare	*întindere*	*compresiune*	*compresiune*	*compresiune*

Valoarea maximă a tensiunii corespunde tronsonului 3-4:

$$\sigma_{max} = \left| -4P/A \right| = 4P/A \tag{3.9}$$

Cele trei tipuri de calcule de de rezistență devin:

- calculul de verificare: $$\frac{4P}{A} \le \sigma_a \tag{3.10}$$
- calculul de dimensionare al ariei necesare: $$A_{nec} = \frac{4P}{\sigma_a} \tag{3.11}$$
- calculul sarcinii capabile: $$P_{max} = \frac{\sigma_a A}{4} \tag{3.12}$$

3.3. Deformații şi deplasări

Sub acțiunea forțelor axiale F_1 şi F_2 bara dreaptă din figura 3.4 este solicitată la întindere şi suferă deformații longitudinale ΔL şi deformații transversale $-\Delta d$ (fig.3.4).

Un element de lungime dx suferă de asemenea deformația longitudinală $\Delta(dx)$ şi transversală Δd.

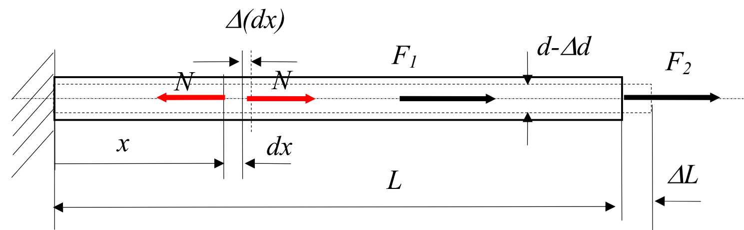


Fig. 3.4

Deformația $\Delta(dx)$ a elementului de lungime dx se scrie în funcție de deformația specifică ε astfel:

$$\Delta(dx) = \varepsilon \cdot dx \tag{3.13}$$

Ținând seama de legea lui Hooke $\varepsilon = \sigma / E$ şi de relația (3.5) deformația longitudinală $\Delta(dx)$ se scrie:

$$\Delta(dx) = \frac{N \cdot dx}{EA} \tag{3.14}$$

Deformația totală a barei ΔL se obține cu ajutorul integralei:

$$\Delta L = \int_{\ell} \Delta(dx) \quad \Rightarrow \quad \Delta L = \int_{\ell} \frac{Ndx}{EA} \tag{3.15}$$

unde: N este efortul axial pe lungimea barei;
E modulul de elasticitate longitudinal al materialului;
A aria secțiunii barei;
EA rigiditatea la întindere-compresiune a barei.

Pentru exemplul din figura 3.2, efortul axial și aria fiecărui tronson sunt constante, astfel încât deformația totală se obține cu ajutorul relației:

$$\Delta \ell = \sum_{i=1}^{4} \frac{N_i \cdot \ell_i}{EA_i} \tag{3.16}$$

În tabelul 3.2 sunt date expresiile deformațiilor fiecărui tronson și ale deformației totale.

Tabelul 3.2

Tronson	0-1	1-2	2-3	3-4
Efortul N	*2P*	*-P*	*-3P*	*-4P*
Rigiditatea	*4EA*	*3EA*	*2EA*	*EA*
Deformația	*Pa/4EA*	*-Pa/3EA*	*-3Pa/EA*	*-12Pa/EA*
Deformația totală	$-\frac{181Pa}{12EA}$			

Se observă că deformațiile pe cele trei tronsoane (1-2), (2-3) și (3-4) sunt negative și corespund unor tensiuni negative iar deformația corespunzătoare tronsonului (0-1) este pozitivă și corespunde unei tensiuni pozitive.

Deplasarea axială a unei secțiuni a barei depinde de legăturile ei cu mediul fix și de deformațiile care iau naștere sub acțiunea sarcinilor exterioare. Deplasările secțiunilor 1, 2, 3 și 4 sunt date în tabelul 3.3

Tabelul 3.3

Secțiunea	1	2	3	4
Deformația	*Pa/4EA*	*-Pa/12EA*	*-37Pa/12EA*	*-181Pa/12EA*

3.4. Energia potențială de deformație elastică

Se consideră o bară dreaptă de secțiune constantă fixată la un capăt și solicitată la celălalt de o forță axială F care se aplică progresiv, a cărei valore crește de la 0 la P (fig. 3.5.a). Bara suferă deformații *liniare* progresive ce cresc de la zero la valoarea maximă $\Delta\ell$. În figura 3.5.b este prezentată diagrama de variație $F(u)$.

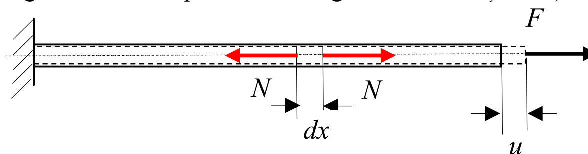


Fig 3.5 a.

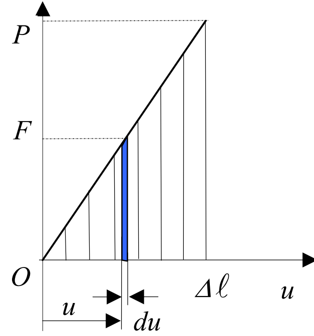


Fig 3.5 b

Lucrul mecanic total al forței progresive *F* pe deplasarea totală $\Delta\ell$ se scrie:

$$L = \int_0^{\Delta\ell} F du \qquad (3.17)$$

Dacă se admite o variație liniară de la *0* la *P* a forței progresive *F* (fig.3.5.b) de forma:

$$F(u) = \frac{P}{\Delta\ell} \cdot u \qquad (3.18)$$

lucrul mecanic total al forței progresive *F* pe deplasarea totală $\Delta\ell$ este:

$$L = \int_0^{\Delta\ell} F du = \frac{P}{\Delta\ell} \int_0^{\Delta\ell} u du = \frac{P\Delta\ell}{2} \qquad (3.19)$$

Din figura 3.5.b. rezultă că lucrul mecanic total al forței progresive *F* este aria suprafeței mărginită de diagrama de variație *F(u)*, axa *Ou* şi verticala $u = \Delta\ell$.

Dacă în locul barei de lungime ℓ se consideră elementul de bară de lungime *dx,* iar în locul forței *P* se consideră efortul axial *N,* atunci lucrul mecanic elementar corespunzător efortului axial *N* pe deplasarea totală *Δ(dx)* se scrie:

$$dL = \int_0^{\Delta(dx)} F du = \frac{N\Delta(dx)}{2} \qquad (3.20)$$

Ținând seama de expresia deformației *Δ(dx)* (3.14), lucrul mecanic elementar total (3.20) devine :

$$dL = \frac{N^2 dx}{2EA} \qquad (3.21)$$

Lucrul mecanic total al forțelor axiale pentru o bară dreaptă de rigiditate la întindere sau compresiune *EA* se scrie cu ajutorul integralei:

$$L = \int_0^{\ell} \frac{N^2}{2EA} dx \qquad (3.22)$$

Se face ipoteza că *lucrul mecanic total al forțelor axiale se transformă integral în energie potențială de deformație elastică*. Relația pentru calculul energiei potențiale de deformație elastică la întindere-compresiune este:

$$U = \int_0^{\ell} \frac{N^2 dx}{2EA} \qquad (3.23)$$

Energia potențială specifică U_1 este raportul dintre energia potențială de deformație elastică corespunzătoare elementului de bară *dU* şi volumul elementar *dV=Adx*:

$$U_1 = \frac{dU}{dV}; \qquad U = \frac{N^2}{2EA^2} \qquad (3.24)$$

Sau ținând seama de relațiile tensiunii σ şi deformație specifice ε:

$$U_1 = \frac{1}{2E}\sigma^2; \quad U_1 = \frac{1}{2}\sigma \cdot \varepsilon; \quad U_1 = \frac{E}{2}\varepsilon^2 \qquad (3.25)$$

Pentru exemplul din figura 3.2 energia potențială de deformație elastică totală se calculează conform relației (3.23):

$$U = \int_0^{\ell} \frac{N^2}{2EA} dx = \frac{4P^2 \cdot 0{,}5a}{2E \cdot 4A} + \frac{P^2 \cdot a}{2E \cdot 3A} + \frac{9P^2 \cdot 2a}{2E \cdot 2A} + \frac{16P^2 \cdot 3a}{2E \cdot A} = \frac{347}{12}\frac{P^2 a}{EA} \qquad (3.26)$$

3.5. Probleme static nedeterminate de întindere-compresiune

3.5.1. Dilatarea împiedicată fără joc

Se consideră o bară de lungime *L* şi secțiune constantă fixată între doi pereți rigizi (fig.3.5.a). Bara este încălzită uniform astfel încât temperatura ei creşte de la t_0 la t_1. Să se determine forța axială care ia naştere în bară datorită fenomenului de *dilatare termică împiedicată*. Se cunosc modulul de elasticitate *E* şi coeficientul de dilatare termică α pentru materialul barei.

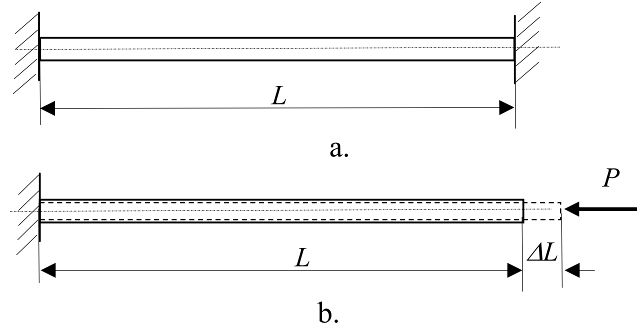


Fig 3.5

Dilatarea împiedicată poate fi studiată ca fiind formată din două faze:

- o primă fază în care bara se dilată liber datorită încălzirii cu Δt căpătând deformația: $$\Delta L = \alpha L \cdot \Delta t \qquad (3.27)$$
- a doua fază în care bara este comprimată axial cu forța *P* obținându-se deformația ΔL (fig.3.5.b).

Conform relației (3.15), sub acțiunea forței *P* bara se deformează cu :

$$\Delta L = \frac{PL}{EA} \qquad (3.28)$$

Egalând cele două expresii (3.27) şi (3.28) se obține forța *P* care ia naştere la dilatarea împiedicată:

$$P = EA \cdot \alpha \cdot \Delta t \qquad (3.29)$$

Se observă că forța axială obținută la dilatarea împiedicată nu depinde de lungimea barei, ci numai de rigiditatea la compresiune *EA*, coeficientul de dilatare termică α şi diferența de temperatură ($\Delta t = t_1 - t_0$).

3.5.2. Dilatarea împiedicată cu joc

Se consideră aceeaşi problemă a dilatării împiedicate cu diferența existenței unui joc δ între capătul liber al barei şi peretele rigid (fig.3.6.a).

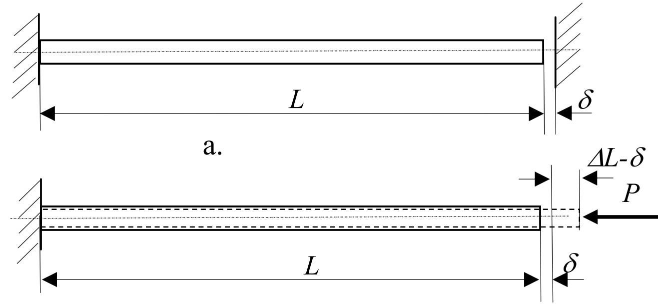


Fig 3.6

Se utilizează acelaşi raționament ca în cazul precedent:

- în prima fază bara se dilată cu valoarea:

$$\Delta L = \alpha L \cdot \Delta t\,; \tag{3.30}$$

- a doua fază bara se comprimă axial cu cu o forță axială P obținându-se deformația $\Delta L - \delta$ (fig.3.6.b):

$$\Delta L - \delta = \frac{PL}{EA} \tag{3.31}$$

Înlocuind expresia (3.30) lui ΔL în (3.31) se obține forța P care ia naştere la dilatarea împiedicată:

$$P = EA\left[\alpha\Delta t - \frac{\delta}{L}\right] \tag{3.32}$$

Conform relației (3.32) dacă $\delta > \alpha L \cdot \Delta t$ rezultă forțe axiela $P<0$ în bară, ceea ce nu este posibil, deoarece în acest caz dilatarea barei este liberă şi $P=0$.

3.5.3. Bara articulată la capete

Se consideră o bară dreaptă de lungime L şi secțiune constantă A articulată la capete şi solicitată de o forță axială P ce acționează într-o secțiune situată la distanța a față de capătul din stânga, ca în figura 3.7. Se cer reacțiunile H_1 şi H_2 .

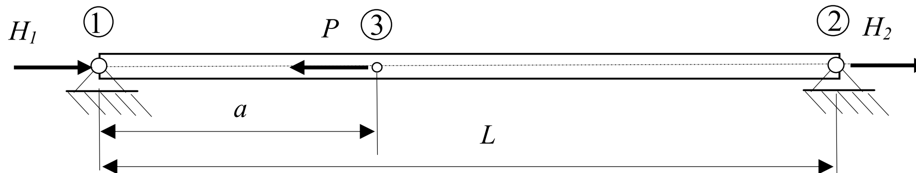


Fig 3.7

Aceasta este o problemă static nedeterminată întru-cât numărul de necunoscute (2) este mai mare decât numărul de ecuații de echilibru independente care se pot scrie (1). Se poate scrie o singură ecuație de echilibru:

$$H_1 + H_2 - P = 0 \tag{3.33}$$

Cea de-a doua ecuație se obține din condiția de deformații:

$$\Delta L = \int_{\ell_1} \frac{N_{13}dx}{EA} + \int_{\ell_2} \frac{N_{32}dx}{EA} = 0 \tag{3.34}$$

Eforturile axiale N_{13} şi N_{32} pentru cele două tronsoane (fig.3.7) sunt:

$$N_{13} = -H_1; \quad N_{32} = -H_1 + P \tag{3.35}$$

Înlocuind în relația (3.34) se obține:

$$-\frac{H_1}{EA}\cdot a + \frac{-H_1 + P}{EA}\cdot(L-a) = 0 \tag{3.36}$$

Rezolvând sistemul (3.33) şi (3.36) se obțin expresiile reacțiunilor H_1 şi H_2:

$$H_1 = P\left(1-\frac{a}{L}\right); \qquad H_2 = P\cdot\frac{a}{L} \tag{3.37}$$

3.5.4. Bare neomogene montate cu joc

Se consideră trei bare neomogene (un ax şi două bucşe coaxiale) montate cu joc între două plăci rigide. Barele au aceeaşi dimensiune nominală L : axul din oțel are lungimea $L+\delta_1$, bucşa din aluminiu lungimea L şi bucşa din cupru lungimea $L-\delta_2$. Cele trei bare sunt solicitate la compresiune cu o forță axială P astfel încât ele se comprimă ajungând în final la aceeaşi lungime (fig. 3.8). Să se determine valorile eforturilor axiale preluate de fiecare din cele trei bare .

Pentru a rezolva această problemă se notează cu N_1, N_2 şi respectiv N_3 eforturile axiale care iau naştere în cele trei bare (fig. 3.9) şi se scriu ecuațiile de echilibru şi deformații.

Ecuația de echilibru a forțelor se scrie:

$$N_1 + N_2 + N_3 - P = 0 \tag{3.38}$$

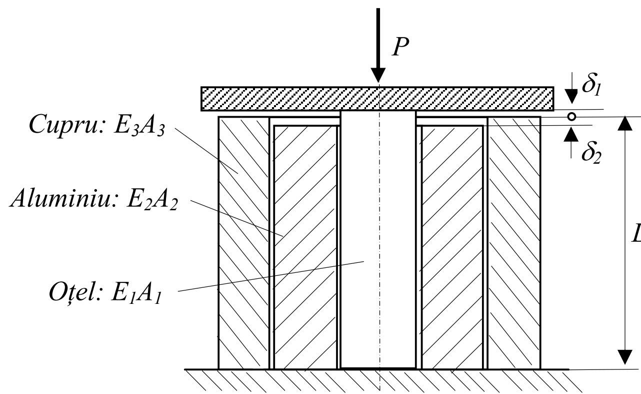


Fig 3.8

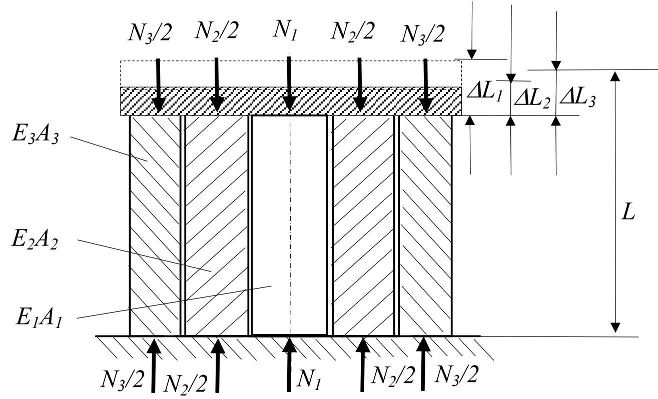


Fig 3.9

Ecuațiile de deformații pentru cele trei bare sunt:

$$\Delta L_1 = \Delta L_3 + \delta_1; \qquad \Delta L_2 = \Delta L_3 - \delta_2 \tag{3.39}$$

Deformațiile celor trei bare se exprimă în funcție de eforturile N_1, N_2, și N_3:

$$\Delta L_1 = \frac{N_1(L+\delta_1)}{E_1A_1}; \qquad \Delta L_2 = \frac{N_2(L-\delta_2)}{E_2A_2}; \qquad \Delta L_3 = \frac{N_3L}{E_3A_3} \tag{3.40}$$

Introducând aceste relații în ecuațiile (3.39) se obține sistemul:

$$\begin{aligned} &N_1 + N_2 + N_3 = P \\ &\frac{N_1(L+\delta_1)}{E_1A_1} = \frac{N_3L}{E_3A_3} + \delta_1 \\ &\frac{N_2(L-\delta_2)}{E_2A_2} = \frac{N_3L}{E_3A_3} - \delta_2 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Dacă se neglijează valorile jocurilor δ_1 și δ_2 în raport cu lungimea L se obține:

$$\begin{aligned} &N_1 + N_2 + N_3 = P \\ &\frac{N_1}{E_1A_1} = \frac{N_3}{E_3A_3} + \frac{\delta_1}{L} \\ &\frac{N_2}{E_2A_2} = \frac{N_3}{E_3A_3} - \frac{\delta_2}{L} \end{aligned} \tag{3.42}$$

Rezolvând sistemul (3.42) se obține:

$$\begin{aligned} &N_1 = \frac{\dfrac{P}{E_3A_3} + \dfrac{E_2A_2}{E_3A_3}\cdot\dfrac{\delta_1+\delta_2}{L} + \dfrac{\delta_1}{L}}{\dfrac{E_1A_1 + E_2A_2 + E_3A_3}{E_1A_1\cdot E_3A_3}}; \\ &N_2 = \frac{E_2A_2}{E_3A_3}N_1 - \frac{1}{E_3A_3}\frac{\delta_1+\delta_2}{L}; \qquad N_3 = P - N_1 - N_2 \end{aligned} \tag{3.43}$$

3.5.5. Sistem static nedeterminat plan format din bare paralele

Se consideră un sistem static nedeterminat plan format din patru bare paralele având aceeaşi lungime L şi rigidităţile la întindere-compresiune date (E_1A_1, E_2A_2, E_3A_3, respectiv E_4A_4). Cele patru bare paralele sunt situate între ele la distanţa a şi fixate la un capăt de mediul fix iar la celălalt de o bară rigidă OA de lungime $5a$ (fig. 3.10). Bara OA este fixată la un capăt de mediul fix printr-o articulaţie iar la celălalt capăt este solicitată de o forţă P. Să se determine eforturile axiale din cele patru bare.

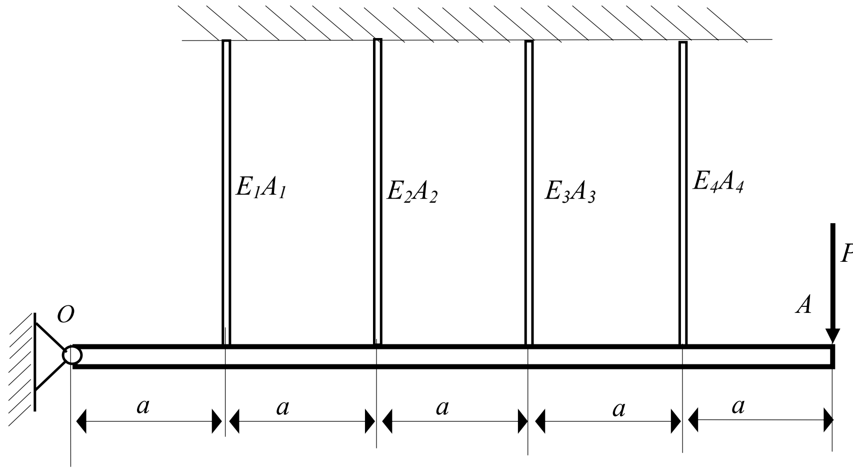


Fig.3.10

Se aplică axioma legăturilor, izolând bara rigidă OA şi introducând forţele de legătură din articulaţie V_0, H_0 şi cele patru forţe N_1, N_2, N_3 şi N_4 în punctele de legătură cu barele verticale, ca în figura 3.11.

Cele şase ecuaţii se scriu astfel:

- trei ecuaţii de echilibru a forţelor şi momentelor:

$$\begin{aligned} &H_0 = 0 \\ &V_0 + N_1 + N_2 + N_3 + N_4 - P = 0 \\ &N_1 \cdot a + N_2 \cdot 2a + N_3 \cdot 3a + N_4 \cdot 4a - P \cdot 5a = 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

- trei ecuaţii de deformaţii ale celor patru bare se scriu ţinând seama de asemănarea triunghiurilor deformaţiilor aşa cum rezultă din figura 3.11:

$$\frac{\Delta L_1}{a} = \frac{\Delta L_2}{2a} = \frac{\Delta L_3}{3a} = \frac{\Delta L_4}{4a} \tag{3.45}$$

Deformaţiile celor patru bare se scriu în funcţie de eforturile N_1, N_2, N_3 şi N_4:

$$\begin{aligned} &\Delta L_1 = \frac{N_1 L}{E_1 A_1}; \qquad \Delta L_2 = \frac{N_2 L}{E_2 A_2}; \\ &\Delta L_3 = \frac{N_3 L}{E_3 A_3}; \qquad \Delta L_4 = \frac{N_4 L}{E_2 A_2}. \end{aligned} \tag{3.46}$$

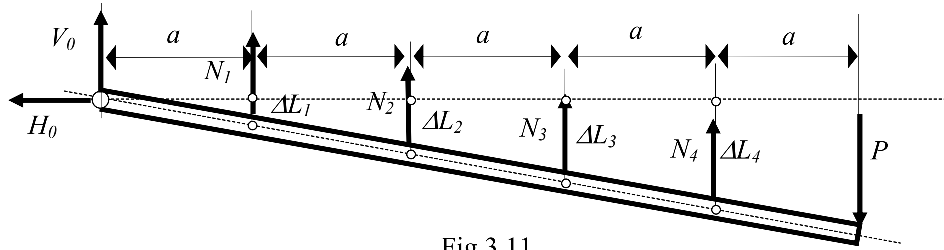


Fig.3.11

Înlocuind aceste deformații în relațiile (3.39) se obține:

$$\frac{N_1}{E_1A_1}=\frac{N_2}{2E_2A_2}=\frac{N_3}{3E_3A_3}=\frac{N_4}{4E_2A_2} \tag{3.47}$$

Eliminând prima ecuație (3.44) rezultă un sistem de cinci ecuații cu cinci necunoscute: reacțiunea V_0 și eforturile axiale din barele paralele N_1, N_2, N_3 și N_4.

Sub formă matriceală sistemul de ecuații se poate scrie astfel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{E_1A_1} & -\frac{1}{2E_2A_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2E_2A_2} & -\frac{1}{3E_3A_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3E_3A_3} & -\frac{1}{4E_4A_4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_0 \\ N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ 5P \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.48}$$

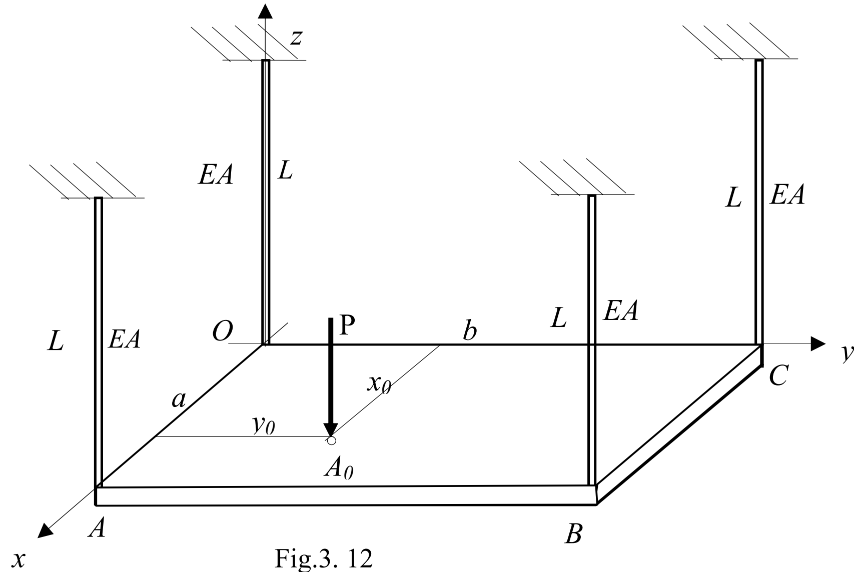


Fig.3. 12

3.5.6. Sistem static nedeterminat spațial format din bare paralele

Se consideră un sistem format din patru bare paralele având aceeaşi lungime L şi rigiditate la întindere EA, fixate la unul din capete de un perete fix iar la celălalt în vârfurile unei plăci dreptunghiulare rigide având dimensiunile $a \times b$ ca în figura 3.12. Într-un punct A_0 de coordonate x_0 şi y_0 față de un sistem de referință $Oxyz$, acționează o forță perpendiculară pe placă P. Să se determine eforturile axiale din cele patru bare.

Dacă se aplică axioma legăturilor se introduc forțele de legătură N_1, N_2, N_3 şi N_4 în puncte de legătură ale plăcii cu barele verticale, ca în figura 3.13.

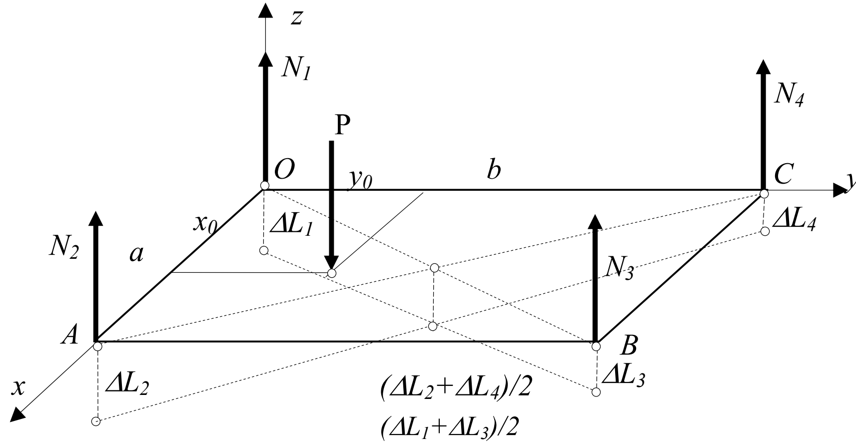


Fig. 3. 13

Se pot scrie următoarele ecuații:

- trei ecuații de echilibru din Mecanică:

$$\sum F_z = 0: \; N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = P$$
$$\sum M_{Ox} = 0: \; N_3 \cdot b + N_4 \cdot b = Py_0 \qquad (3.49)$$
$$\sum M_{Oy} = 0: \; N_2 \cdot a + N_3 \cdot a = Px_0$$

- o ecuație din condiția de deformații ale barelor, ținând seama de ipoteza că placa este rigidă (nu se deplanează sub acțiunea forței P) se poate scrie o relație geometrică între deformațiile celor patru bare care rezultă din egalitatea liniilor mijlocii ale celor două trapeze având a baze deformațiile ΔL_1, ΔL_3 respectiv ΔL_2 , ΔL_4 (fig.3.13):

$$\frac{\Delta L_1 + \Delta L_3}{2} = \frac{\Delta L_2 + \Delta L_4}{2} \qquad (3.50)$$

Deformațiile celor patru bare se exprimă în funcție de eforturile N_1, N_2, N_3 şi N_4:

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L}{EA}; \qquad \Delta L_2 = \frac{N_2 L}{EA};$$
$$\Delta L_3 = \frac{N_3 L}{EA}; \qquad \Delta L_4 = \frac{N_4 L}{EA}. \qquad (3.51)$$

Ținând seama de relațiile (3.51) relația (3.50) devine:

$$N_1 + N_3 = N_2 + N_4 \quad (3.52)$$

Rezultă un sistem de patru ecuații cu patru necunoscute: eforturile axiale din cele 4 bare. Rezolvând acest sistem se obține:

$$N_1 = P\left(\frac{3}{4} - \frac{x_0}{2a} - \frac{y_0}{2b}\right); \quad N_2 = P\left(\frac{1}{4} + \frac{x_0}{2a} - \frac{y_0}{2b}\right)$$
$$N_3 = P\left(-\frac{1}{4} + \frac{x_0}{2a} + \frac{y_0}{2b}\right); \quad N_4 = P\left(\frac{1}{4} - \frac{x_0}{2a} + \frac{y_0}{2b}\right) \quad (3.53)$$

Observație:

Rezultatele (3.54) sunt valabile pentru $x_0 \in (0, a), \ y_0 \in (0, b)$, mai puțin punctele din capetele intervalelor. Se poate verifica dacă pentru poziția centrală a forței P ($x_0 = a/2, \ y_0 = b/2$) se obțin valori egale pentru cele patru tensiuni din bare:

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = P/4 \quad (3.54)$$

3.6. Probleme propuse

3.6.1. Se consideră sistemul format dintr-un cadru rigid şi două tije articulate având modulele de elasticitate $E=2\ 10^5$ *MPa şi* ariile A şi $A\sqrt{2}$. Cadrul rigid este încărcat cu o sarcină uniform distribuită $q=20kN/m$ şi are legăturile din figura 3.14, unde $a=0,5m$. Tija a doua este montată forțat de cadrul rigid pe distanța $\delta_0=0,2$ *mm.* Să se calculeze tensiunile din tije după montajul forțat, înainte şi după aplicarea sarcinii uniform distribuite q. *(Concursul Național de Rezistența materialelor "C.C.Teodorescu", profil mecanic, Bucureşti 2002).*

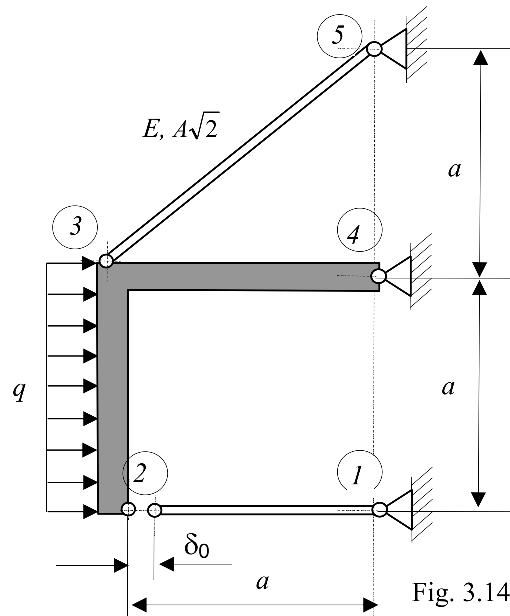


Fig. 3.14

3.6.2. Se dă sistemul format din trei tije articulate având rigiditățile la întindere-compresiune constante $EA=2,1\cdot10^7\ N$. Sistemul este încărcat în nodul A sub un unghi $\alpha=30^0$ cu forța F, ca în figura 3.15. Tija AB este montată forțat pentru a elimina eroarea de execuție $\delta=1\ mm$.
a. Să se determine eforturile din bare ce apar ca urmare a montajului forțat, atunci când nu acționează forța F;
b. se cere valoarea forței F, după montarea forțată a barelor, astfel încât efortul axial din bara AC să fie nul. *(Concursul de Rezistența materialelor Galați, 1986).*

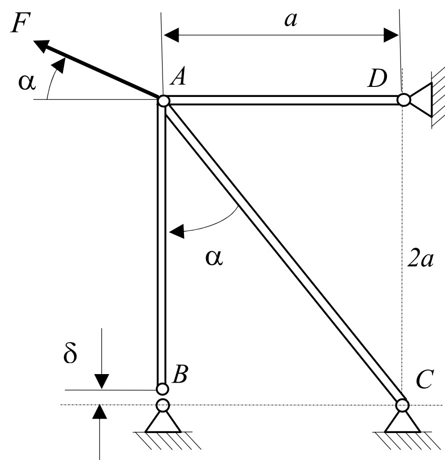


Fig. 3.15

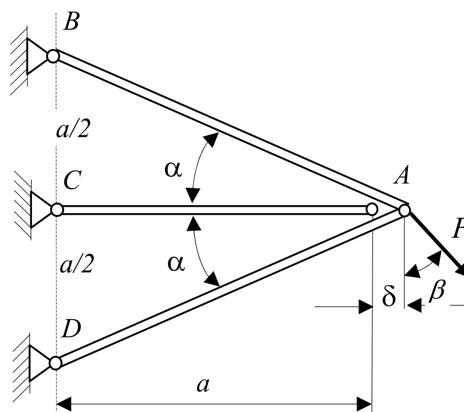


Fig. 3.16

3.6.3. Se dă sistemul format din trei bare articulate având ariile secțiunilor transversale $A_1=A_3=336\ mm^2$, $A_2=420mm^2$ şi modulul de elasticitate $E=2,1\cdot10^5\ N/mm^2$. Sistemul este încărcat în nodul A sub un unghi $\beta=30^0$, cu forța $F=28kN$, ca în figura 3.16. Tija AC este montată forțat pentru eliminarea erorii de execuție $\delta=0,5\ mm$.
a. Să se determine eforturile din bare apărute ca urmare a montajului forțat, atunci când nu acționează forța F;
b. După montarea forțată a barelor, să se determine valoarea forței F astfel încât efortul axial din bara AC să fie nul. *(Concursul de Rezistența materialelor Galați, 1986).*

3.6.4. Se dă sistemul de bare articulate din figura 3.17 având: $E_1=2,1\cdot10^5$ *N/mm*^{2} $A_1=80$ *mm*^{2}, $E_2=0,7\cdot10^5$ *N/mm*^{2} $A_2=180mm^2$ şi $a=0,5$ *m*. Se cere:

1. Să se calculeze tensiunile din bara neomogenă independentă O_2-*3,* produse de o forță axială $F=10kN$;

2. Să se calculeze valoarea forței F pentru care bara neomogenă O_2-*3* se lungeşte cu $\Delta=0,2$ *mm*;

3. Să se determine eforturile şi apoi tensiunile din barele sistemului după realizarea montajului forțat cu cu $\Delta=0,2$ *mm*. *(Concursul de Rezistența materialelor, Ploieşti, 1988).*

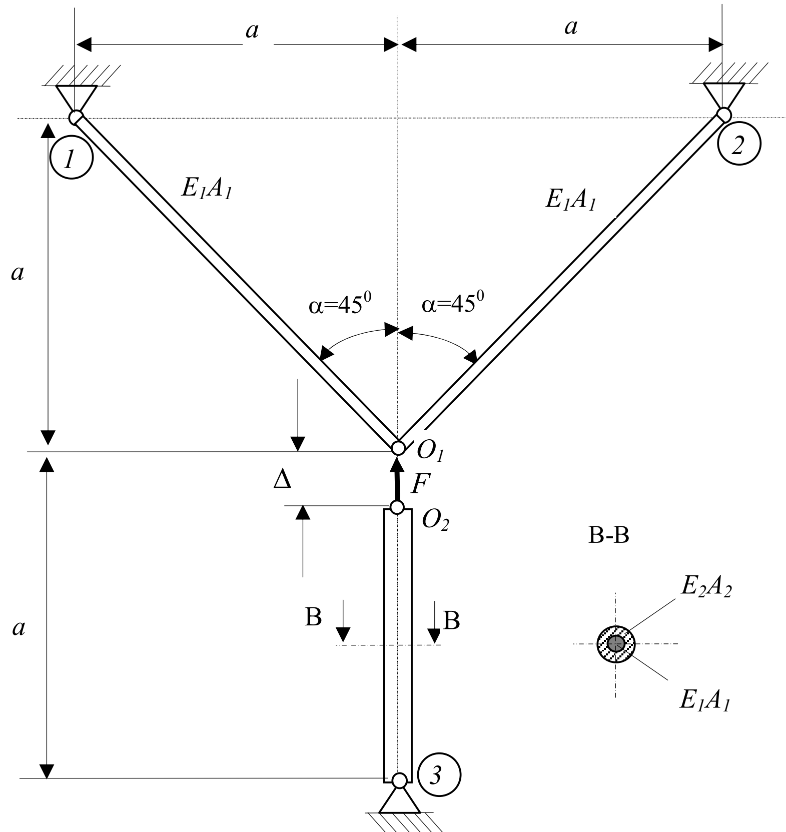


Fig. 3.17

3.6.5. Bara rigidă *OD* este articulată în *O* şi susţinută în *B* şi *C* de doi tiranţi din oţel, ca în figura 3.18. Se cunosc: $a=1m$, $E=2,1\cdot 10^5$ MPa. Se cere:
1. calculul eforturilor din tiranţi pentru $A_2=1,5A_1$;
2. calculul forţei $P_{capabil}$ dacă $A_1= 4\ cm^2$ şi $A_2= 6\ cm^2$, $\sigma_{admisibil}=210\ MPa$;
3. calculul deplasării verticale a capătului liber *D* în cazul în care $A_1= A_2= 6\ cm^2$.
(Concursul Profesional de Rezistenţa Materialelor C.C. TEODORESCU, Târgu-Mureş, mai 2005).

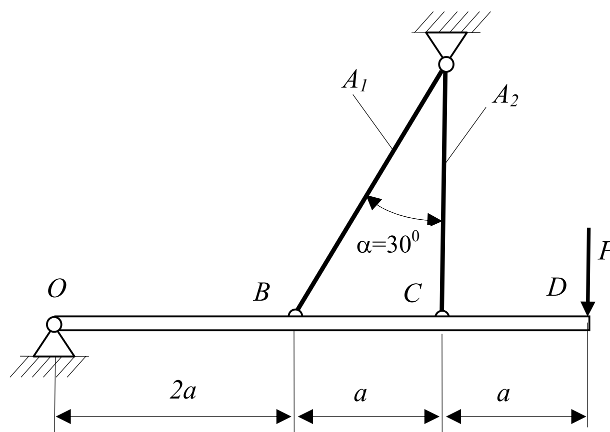


Fig. 3.18

3.6.6. O greutate *G* este suspendată prin intermediul unui fir cu diametrul $d=8\ mm$ ca în figura 3.19. Firul alunecă fără frecare peste scripetele *E*. Să se determine rigiditatea resortului din secţiunea *C* astfel încât greutatea *G* să rămână în contact cu grinda, fără să apese pe aceasta. Grinda infinit rigidă *ABCD* este articulată în *B*. Date numerice: $G=200N$, $\ell = 2m$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 30^0$; $E = 2,1\cdot 10^5\ MPa$. *(Concursul Profesional de Rezistenţa Materialelor C.C. TEODORESCU, UTCB, faza locala, 2003).*

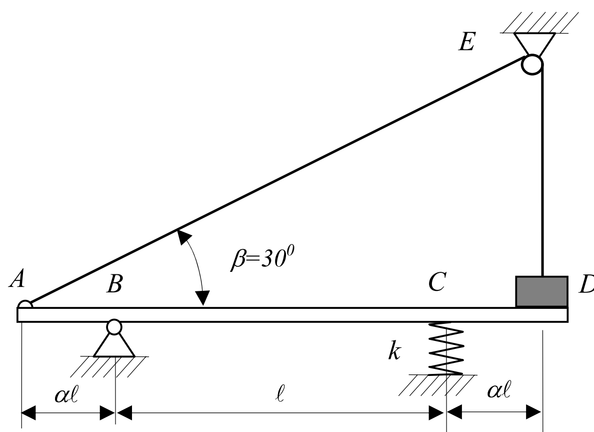


Fig. 3.19

4

TORSIUNEA BARELOR DREPTE

4.1. Introducere

Solicitarea de *torsiune* sau *răsucire* a barelor este specifică unor piese şi organe de maşini cum ar fi: bare de torsiune, arborii cutiilor de viteze, arcurile, etc.

Se consideră un motor electric *ME* de putere *P* ce transmite mişcarea de rotație prin intermediul unui reductor de turație la o maşină de lucru ca în figura 4.1. Reductorul are turația la intrare n_i egală cu turația motorului electric şi turația de ieşire $n_e<n_i$ egală cu turația maşinii de lucru, raportul de transmitere fiind : $i_{12}=\frac{n_i}{n_e}$. Cei doi arbori ai reductorului sunt solicitați la torsiune de cuplurile M_{ti} şi M_{te}.

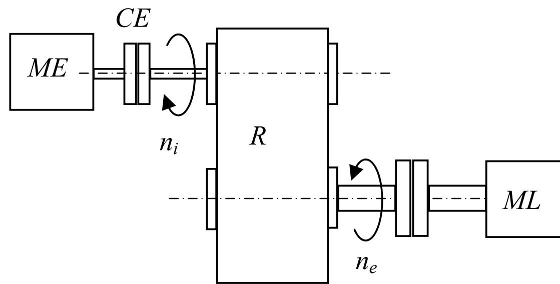


Fig. 4.1

Dacă se neglijează puterea consumată prin frecare în angrenajele şi lagărele reductorului, puterea consumată de maşina de lucru *ML* este egală cu puterea motorului electric *ME*. Relațiile care se pot scrie între cuplul de torsiune al arborelui de intrare M_{ti}, respectiv cuplul de torsiune al arborelui de ieşire M_{te} , turațiile corespunzătoare n_i , n_e şi puterea *P* sunt următoarele:

$$M_{ti}=\frac{P}{2\pi\cdot n_i};$$
$$M_{te}=\frac{P}{2\pi\cdot n_e}. \qquad (4.1)$$

Întru-cât $n_e<n_i$ din relațiile (4.1) rezultă: $M_{te}>M_{ti}$. În Sistemul Internațional de unități de măsură (SI), unitățile pentru mărimile din relația (4.1) sunt :

$$[M_t]_{SI}=Nm; \quad [P]_{SI}=W \text{ sau } Nm/s; \quad [\omega]_{SI}=rot/s; \qquad (4.2)$$

Ținând seama de unitățile de măsură folosite în mod curent şi anume: $[M_t]=Nm$, $[P]=kW$ şi $[n]=rot/min$ relația între cuplul de torsiune , putere şi turație se scrie:

$$M_t=\frac{30000}{\pi}\cdot\frac{P}{n} \qquad (4.3)$$

Pentru a trasa *diagramele de eforturi torsionale* $M_t(x)$ se adoptă aceeaşi convenție de semne pentru eforturile pe fața pozitivă şi negativă a secțiunii. Diagramele de eforturi torsionale în cazul a doi arbori având fiecare câte patru roți dințate, sunt prezentate mai jos:

- pentru un arbore ce primeşte fluxul de putere prin roata dinţată (1) şi îl transmite prin roţile dinţate (2), (3) şi (4), la trei maşini de lucru (fig.4.2) se obţin cuplurile corespunzătoare pentru care este valabilă relaţia:

$$M_{t1} = M_{t2} + M_{t3} + M_{t4}. \qquad (4.4)$$

Diagrama de eforturi torsionale are forma din figura 4.2.

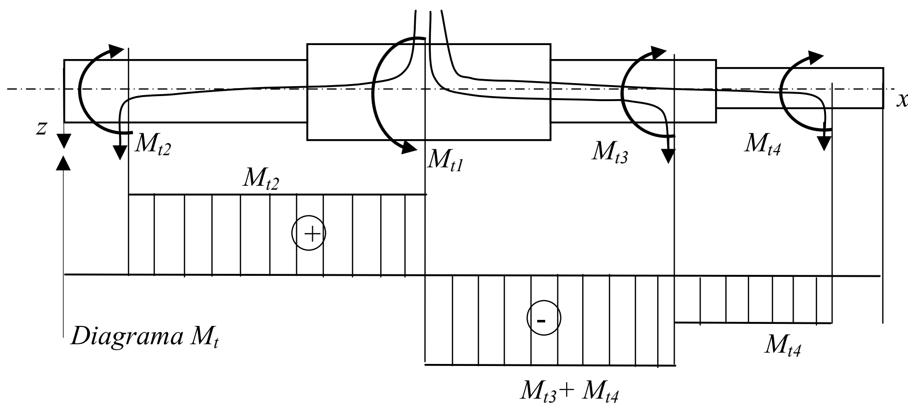


Fig. 4.2

- pentru un arbore ce primeşte fluxul de putere prin roata dinţată (1) şi îl transmite prin roţile dinţate (2), (3) şi (4), la trei maşini de lucru (fig.4.3) se obţin cuplurile corespunzătoare pentru care este valabilă aceeaşi relaţie (4.4), dar diagrama are forma din figura 4.3

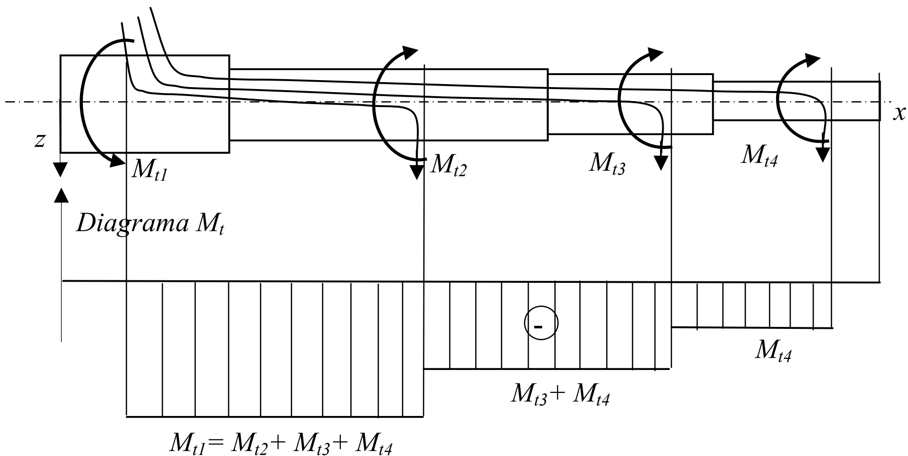


Fig. 4.3

4.2. Torsiunea barelor de secțiune circulară şi inelară

4.2.1 Tensiuni şi deformații

Se consideră o bară dreaptă de secțiune circulară sau inelară de lungime L fixată la un capăt şi încărcată cu un cuplu de torsiune M_{t0} (fig.4.3.a). Pentru studiul tensiunilor şi deformațiilor la răsucire se consideră valabile:

- *ipoteza lui Bernoulli*: o secțiune plană şi normală pe axa barei, după deformare rămâne tot plană şi normală pe axa barei;
- *ipoteza legii lui Hooke*: între tensiunile tangențiale τ şi deformațiile unghiulare γ (lunecarea specifică) există o relație liniară:

$$\tau = G \cdot \gamma \tag{4.5}$$

Dacă se trasează pe suprafața cilindrică exterioară un caroiaj format din cercuri şi generatoare, după deformarea prin torsiune caroiajul devine o rețea de romburi (fig.4.3.a), şi generatoarele se înclină cu unghiul γ față de axa barei. Variația γ a ungiului drept $(\pi/2)$, în radiani, se numeşte *lunecare specifică* (fig. 4.3.b).

Se consideră un element cilindric de lungime dx delimitat de două secțiuni transversale care trec prin O şi O'. Fie două generatoare CD şi AB situate pe suprafațele cilindrilor de raze r respectiv R, paralele cu axa cilindrului (fig. 4.3.c). După deformare, cele două secțiuni paralele se rotesc între ele cu unghiul $d\varphi$, iar generatoarele CD şi AB se rotesc cu unghiurile γ respectiv γ_{max}.

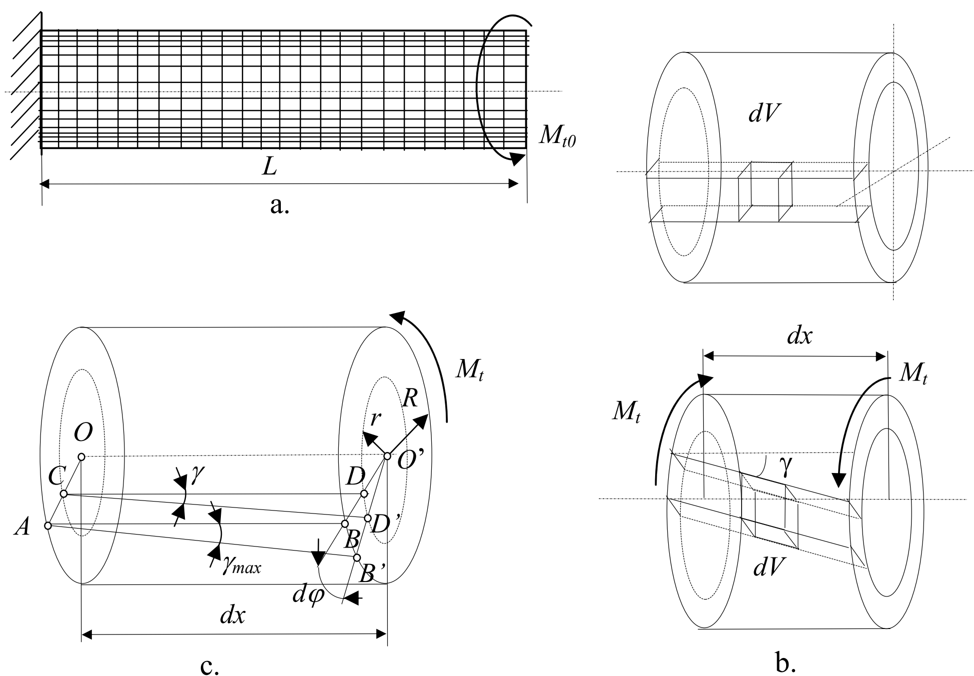


Fig. 4.3

Între unghiul γ (lunecarea specifică) şi rotirea $d\varphi$ se poate scrie relaţia:

$$\gamma \approx tg\gamma = \frac{r \cdot d\varphi}{dx} \Rightarrow \gamma = r \cdot \theta \tag{4.6}$$

în care s-a notat cu $\theta = \frac{d\varphi}{dx}$ *răsucirea specifică.* (4.7)

Ţinând seama de relaţia (4.6), expresia tensiunilor tangenţiale în funcţie de răsucirea specifică θ se scrie:

$$\tau = G \cdot \theta \cdot r \tag{4.8}$$

Efortul torsional M_t într-o secţiune a barei se obţine folosind teorema de echivalenţă a tensiunilor tangenţiale τ prin însumarea momentelor forţelor elementare $dF = \tau\, dA$ corespunzătoare tensiunilor τ, în raport cu axa longitudinală Ox (fig. 4.4):

$$M_t = \int_A r \cdot dF; \quad M_t = G\theta \int_A r^2 dA \tag{4.9}$$

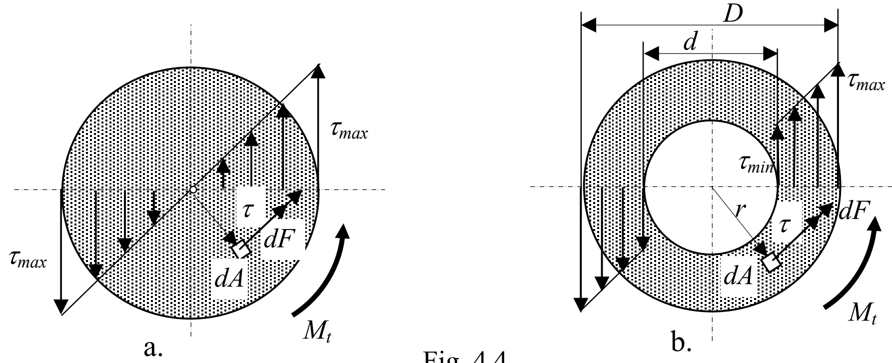


Fig. 4.4

Mărimea $I_p = \int_A r^2 dA$ este *momentul de inerţie polar* al secţiunii.

Se obţine astfel o relaţie liniară între momentul torsional şi răsucirea specifică:

$$M_t = GI_p\theta \tag{4.10}$$

Din relaţia (4.10) rezultă *expresia răsucirii specifice* θ:

$$\theta = \frac{M_t}{GI_p} \tag{4.11}$$

Din relaţia (4.11) se observă că răsucirea specifică θ este invers proporţională cu *rigiditatea la răsucire* a barei GI_p.

Înlocuind în relaţia (4.8) se obţine *expresia tensiunii tangenţiale la răsucirea barelor de secţiune circulară şi inelară*:

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot r \tag{4.12}$$

Se observă din relația (4.12) că tensiunea tangențială τ variază liniar cu raza r, valoarea maximă obținându-se pentru $r=R$:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{I_p} R \quad sau \quad \tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} \tag{4.13}$$

unde W_p este *modulul de rezistență polar:* $W_p = \frac{I_p}{R}$ (4.14)

Pentru o secțiune circulară având diametrul D, momentul de inerție polar I_p şi modulul de rezistență polar W_p se calculează cu ajutorul relațiilor:

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}; \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16} \tag{4.15}$$

Pentru o secțiune inelară de diametru exterior D şi diametru interior d, momentul de inerție I_p şi modulul de rezistență polar W_p se calculează cu ajutorul relațiilor:

$$I_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32}; \quad W_p = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} \tag{4.16}$$

Conform relației (4.11), rotirea specifică $d\varphi$ se scrie:

$$d\varphi = \frac{M_t}{GI_p} \cdot dx \tag{4.17}$$

Integrând pe lungimea barei L se obține *deformația unghiulară totală* sau rotirea relativă a celor două secțiuni situate la capetele barei (fig. 4.3.a):

$$\varphi = \int_L \frac{M_t}{GI_p} \cdot dx \tag{4.18}$$

4.2.2. Energia potențială de deformație elastică

Dacă asupra unei bare de secțiune circulară sau inelară fixată la celălalt se aplică progresiv un cuplu M_{t0} (fig. 4.5.a), bara suferă deformația unghiulară $\Delta\varphi$. Variația liniară a cuplului M_t cu unghiul φ se poate exprima astfel (fig. 4.5.b):

$$M_t(\varphi) = \frac{M_{t0}}{\Delta\varphi} \cdot \varphi \tag{4.19}$$

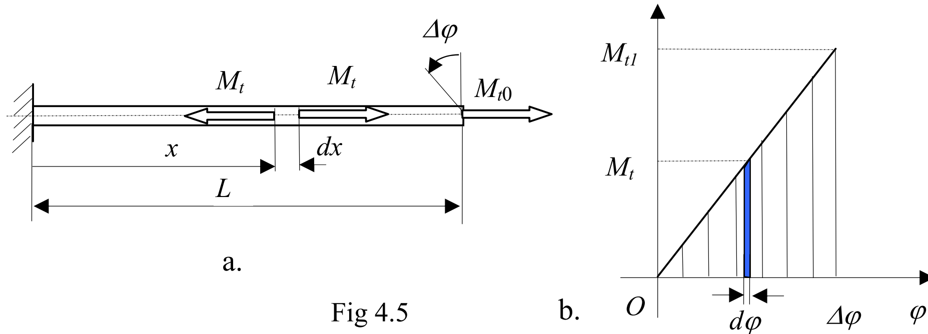


Fig 4.5

Lucrul mecanic total efectuat de cuplul de torsiune M_{t0} pe deformaţia unghiulară $\Delta\varphi$ are expresia:

$$L = \int_0^{\Delta\varphi} M_t(\varphi)d\varphi; \quad L = \frac{M_{t0}\Delta\varphi}{2} \tag{4.20}$$

Pentru un element din bară de lungime dx care suferă deformaţia unghiulară $d\varphi$, lucrul mecanic elementar efectuat de cuplul de torsiune $M_t(x)$ are expresia:

$$dL = M_t \cdot d\varphi / 2 \tag{4.21}$$

Ţinând seama de relaţia (4.17) lucrul mecanic total efectuat de cuplul de torsiune $M_t(x)$ pentru întreaga bară se scrie:

$$L = \int_L \frac{M_t^2}{2GI_p}dx \tag{4.22}$$

Dacă se face ipoteza că lucrul mecanic total se acumulează integral sub formă de *energie potenţială de deformaţie elastică a barei,* atunci aceasta are expresia:

$$U = \int_L \frac{M_t^2}{2GI_p}dx \tag{4.23}$$

Energia potenţială specifică reprezintă raportul dintre energia potenţială corespunzătoare elementului de bară dx $\left(dU = \frac{M_t^2}{2GI_p}\right)$ şi volumul corespunzător al elementului. Se obţine:

$$U_1 = \frac{16M_t^2 \cdot dx}{\pi GD^4} \cdot \frac{4}{\pi D^2 dx}$$
$$U_1 = \frac{M_t^2}{4GW_p^2} \quad sau \quad U_1 = \frac{\tau_{max}^2}{4G} \tag{4.24}$$

Ţinînd seama relaţia (4.5) între tensiunea tangenţială maximă şi lunecarea specifică maximă corespunzătoare, expresiile *energiei potenţiale specifice de deformaţie* în funcţie de tensiunile şi lunecările specifice maxime sunt :

$$U_1 = \frac{1}{4}\tau_{max}\gamma_{max}; \quad U_1 = \frac{1}{4}G\gamma_{max}^2 \tag{4.24'}$$

Aplicaţia 4.1

Să se calculeze săgeata f şi tensiunea tangenţială maximă τ_{max} din secţiunea unui arc cilindric elicoidal de compresiune sub acţiunea forţei axiale P (fig. 4.6.a).

Arcul elicoidal cilindric este o bară curbă în spaţiu de secţiune circulară de diametru d, având axa geometrică de o elice cilindrică de rază R .

În figura 4.6.a s-au făcut următoarele notaţii:

- R raza de înfăşurare a spirei cilindrice;
- d diametrul spirei;
- α unghiul de înclinare al spirelor sub acţiunea forţei axiale P;
- n numărul de spire active;
- L lungimea totală a barei curbe în spaţiu: $L = 2\pi Rn$;

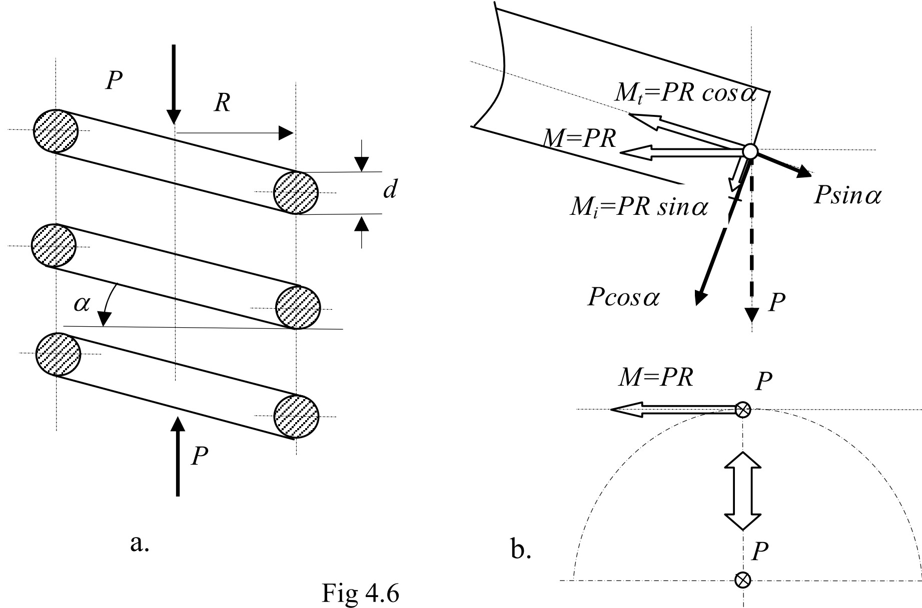


Fig 4.6

Reducând forța axială P într-o secțiune oarecare a arcului se obține torsorul de reducere din figura 4.6.b:

$$\begin{cases} P \\ M = PR \end{cases} \tag{4.25}$$

Dacă se descompun elementele torsorului de reducere după cele două direcții: tangenta la axa spirei şi perpendiculară pe aceasta (fig. 4.6.b) se obține:

- efortul axial: $N=P\sin\alpha$;
- efortul tăietor: $T=P\cos\alpha$;
- momentul încovoietor: $M_i=PR\sin\alpha$;
- momentul torsional: $M_t=PR\cos\alpha$.

Pentru unghiuri de înclinare a spirei mici $(\alpha < 4..5^0)$ se fac aproximările: $\sin\alpha \cong 0$ şi $\cos\alpha \cong 1$, astfel încât efortul axial $N= P\sin\alpha$ şi momentul încovoietor $M_i=PR\sin\alpha$ se pot neglija în raport cu efortul de răsucire $M_t=PR\cos\alpha$ şi efortul tăietor $T= P\cos\alpha$.

Tensiunea tangențială maximă se obține prin suprapunerea celor două tensiuni tangențiale de la solicitarea de răsucire şi forfecare:

$$\tau_{max} = \frac{PR}{W_p} + \frac{P}{A} \tag{4.26}$$

Neglijând tensiunile de forfecare datorate efortului $T= P\cos\alpha$ în raport cu tensiunile datorate efortului $M_t=PR\cos\alpha$, se obține tensiunea tangențială maximă:

$$\tau_{max} = \frac{16PR}{\pi d^3} \le \tau_a \tag{4.27}$$

Relația (4.27) stă la baza calculului de dimensionare al arcurilor.

Pentru a calcula săgeata f se face ipoteza că lucrul mecanic efectuat de forța P pe săgeata f se acumulează integral sub formă de energie potențială de deformație elastică. Ținând seama de relația (4.23) se obține:

$$\frac{Pf}{2} = \frac{M_t^2 L}{2GI_p} \Rightarrow f = \frac{64PR^3 n}{Gd^4} \tag{4.28}$$

Se notează cu *k constanta elastică sau rigiditatea arcului:*

$$k = \frac{Gd^4}{64R^3 n} \tag{4.28'}$$

Diagrama de variație $P(f) = k \cdot f$ este numită *caracteristica liniară* a arcului elicoidal cilindric de compresiune.

4.3. Torsiunea barelor de secțiune necirculară

4.3.1. Torsiunea barelor de secțiune eliptică

Studiul torsiunii barelor având secțiunea necirculară se bazează pe teoria lui *Barre de Saint Venant* (1855).

Ipoteza secțiunii plane a lui *Bernoulli* de la torsiunea barelor de secțiune circulară şi inelară nu mai este valabilă deoarece s-a constatat experimental că suprafața plană a unei secțiuni necirculare se deplanează în urma torsiunii.

În acest caz se face ipoteza că în secțiunea transversală a barei nu apar tensiuni normale ci numai tensiuni tangențiale având o distribuție neliniară cu valori maxime pe conturul exterior al secțiunii. Pe baza rezultatelor obținute, *Barre de Saint Venant* a propus pentru calculul tensiunilor o funcție $\psi(y,z)$ constantă sau nulă pe conturul secțiunii, ale cărei derivate parțiale sunt componentele tensiunilor tangențiale orientate după cele două axe:

$$\tau_{yx} = \frac{\partial \psi}{\partial z}; \qquad \tau_{zx} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}. \tag{4.29}$$

Astfel pentru o secțiune eliptică (fig.4.7) se consideră funcția tensiunilor $\psi(y,z)$, nulă pe conturul secțiunii având forma:

$$\psi(y,z) = m\left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1\right) \tag{4.30}$$

Pentru a calcula constanta m din relația (4.30) se consideră că integrala funcției $\psi(y,z)$ pe suprafața secțiunii este jumătate din valoarea momentului torsional M_t:

$$\int_A \psi(y,z)dA = \frac{M_t}{2} \tag{4.31}$$

Efectuând integrala (4.31) se obține:

$$\int_A \psi(y,z)dA = m\int_A \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1\right)dydz = -\pi ab \cdot m \tag{4.32}$$

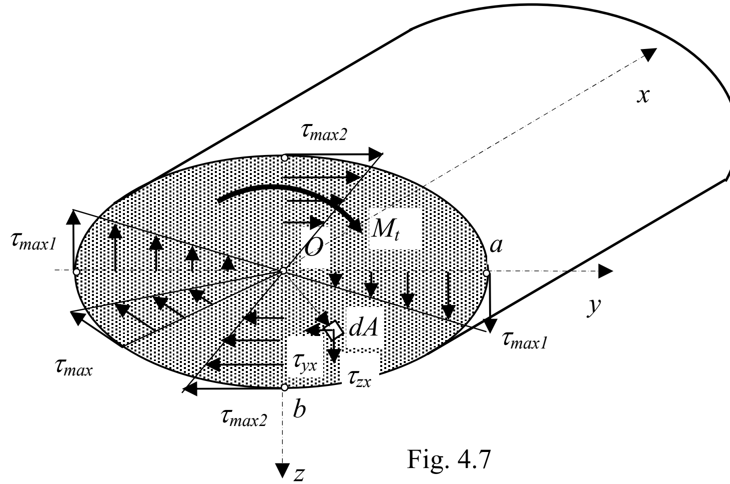


Fig. 4.7

Rezultă : $m = -\dfrac{M_t}{\pi ab}$ şi funcția tensiunilor (4.30) se scrie :

$$\psi(y,z) = -\frac{M_t}{\pi ab}\left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1\right) \tag{4.33}$$

Expresiile tensiunilor tangențiale τ_{yx} şi τ_{zx} se obțin cu ajutorul relațiilor (4.29):

$$\tau_{yx} = -\frac{M_t}{2I_y}z; \quad \tau_{zx} = \frac{M_t}{2I_z}y \tag{4.34}$$

în care I_y şi I_z sunt momentele de inerție față de cele două axe având expresiile:

$$I_y = \int_A z^2 dA = \frac{\pi ab^3}{4}; \quad I_z = \int_A y^2 dA = \frac{\pi a^3 b}{4} \tag{4.35}$$

Din expresiile (4.34) se observă că pentru un cuplu M_t pozitiv, tensiunea τ_{yx} este negativă (ceea ce arată faptul că are sensul opus axei *Oy)* iar tensiunea τ_{zx} este pozitivă (ceea ce arată faptul că are sensul axei *Oz* , vezi fig.4.7).

Tensiunea tangențială τ este suma vectorială a celor două tensini τ_{yx} şi τ_{zx} , având sensul momentului torsional M_t şi direcția paralelă cu tangenta la conturul secțiunii eliptice, conform relațiilor:

$$\tau = \sqrt{\tau_{yx}^2 + \tau_{zx}^2}$$

$$\tau = \frac{2M_t}{\pi ab}\sqrt{\frac{z^2}{b^4} + \frac{y^2}{a^4}} \tag{4.36}$$

$$\frac{\tau_{yx}}{\tau_{zx}} = -\frac{I_z}{I_y}\cdot\frac{z}{y} = -\frac{a^2}{b^2}\cdot\frac{z}{y}$$

Valorile maxime ale tensiunii tangențiale τ se obțin pe conturul secțiunii, direcția lor fiind tangentă la contur (fig. 4.7) şi au expresiile:

$$\tau_{max1} = \frac{2M_t}{\pi a^2 b}; \quad \tau_{max2} = \frac{2M_t}{\pi a b^2}. \tag{4.36'}$$

Pentru $a > b$, se obține $\tau_{max1} < \tau_{max2}$ (fig. 4.7) .

În cazul particular al secțiunii circulare (*a=b=R)* se obține relația tensiunii tangențiale de la răsucirea barelor:

$$\tau_{yx} = -\frac{2M_t}{\pi R^4} z; \quad \tau_{zx} = \frac{2M_t}{\pi R^4} y; \\ \Rightarrow \quad \tau = \frac{2M_t}{\pi R^4} r. \tag{4.37}$$

Răsucirea specifică θ se obține cu ajutorul relației:

$$\theta = -\frac{1}{2G}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) \tag{4.38}$$

Înlocuind derivatele parțiale de ordinul doi se obține:

$$\theta = \frac{M_t}{G}\frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3} \tag{4.39}$$

Relația (4.39) se mai poate scrie sub forma: $\theta = \dfrac{M_t}{GI_d}$ (4.39')

în care GI_d este *rigiditatea la răsucire* a secțiunii eliptice :

$$GI_d = \frac{\pi a^3 b^3 G}{a^2 + b^2} \tag{4.40}$$

În cazul particular al secțiunii circulare (*a=b=R)* se obține relația (4.11) de la răsucirea secțiunii circulare: $\theta = \dfrac{M_t}{GI_p}$ (4.41)

4.3.2. Torsiunea barelor de secțiune dreptunghiulară

Se consideră o bară de secțiune dreptunghiulară $b \times h$ supusă la torsiune sub acțiunea momentului M_t . Dacă se trasează pe suprafața exterioară o rețea de pătrate ca în figura 4.8, în urma deformațiilor prin torsiunea barei se poate constata că rețeaua se deformează mai accentuat în zona mediană a suprafețelor exterioare, iar suprafața capătului barei se deplanează sub acțiunea momentului de torsiune M_t.

Pe baza acestor observații *Barre de Saint Venant* a tras următoarele concluzii:

- de-a lungul axelor de simetrie ale secțiunii, tensiunile tangențiale variază aproape liniar, fiind nule în zona mediană şi maxime pe contur (fig.4.8);
- de-a lungul laturilor secțiunii, tensiunile tangențiale variază după o lege aproximativ parabolică, fiind nule în zona colțurilor şi maxime la mijloc (fig.4.8), obținându-se cu ajutorul relațiilor deduse experimental:

$$\tau_{max1} = \frac{M_t}{k_1 b^2 h}; \quad \tau_{max2} = k_2 \cdot \tau_{max1} \tag{4.42}$$

Coeficientii k_1 şi k_2 au valorile din tabelul 4.1.

Tabelul 4.1

h/b	*1,00*	*1,50*	*1,75*	*2,00*	*2,50*	*3*	*4*	*6*	*8*	*10*
k_1	*0,208*	*0,231*	*0,239*	*0,246*	*0,258*	*0,267*	*0,282*	*0,299*	*0,307*	*0,313*
k	*0,141*	*0,196*	*0,214*	*0,229*	*0,249*	*0,263*	*0,281*	*0,299*	*0,307*	*0,313*
k_2	*1,000*	*0,859*	*0,820*	*0,795*	*0,766*	*0,753*	*0,745*	*0,743*	*0,742*	*0,742*

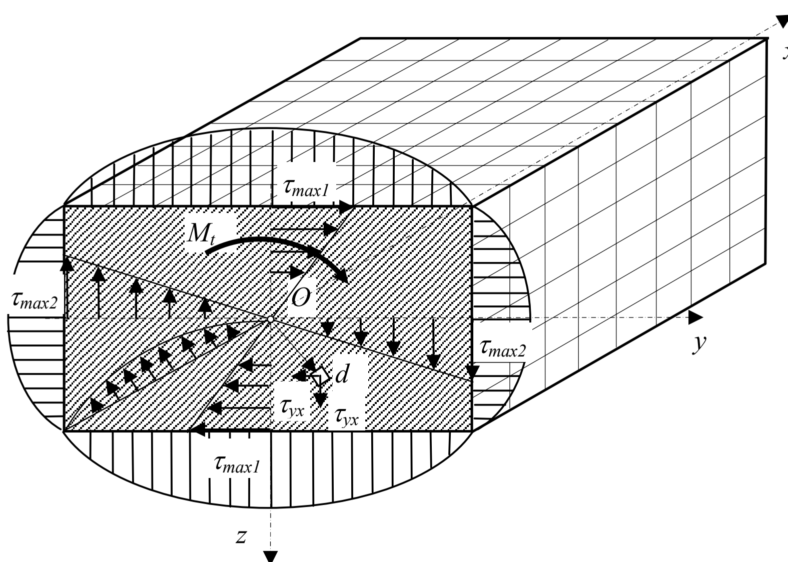


Fig. 4.8

- unghiul de răsucire specifică se obține cu ajutorul relației experimentale:

$$\theta = \frac{M_t}{kGb^3h} \tag{4.43}$$

- pentru profile dreptunghiulare subțiri având $h > 10 \cdot b$ se folosesc valorile: k_1 = *k=1/3* şi relațiile pentru calculul tensiunii tangențiale maxime şi a unghiului de răsucire specifică sunt:

$$\tau_{max} = \frac{3M_t}{b^2h}; \tag{4.44}$$

$$\theta = \frac{3M_t}{Gb^3h} \tag{4.45}$$

4.3.3. Torsiunea barelor din profile subţiri deschise

În cazul răsucirii profilelor subţiri deschise având secţiunea formată din suprafeţe dreptunghiulare (de lungime h_i şi lăţime t_i), pe grosimea lor tensiunile tangenţiale variază după o lege liniară, sunt nule pe linia mediană şi au valori maxime pe porţiunile de grosime maximă. Relaţiile de calcul ale tensiunii tangenţiale maxime şi ale răsucirii specifice în acest caz sunt:

$$\tau_{max} = \frac{3M_t t_{max}}{\sum t_i^3 h_i}; \qquad \theta = \frac{3M_t}{G\sum t_i^3 h_i} \tag{4.47}$$

Dacă nu se ţine seama de deformaţiile profilului, se defineşte *axa de răsucire* acea axă în jurul căreia se produce rotirea secţiunii supusă la torsiune:

- în cazul profilelor subţiri cu două axe de simetrie (exemplu profilul I, fig.4.9) axa de răsucire coincide cu axa centrelor de greutate ale secţiunii transversale ;
- în cazul profilelor subţiri cu o singură axă de simetrie (profil U, T) axa de răsucire se află în planul de simetrie şi nu trece prin centrul de greutate al secţiunii transversale ;
- în cazul profilelor fără axe de simetrie, axa de răsucire nu trece prin centrul de greutate al secţiunii transversale .

În cazul profilelor subţiri având linia mediană un arc de cerc, cu unghiul la centru α, raza r şi lăţimea constantă t (fig. 4.10) relaţiile de calcul ale tensiunii maxime şi răsucirii specifice sunt:

$$\tau_{max} = \frac{3M_t}{\alpha \cdot rt^2}; \qquad \theta = \frac{3M_t}{G \cdot \alpha rt^3} \tag{4.48}$$

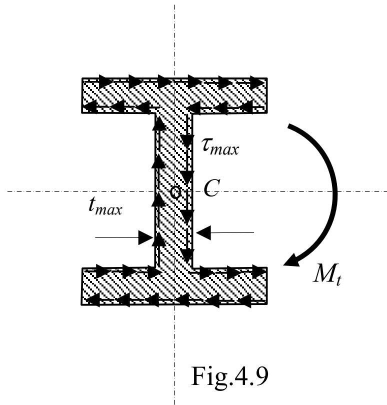


Fig.4.9

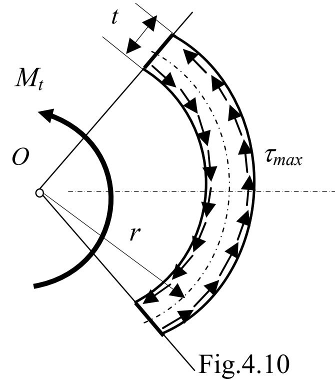


Fig.4.10

Aplicația 4.2

Să se calculeze tensiunea maximă şi unghiul de răsucire specifică al barei având profilul deschis ca în figura 4.11. Profilul are linia mediană un dreptunghi şi admite o singură axă de simetrie, cea orizontală. Se cunosc lățimile profilului $t_1=t$, $t_2=3t$ şi $t_3=2t$, înălțimea h şi lățimea b a liniei mediane a profilului.

Rezolvare. Conform relației (4.47) tensiunea maximă se produce în zona de lățime maximă b_2 şi are expresia:

$$\tau_{max} = \frac{3M_t \cdot t_2}{t_1^3 \cdot h + 2t_2^3 \cdot b + t_3^3 \cdot h}$$
$$\Rightarrow \tau_{max} = \frac{M_t}{t^2(h+6b)} \tag{4.49}$$

Unghiul de rotire specifică se calculează conform relației (4.47):

$$\theta = \frac{3M_t}{G(t_1^3 h + 2t_2^3 b + t_3^3 h)}$$
$$\Rightarrow \theta = \frac{M_t}{3Gt^3(h+6b)} \tag{4.50}$$

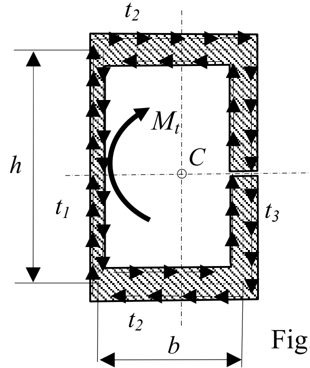


Fig.4.11

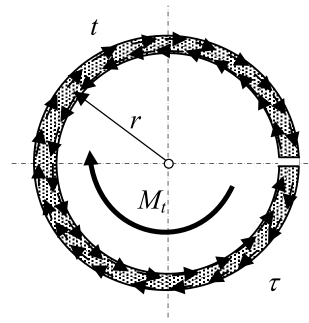


Fig. 4.12

Aplicația 4.3

Să se determine tensiunea maximă şi unghiul de răsucire specifică al barei având profilul deschis de formă circulară ca în figura 4.12. Profilul are linia mediană un cerc de rază r şi lățimea profilului este constantă t .

Rezolvare

Conform relației (4.48) tensiunea maximă are expresia:

$$\tau_{max} = \frac{3M_t}{\alpha \cdot rb^2} = \frac{3M_t}{2\pi r t^2} \tag{4.51}$$

Unghiul de rotire specifică se calculează conform relației (4.47):

$$\theta = \frac{3M_t}{2\pi G r t^3} \tag{4.52}$$

4.3.4. Torsiunea barelor din profile subțiri închise

Se consideră o bară tubulară cu pereți subțiri supusă la torsiune cu momentul M_t. Dacă se consideră cazul particular al unei secțiuni având linia mediană un cerc de lățime t mică (o coroană circulară ca în figura 4.13), conform relației (4.12) de calcul a tensiunilor tangențiale de răsucire, tensiunea tangențială este:

$$\tau = \frac{M_t}{I_p} r = \frac{M_t}{2\pi \cdot r^2 t} \cdot \frac{1 + t/2r}{1 + (t/2r)^2} \qquad (4.53)$$

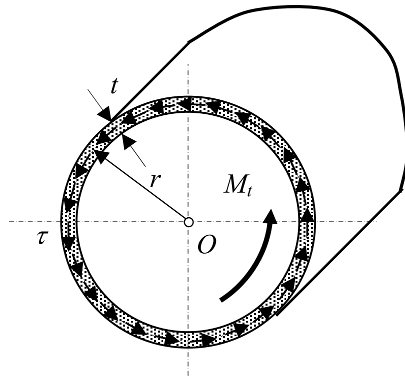


Fig. 4.13

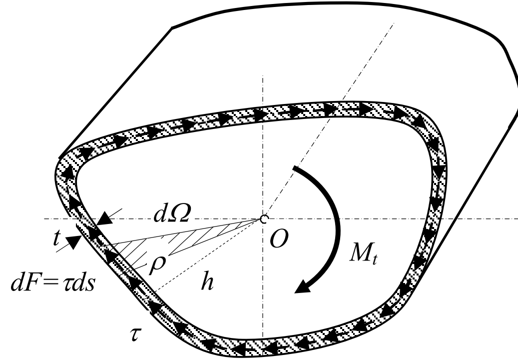


Fig. 4.14

Pentru lățimi mici $t << r$ se poate face aproximarea : $\frac{1 + t/2r}{1 + (t/2r)^2} \approx 1$ obținându-se relația de calcul a tensiunilor:

$$\tau = \frac{M_t}{2\pi \cdot r^2 t} = \frac{M_t}{2\Omega t} \qquad (4.54)$$

în care: $\Omega = \pi r^2$ este aria suprafeței mărginită de linia mediană, cercul de rază r ;
t lățimea suprafeței secțiunii.

Se poate generaliza rezultatul de mai sus în cazul unui profil subțire închis oarecare de lățime t (fig. 4.14) dacă se fac următoarele ipoteze de calcul:

- materialul este omogen şi izotrop, respectă legea lui Hooke a proporționalității dintre tensiuni şi deformații;
- secțiunea este constantă pe lungimea barei, axa longitudinală Ox este axa centrelor de greutate;
- într-o secțiune transversală a barei tubulare nu acționează decât tensiuni tangențiale de răsucire;
- secțiunea barei tubulare are grosimea t constantă sau variabilă măsurată normal la linia mediană

Se notează cu :

- *ds* lungimea arcului de pe fibra medie a secțiunii ;
- $d\Omega = h \cdot ds / 2$ aria elementară a triunghiului având vârful în punctul fix *O* şi baza *ds,* iar Ω aria suprafeței mărginite de linia mediană a secțiunii
- $\rho \cong h$ raza corespunzătoare arcului elementar *ds* (fig. 4.14) .

Cu aceste notații, se consideră un element prismatic din această bară tubulară, având dimensiunile bazei *ds,* t_1, t_2 şi generatoarea de lungime *dx* ca în figura 4.15. Ținând seama de legea dualității tensiunilor tangențiale, pe fețele laterale ale acestui element prismatic acționează tensiunile tangențiale τ_1 şi τ_2 care sunt egale două câte două şi perpendiculare pe muchiile comune ca în figura 4.15.

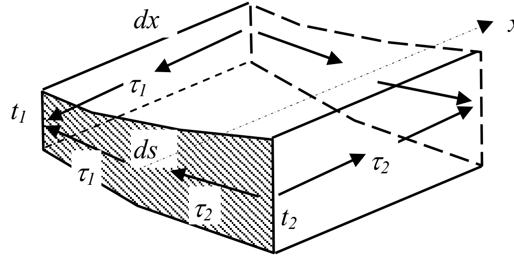


Fig. 4.15

Ecuația de echilibru a forțelor elementare datorate tensiunilor tangențiale τ_1 *şi* τ_2 după direcția *Ox* se scrie:

$$-\tau_1 \cdot t_1 \cdot dx + \tau_2 \cdot t_2 \cdot dx = 0 \tag{4.55}$$

Rezultă o relație numită *ipoteza BREDT a fluxului de tensiuni:*

$$\tau_1 \cdot t_1 = \tau_2 \cdot t_2 \Rightarrow \tau \cdot t = const. \tag{4.56}$$

Din relația (4.56) rezultă că tensiunile maxime în acest caz se obțin pentru lățimile de perete minime. Relația (4.56) stă la baza calculului la răsucire a barelor tubulare cu pereți subțiri sau a barelor cu profile subțiri închise.

Momentul forței elementare $dF=\tau ds$ față de axa *Ox*, forță corespunzătoare tensiunii tangențiale ce acționează pe aria elementară $dA=h\ ds/2$ (fig.4.14), se scrie:

$$dM_t = \rho \cdot \tau \cdot t \cdot ds \tag{4.57}$$

Integrând relația (4.57) pe lungimea liniei mediane a secțiunii *S* se obține momentul de torsiune echivalent:

$$M_t = \oint_S \rho \cdot \tau \cdot t \cdot ds \tag{4.58}$$

Ținând seama de ipoteza *BREDT* (4.56), de invarianță a fluxului de tensiuni tangențiale, relația (4.58) devine:

$$M_t = \tau \cdot t \oint_S \rho \cdot ds = 2\tau \cdot t \int_\Omega d\Omega \quad \Rightarrow M_t = \tau \cdot t \cdot \Omega \tag{4.59}$$

Rezultă din relația (4.59) că tensiunea tangențială depinde numai de lățimea t a profilului şi de aria Ω a figurii delimitată de fibra medie a secțiunii:

$$\tau = \frac{M_t}{2t \cdot \Omega} \tag{4.60}$$

Tensiunea tangențială maximă se obține pentru lățimea minimă :

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{2t_{min} \cdot \Omega} \tag{4.61}$$

Pentru a determina unghiul de răsucire $d\varphi$ sub acțiunea cuplului M_t pentru elementul de lungime dx, se face ipoteza că lucrul mecanic al cuplului de torsiune M_t ce acționează asupra elementului se acumulează integral sub formă de energie potențială de deformație elastică:

$$\frac{1}{2} M_t \cdot d\varphi = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV \tag{4.62}$$

Ținând seama de relația tensiunilor (4.60) şi înlocuind $dV = t \cdot ds \cdot dx$ în relația (4.62) se obține:

$$\frac{M_t}{2} \cdot d\varphi = \int_V \frac{1}{2G} \left(\frac{M_t}{2t\Omega} \right)^2 t \cdot ds \cdot dx \tag{4.63}$$

De unde rezultă răsucirea specifică θ sau *a doua formulă a lui BREDT*:

$$\theta = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M_t}{4G\Omega^2} \oint_S \frac{ds}{t} \tag{4.64}$$

În cazul particular al unei bare având profilul subțire de lățime constantă se obține răsucirea specifică:

$$\theta = \frac{M_t S}{4G\Omega^2 t} \tag{4.65}$$

Aplicația 4.4

Să se determine tensiunea maximă şi unghiul de răsucire specifică al barei cu profil închis subțire având forma din figura 4.16. Se cunosc lățimile de profile $t_1=t$, $t_2=3t$ şi $t_3=2t$, înălțimea h şi lățimea b a liniei mediane a profilului.

Rezolvare

Conform relației (4.61) tensiunea maximă se produce în zona profilului de lățime minimă t_1 şi are expresia:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{2t_{min} \cdot \Omega} = \frac{M_t}{2t \cdot bh} \tag{4.66}$$

Unghiul de răsucire specifică conform relației (4.64) este:

$$\begin{gathered} \theta = \frac{M_t}{4Gb^2h^2} \left(\frac{h}{t} + \frac{2b}{3t} + \frac{h}{2t} \right) \\ \theta = \frac{M_t (9h + 4b)}{24Gb^2h^2 t} \end{gathered} \tag{4.67}$$

Comparând expresiile tensiunii maxime şi unghiului de răsucire cu cele obținute pentru profilul deschis (aplicația 4.2) se observă că valorile acestor mărimi sunt mai

mari în cazul profilului deschis, ceea ce arată că aceste profile au o rezistență la răsucire scăzută.

Pentru cazul particular $h=20t$, $b=10t$ se obțin următoarele valori:

- pentru profilul deschis : $\tau_{max} = \dfrac{M_t}{80t^3}; \quad \theta = \dfrac{M_t}{240Gt^4}$ (4.68)
- pentru profilul închis : $\tau_{max} = \dfrac{M_t}{400t^3}; \quad \theta = \dfrac{11M_t}{48000Gt^4}$ (4.69)

În cazul profilului închis tensiunea maximă este de 5 ori mai mică iar răsucirea specifică de 18 ori mai mică decât în cazul profilului deschis.

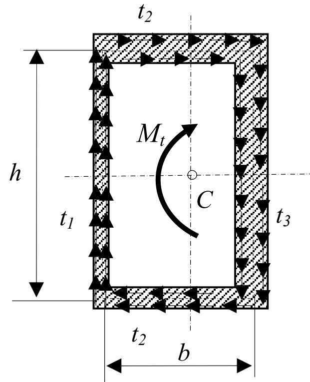


Fig.4.16

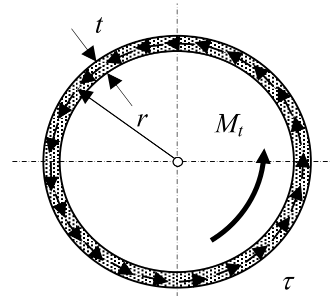


Fig. 4.17

Aplicația 4.5

Să se determine tensiunea maximă şi unghiul de răsucire specifică al barei având profilul închis de formă circulară ca în figura 4.17. Profilul are axa mediană un cerc de rază r şi lățimea profilului este t .

Conform relației (4.61) tensiunea maximă are în acest caz expresia:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{2t_{min} \cdot \Omega} = \frac{M_t}{2\pi \cdot t \cdot r^2} \tag{4.70}$$

Unghiul de răsucire specifică conform relației (4.65) este:

$$\theta = \frac{M_t S}{4G\Omega^2 t} = \frac{M_t}{2\pi G r^3 t} \tag{4.71}$$

Comparând expresiile tensiunii maxime şi unghiului de răsucire cu cele obținute pentru profilul deschis (aplicația 4.2) se observă că valorile acestor mărimi sunt mai mari în cazul profilului deschis. Pentru cazul particular $r=10t$ se obține :

- pentru profilul deschis: $\tau_{max} = \dfrac{3M_t}{20\pi \cdot t^3}; \quad \theta = \dfrac{3M_t}{20\pi G \cdot t^4}$ (4.72)
- pentru profilul închis : $\tau_{max} = \dfrac{M_t}{200\pi t^3}; \quad \theta = \dfrac{M_t}{2000\pi G t^4}$ (4.73)

4.4. Probleme propuse

4.4.1. Să se determine tensiunea maximă şi unghiul de răsucire specifică al barei având profilul deschis de formă semitubulară ca în figura 4.18 solicitată de momentul de torsiune M_t=*1000 Nm*. Profilul are lăţimea *t=4mm,* şi axa mediană un cerc de rază *r=50mm*. Materialul barei are modulul de elasticitate transversal : $G=8,5\cdot 10^4$ *MPa.*

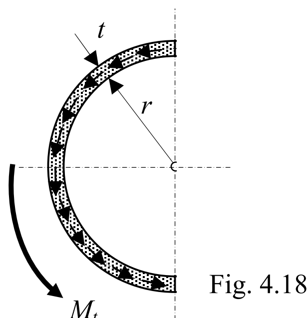


Fig. 4.18

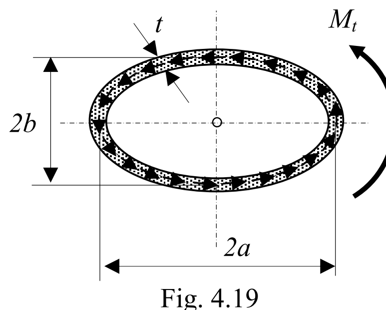


Fig. 4.19

4.4.2. Să se determine tensiunea maximă şi unghiul de răsucire specifică al barei având profilul deschis de formă tubulară ca în figura 4.19 solicitată de momentul de torsiune M_t=*1000 Nm*. Profilul are lăţimea *t=5mm,* şi axa mediană o elipsă de semiaxe: *a=40mm şi b=30mm.* Materialul barei are modulul de elasticitate transversal : $G=8,5\cdot 10^4$ *MPa.*

4.4.3. Fie bara 1-2 cu secţiune chesonată, solicitată la torsiune de momentele M_{t1} (în secţiunea 1), M_{t0} (în secţiunea 3) şi M_{t2} (în secţiunea 2). Ştiind că pe intervalul 1-3 peretele vertical al barei are o fantă pe mijloc (fig.4.20), se cer:

1. să se traseze diagrama de momente ştiind că $\varphi_{1\text{-}2}=2^0=\pi/90$ *rad;*
2. să se calculeze tensiunea τ_{max} din bară. Se dau: *a=0,4m ;* M_{t0}*=2kNm ;* $G=8,5\cdot 10^4$ *MPa. (Concursul Profesional de Rezistenţa Mat. C.C. TEODORESCU, Timişoara, mai 2004).*

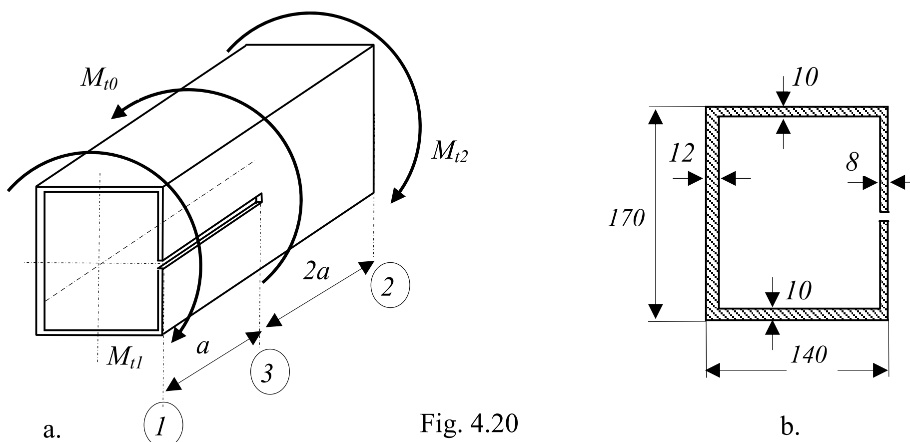


Fig. 4.20

4.4.4. Pentru bara din figura 4.21 supusă la torsiune liberă se cere:
1. valoarea momentelor de torsiune M_{t1} şi M_{t2} din codiția ca unghiul de răsucire $\varphi_{1-2} = 2^0 = \pi/90\ rad$, $G = 8{,}1 \cdot 10^4\ MPa$
2. diagramele tensiunilor tangențiale τ pentru cele două secțiuni, cu valori;
3. pentru secțiunea 2-2 să se calculeze poziția centrului de încovoiere-răsucire (tăiere) *C*. Date numerice: $a=3m$; $b=1m$; $t=8mm$.
(Concursul Profesional de Rezistența Materialelor C.C. TEODORESCU, Târgu-Mureş, mai 2005).

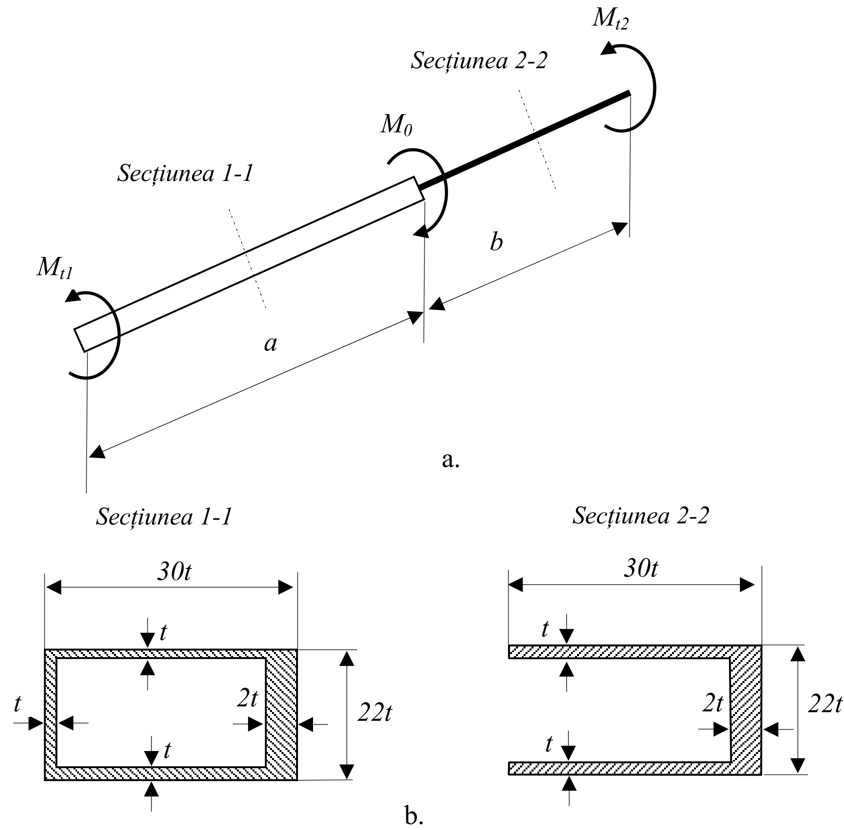


Fig. 4.21

4.4.5. O bară din oțel având secțiunea transversală în formă de U de grosime constantă δ este supusă răsucirii libere de către un moment de torsiune dat M_t, ca în figura 4.22. Să se analizeze efectul pe care îl are asupra tensiunii tangențiale de la mijlocul aripii profilului mărirea grosimii aripii superioare la $1{,}3\delta$ admițând că $h=4b$. *(Rezistența materialelor. Probleme alese, p.137, prof.dr.ing. Augustin Crețu, UT ClujNapoca, 1993)*

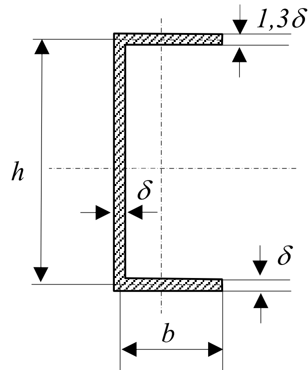


Fig. 4.22

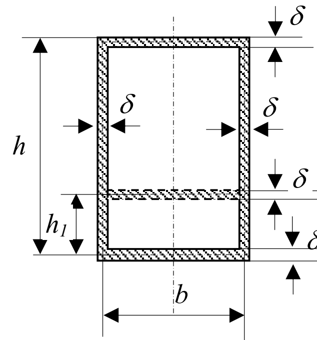


Fig. 4.23

4.4.6. Se dă o bară dreaptă din oțel cu pereți subțiri, având profilul închis (simplu conex), de grosime constantă δ cu $h=2b$, supusă răsucirii libere de către un moment de torsiune M_t ca în figura 4.23. Să se analizeze efectul pe care îl are adăugarea pentru consolidare a unui nou perete de aceeaşi grosime δ la distanța h_1 de baza secțiunii asupra tensiunilor tangențiale din pereții profilului.
(Rezistența materialelor. Probleme alese, prof.dr.ing. Augustin Crețu, UT ClujNapoca, 1993)

5

ÎNCOVOIEREA BARELOR DREPTE

5.1. Introducere

O bară este solicitată la încovoiere dacă forțele exterioare şi cuplurile de forțe care acționează asupra ei produc într-o secțiune eforturi secționale de încovoiere M_{iy} şi/sau M_{iz}. Conform *teoremei de echivalență a tensiunilor*, eforturile M_{iy} şi M_{iz} din secțiunea transversală a barei reprezintă elementele torsorului de reducere al forțelor interioare elementare dF datorate tensiunilor normale de încovoiere: proiecțiile momentului M_O pe axele Oy şi Oz sau momentele forțelor elementare dF calculate față de axele Oy sau Oz ce trec prin centrul de greutate al secțiunii. În cazul solicitării la încovoiere există totdeauna în secțiunea transversală o linie de-a lungul căreia tensiunile normale sunt nule, numită *axa neutră a secțiunii*. Încovoierea barelor drepte se clasifică după următoarele două criterii:

A. în funcție de poziția forțelor şi cuplurilor exterioare în spațiu:

- *încovoierea plană (simetrică)* - când forțele şi cuplurile de forțe sunt situate într-un plan care conține atât axa longitudinală a barei cât şi o axă *centrală şi principală de inerție* a secțiunii. În exemplul din figura 5.1 planul forțelor conține axa centrală şi principală de inerție Oz; sub acțiunea forțelor F_1 şi F_2 în secțiunea ei apar numai eforturile încovoietoare M_{iy} şi tăietoare T_z . Axa neutră a secțiunii coincide în acest caz cu axa eforturilor încovoietoare Oy.
- *încovoierea oblică* - când toate forțele F_1 şi F_2 sunt situate într-un plan care conține axa barei dar nu şi axa principală de inerție ca în cazul precedent. În exemplul din figura 5.2 planul forțelor conține axa longitudinală a barei, nu şi o axă principală de inerție. Deşi eforturile încovoietoare sunt după axa Oy, axa neutră diferă în acest caz cu axa eforturilor încovoietoare Oy dar trece prin C;
- *încovoierea spațială* este cazul general al încovoierii în care forțele intersectează axa longitudinală a barei dar nu sunt cuprinse în acelaşi plan şi produc eforturi încovoietoare după ambele axe Oy şi Oz . În exemplul în figura 5.3 forțele F_1, F_2 şi F_3 intersectează axa longitudinală a barei şi produc eforturi încovoietoare M_{iy} , M_{iz} şi tăietoare T_y , T_z . Axa neutră a secțiunii nu coincide în acest caz cu axa eforturilor încovoietoare rezultante M_i dar trece prin C.

B. În funcție de tipul eforturilor care apar în secțiunea barei:

- *încovoiere pură* - când în secțiunea barei se dezvoltă numai eforturi încovoietoare M_{iy} sau M_{iz};
- *încovoiere simplă* - când în secțiunea barei se dezvoltă atât eforturi încovoietoare M_{iy} , M_{iz} cât şi eforturi şi tăietoare T_y , T_z ;
- *încovoiere compusă* - când în secțiunea transversală apar pe lângă eforturile încovoietoare M_{iy} , M_{iz} şi alte tipuri de eforturi: axiale, tăietoare sau torsionale.

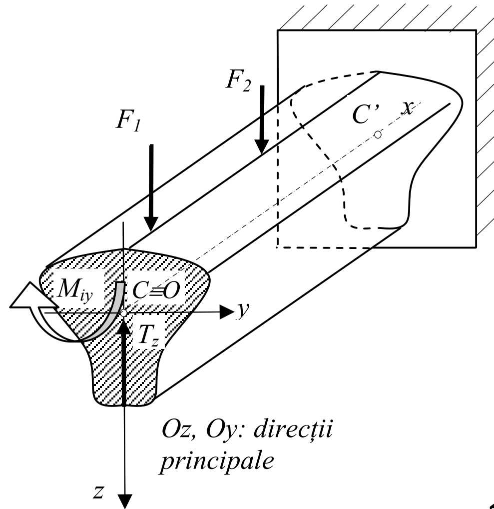
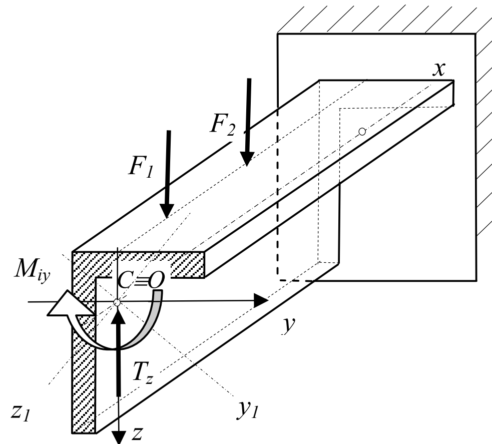
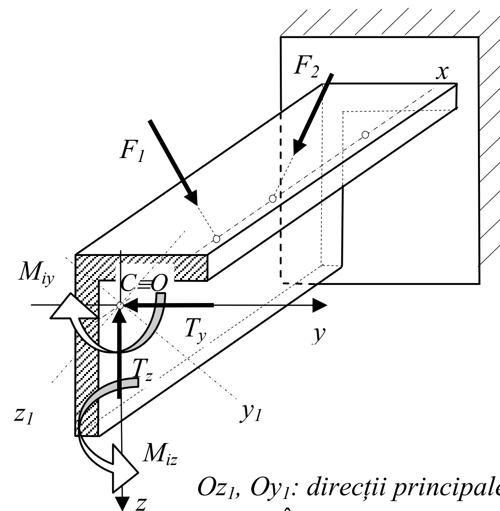


Fig. 5.1. Încovoiere plană (simetrică)



Oz[1]*, Oy*[1]*: direcții principale*

Fig. 5.2 Încovoiere oblică



Oz[1]*, Oy*[1]*: direcții principale*

Fig. 5.3 Încovoiere spațială

5.2. Caracteristici geometrice ale suprafețelor

5.2.1. Definiții

În calculul tensiunilor normale σ la încovoierea barei drepte intervin anumite mărimi legate de geometria suprafeței secțiunii transversale, numite *caracteristici geometrice ale secțiunii: momentele de inerție axiale și centrifugale*. Acestea caracterizează modul în care este repartizată suprafața în raport cu un sistem de axe care trece prin centrul de greutate al secțiunii.

Pentru a defini caracteristicile geometrice ale unei secțiuni se consideră un sistem oarecare de axe *Oyz*, un element infinitezimal de arie *dA* și un punct *M* pe suprafața secțiunii, de coordonatele *y* și *z*, ca în figura 5.4.a.

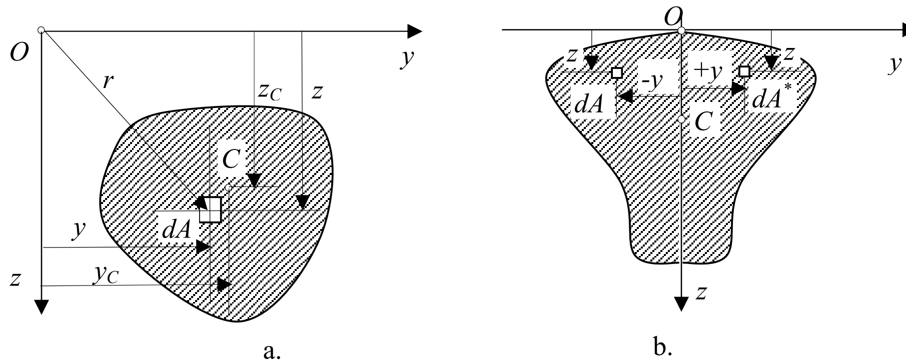


Fig. 5.4

Față de sistemul de axe *Oyz* se definesc următoarele caracteristici geometrice:

1. *Momentele statice* ale secțiunii în raport cu axa *Oy* respectiv cu axa *Oz* prin integralele:

$$S_y = \int_A z\ dA; \quad S_z = \int_A y\ dA \tag{5.1}$$

Dacă se ține seama de relațiile centrului de greutate secțiunii în raport cu sistemul de axe *Oyz*:

$$y_C = \frac{\int_A y\ dA}{A} \quad ; \quad z_C = \frac{\int_A z\ dA}{A} \tag{5.2}$$

rezultă că *momentele statice* ale secțiunii se pot scrie ca produsul dintre aria secțiunii și distanța de la centrul de greutate la axa respectivă:

$$S_y = z_C \cdot A; \qquad S_z = y_C \cdot A; \tag{5.3}$$

Dacă una din axele *Oy* sau *Oz* trec prin centrul de greutate al secțiunii (distanța de la centrul de greutate la axa respectivă este nulă) momentul static în raport cu această axă este nul.

Unitatea de măsură pentru momentul static *S* în Sistemul Internațional de Unități de Măsură (SI) este m^3.

2. *Momentele de inerție axiale* în raport cu axa *Oy* respectiv cu axa *Oz* se calculează cu ajutorul integralelor:

$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA \; ; \qquad I_z = \int_A y^2 \cdot dA \tag{5.4}$$

Unitatea de măsură a momentelor de inerție axiale în Sistemul Internațional de Unități de Măsură (SI) este m^4.

3. *Momentul de inerție polar* în raport cu un punct numit şi pol, de exemplu originea sistemului de axe *Oyz* se calculează cu ajutorul integralei:

$$I_O = \int_A r^2 \cdot dA = \int_A \left(y^2 + z^2\right) dA \tag{5.5}$$

Din relația (5.4) rezultă că momentul de inerție polar este egal cu suma momentelor de inerție axiale față de cele două axe *Oy* şi *Oz* care trec prin polul *O*:

$$I_O = I_z + I_y \tag{5.6}$$

Unitatea de măsură a momentului de inerție polar în Sistemul Internațional de Unități de Măsură (SI) este m^4 .

4. *Momentul de inerție centrifugal* în raport cu axele *Oy* şi *Oz* se calculează cu ajutorul integralei:

$$I_{yz} = \int_A yz \cdot dA \tag{5.7}$$

Spre deosebire de momentele de inerție axiale şi momentul de inerție polar care sunt mărimi strict pozitive, momentul de inerție centrifugal poate fi pozitiv, negativ sau nul. Dacă una dintre axele sistemului *Oyz* este o axă de simetrie pentru suprafața dată, momentul de inerție centrifugal este nul.
Într-adevăr pentru o secțiune care admite axa *Oz* ca axă de simetrie secțiunea este formată din perechi de arii elementare *dA* şi dA^* simetrice față de axa *Oz,* pentru care se poate scrie relația (fig.5.3.b):

$$+yz \cdot dA - yz \cdot dA = 0 \tag{5.8}$$

Dacă se integrează relația (5.8) pe toată suprafața secțiunii *A* se obține : $I_{yz}=0$.
Unitatea de măsură a momentului de inerție centrifugal în Sistemul Internațional de Unități de Măsură (SI) este m^4.

5. *Razele de inerție axiale* în raport cu cele două axe *Oy* şi *Oz* sunt definite astfel:

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad ; \quad i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}. \tag{5.9}$$

Formulele (5.9) se mai pot scrie:

$$I_y = i_y^2 \cdot A; \qquad I_z = i_z^2 \cdot A. \tag{5.9'}$$

Deci razele de inerție axiale reprezintă distanța fictivă de la axa respectivă până la un punct în care se consideră concentrată întreaga arie a secțiunii.

6. *Raza de inerție polară* față de polul *O* se defineşte astfel:

$$i_O = \sqrt{\frac{I_O}{A}} \tag{5.10}$$

Relația (5.10) se mai poate scrie: $I_O = i_O^2 \cdot A$

Rezultă că raza de inerție polară reprezintă distanța fictivă de la polul O până la un punct în care se consideră concentrată întreaga arie a secțiunii.

7. *Modulele de rezistență axiale* reprezintă raportul dintre momentul de inerție axial corespunzător şi distanța până la punctul cel mai îndepărtat al suprafeței secțiunii:

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}}; \qquad W_z = \frac{I_z}{y_{max}} \tag{5.11}$$

8. *Modulul de rezistență polar* pentru secțiuni circulare sau inelare este raportul dintre momentul de inerție polar corespunzător acestei secțiuni şi distanța până la punctul cel mai îndepărtat al secțiunii sau raza exterioară:

$$W_O = \frac{I_O}{R}. \tag{5.12}$$

5.2.2. Relațiile lui STEINER pentru calculul momentelor de inerție la translația axelor

Se consideră suprafața unei secțiuni şi un *sistem de axe central Oyz* cu originea în centrul de greutate *(O≡C)*. Se pune problema găsirii unor relații pentru calcul momentelor de inerție axiale, polare şi centrifugale în raport cu un sistem oarecare de axe *O'y'z'* paralel cu sistemul central *Oxyz,* definit prin distanțele: *a* între axele *Oy* şi *Oy'* şi *b* între axele *Oz* şi *Oz'* ca în figura 5.5.

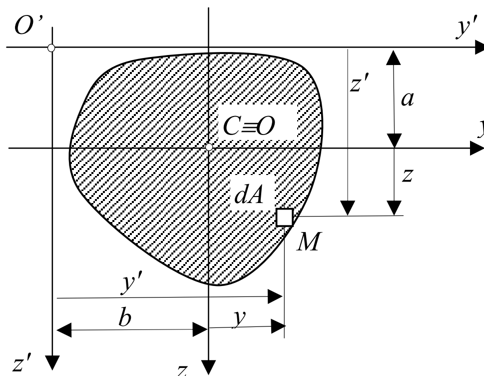


Fig. 5.5

Fie un element de arie *dA* în jurul punctului *M* de coordonate *(y, z)* față de sistemul de axe *Oyz* şi de coordonate *(y', z')* față de sistemul de axe *O'y'z'*.

Între cele două perechi de coordonate există relațiile geometrice (fig.5.5):

$$y' = y + b; \quad z' = z + a \tag{5.13}$$

Ținând seama de relațiile (5.4), momentele de inerție axiale față de axele sistemului *O'y'z'* se pot scrie:

$$I_{y'} = \int (z')^2 \cdot dA = \int \left(z^2 + 2az + a^2\right) dA$$
$$I_{z'} = \int (y')^2 \cdot dA = \int \left(y^2 + 2by + b^2\right) dA \tag{5.14}$$

Ținând seama de relațiile pentru calculul momentelor statice şi de relațiile pentru calculul momentelor de inerție axiale față de axele *Oy* şi *Oz* relațiile (5.14) devin:

$$I_{y'} = I_y + 2aS_y + a^2 A$$
$$I_{z'} = I_y + 2bS_z + b^2 A \tag{5.15}$$

Ținând seama că sistemul *Oyz este central (O≡C)*, momentele statice S_y şi S_z față de axele *Oy* şi *Oz* sunt nule şi relațiile (5.15) devin:

$$I_{y'} = I_y + a^2 A$$
$$I_{z'} = I_z + b^2 A \tag{5.16}$$

Însumând membru cu membru relațiile (5.16) şi ținând seama de (5.6), se obține relația pentru calculul momentului de inerție polar față de polul *O'*:

$$I_{O'} = I_O + (a^2 + b^2)A \tag{5.17}$$

Relația (5.7) pentru calculul momentului de inerție centrifugal față de axele sistemului paralel *O'y'z'* se scrie:

$$I_{y'z'} = \int (y + b)(z + a) \cdot dA = \int (yz + ay + bz + ab) dA \tag{5.18}$$

$$I_{y'z'} = I_{yz} + bS_y + aS_z + abA \tag{5.19}$$

Întrucât sistemul *Oyz* este un sistem de axe central *(O≡C)*, relația (5.19) devine:

$$I_{y'z'} = I_{yz} + abA \tag{5.20}$$

Relațiile (5.16), (5.17) şi (5.20) sunt *relațiile lui STEINER pentru calculul momentelor de inerție la translația axelor.*

5.2.3. Relații pentru calculul momentelor de inerție la rotirea axelor

Se pune problema găsirii unor relații pentru calcul ale momentelor de inerție axiale, polare şi centrifugale în raport cu un sistem de axe *O'y'z'* având aceeaşi origine cu un sistem central de axe dat *Oyz (O≡C)* dar rotit față de acesta în sens pozitiv cu unghiul α (fig. 5.6).

Se consideră un element de arie *dA* în jurul punctului *M* de coordonatele *(y, z)* față de sistemul de axe *Oyz* şi de coordonatele *(y', z')* față de sistemul *O'y'z'* rotit față de *Oyz* cu unghiul α .

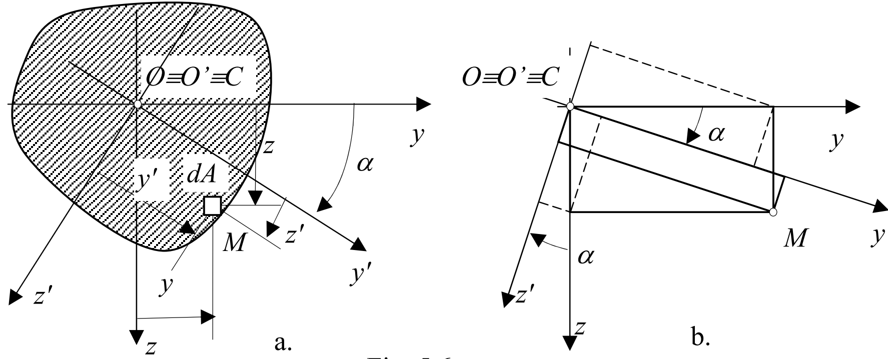


Fig. 5.6

Conform figurii 5.6.b, între cele două perechi de coordonate există relațiile geometrice:

$$\begin{cases} y' = z \cdot sin\,\alpha + y \cdot cos\,\alpha \\ z' = z \cdot cos\,\alpha - y\,sin\,\alpha \end{cases} \tag{5.21}$$

Folosind relațiile (5.4) pentru calculul momentelor de inerție axiale, față de sistemul de axe *O'y'z'* acestea se scriu:

$$\begin{aligned} I_{y'} &= \int (z')^2 \cdot dA = I_y\,cos^2\alpha + I_z\,sin^2\alpha - 2I_{yz}\,sin\alpha\,cos\alpha \\ I_{z'} &= \int (y')^2 \cdot dA = I_y\,sin^2\alpha + I_z\,cos^2\alpha + 2I_{yz}\,sin\alpha\,cos\alpha \end{aligned} \tag{5.22}$$

Relațiile (5.22) se mai pot scrie în funcție de unghiul 2α astfel:

$$\begin{aligned} I_{y'} &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} cos\,2\alpha - I_{yz}\,sin\,2\alpha \\ I_{z'} &= \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} cos\,2\alpha + I_{yz}\,sin\,2\alpha \end{aligned} \tag{5.23}$$

Însumând membru cu membru relațiile (5.23) se obține momentul de inerție polar (5.6) care nu depinde de unghiul α.

De asemenea, rezultă din relațiile (5.23) că în cazul unei secțiuni cu având momentele de inerție axiale egale (I_y=I_z) și momentul de inerție centrifugal nul ($I_{yz}=0$), (de exemplu: o secțiune pătrată, hexagonală, octogonală, etc.) momentele de inerție axiale nu se modifică la rotirea axelor.

Pentru deducerea relației de calcul a momentului de inerție centrifugal față de sistemul *O'y'z'* se utilizează relația (5.7) obținându-se:

$$I_{y'z'} = \int (y'z') \cdot dA = (I_y - I_z) sin\,\alpha\,cos\,\alpha + I_{yz}(cos^2\alpha - sin^2\alpha) \tag{5.24}$$

sau:

$$I_{y'z'} = \frac{I_y - I_z}{2} sin\,2\alpha + I_{yz}\,cos\,2\alpha. \tag{5.25}$$

5.2.4. Momente de inerție axiale principale

Se observă din relațiile (5.23) că momentele de inerție axiale față de sistemul de axe *Oy'z'* sunt funcții trigonometrice de unghiul 2α. Pentru a determina valorile extreme ale acestor funcții se anulează derivatele lor în raport cu unghiul 2α:

$$\begin{aligned} \frac{dI_{y'}}{d(2\alpha)} &= -\frac{I_y - I_z}{2} sin\,2\alpha - I_{yz} cos\,2\alpha = -I_{y'z'} \\ \frac{dI_{z'}}{d(2\alpha)} &= \frac{I_y - I_z}{2} sin\,2\alpha + I_{yz} cos\,2\alpha = I_{y'z'} \end{aligned} \tag{5.26}$$

Din relația (5.26) se observă că derivatele momentelor de inerție axiale în raport cu ungiul 2α sunt egale în valoare absolută cu momentul de inerție centrifugal: valorile maxime sau minime ale momentelor de inerție axiale corespund unor momente de inerție centrifugale sunt nule.

Prin anularea derivatelor (5.26) se obțin unghiurile corespunzătoare direcțiilor față de care momentele de inerție axiale sunt maxime sau minime:

$$\begin{aligned} &\frac{dI_{y'}}{d(2\alpha)} = -I_{y'z'} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha_1 = arctg\left(-\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}\right) \\ &2\alpha_2 = 2\alpha_1 + \pi \quad \Rightarrow \alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Din relațiile (5.27) rezultă că direcțiile corespunzătoare celor două momentele de inerție sunt perpendiculare. Acestea se mai numesc *direcții principale.*

Înlocuind valorile unghiurilor $2\alpha_1$ și $2\alpha_2$ în (5.23) rezultă expresiile momentelor de inerție axiale maxim respectiv minim, numite și *momente de inerție principale*:

$$\begin{aligned} I_1 = I_{max} &= \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \\ I_2 = I_{min} &= \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \end{aligned} \tag{5.28}$$

Pentru secțiuni având o axă de simetrie ($I_{yz}=0$) se obține:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \pi/2 \\ &I_1 = I_y, \quad I_2 = I_z \end{aligned} \tag{5.29}$$

5.2.5. Caracteristici geometrice ale unor suprafețe simple

Sunt prezentate în continuare relațiile de calcul ale momentelor de inerție axiale şi centrifugal pentru următoarele suprafețele simple:

- suprafețe rectangulare particulare: dreptunghi, triunghi, romb, hexagon regulat;
- suprafețe mărginite de curbe particulare: cerc (semicerc), coroană circulară sau inelară (coroană semiinelară), elipsă (semielipsă) şi coroană eliptică (coroană semieliptică)

a. Suprafața dreptunghiulară

Se consideră suprafața dreptunghiulară având laturile b , h şi un sistem de axe central identic cu cele două axe de simetrie, ca în figura 5.7.

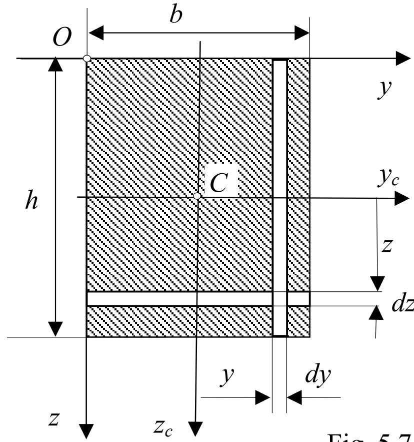


Fig. 5.7

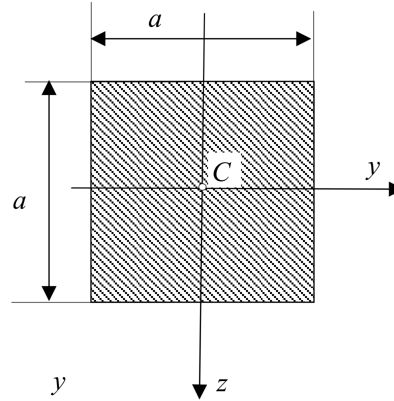


Fig. 5.8

Pentru această suprafață se definesc:

- *momentul de inerție axial* în raport cu axa Oy_c se scrie considerând aria elementară $dA = bdz$ de lungime b şi lățime dz, situată la distanța z de axa Oy_c:

$$I_{yc} = \int z^2 \cdot dA = b\int_{-h/2}^{+h/2} z^2 \cdot dz = \frac{bh^3}{12}. \tag{5.30}$$

- În mod analog se obține *momentul de inerție axial* în raport cu axa Oz_c

$$I_{zc} = \int y^2 \cdot dA = \int_{-b/2}^{+b/2} y^2 \cdot h \cdot dy = \frac{hb^3}{12}. \tag{5.31}$$

- *momentul de inerție polar* se obține ca suma celor două momente axiale:

$$I_C = I_y + I_z = \frac{A(b^2 + h^2)}{12} \tag{5.32}$$

  în care : $A=bh$ este aria suprafeței dreptunghiului.

- datorită simetriei secțiunii în raport cu axele Oy şi Oz *momentul de inerție centrifugal* I_{yz} este nul: $I_{yz} = 0$ (5.33)
- momentele de inerție față de un sistem de axe $Oy'z'$ rotit cu unghiul α față de sistemul de axe Oy_cz_c, conform relațiilor (5.23) sunt:

$$\begin{aligned} I_{y'} &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha \\ I_{z'} &= \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha \end{aligned} \tag{5.34}$$

b. Secțiunea pătrată

Se consideră suprafața pătrată de latură a şi un sistem de axe central care conține cele două axe de simetrie, ca în figura 5.8.

- momentele de inerție axiale şi polar se determină cu ajutorul relațiilor de mai sus în care $b=h=a$:

$$I_{yc}=I_{yc}=\frac{a^4}{12}\ ,\quad I_C=\frac{a^4}{6} \tag{5.35}$$

- momentele de inerție față de un sistem de axe $Oy'z'$ rotit cu unghiul α față de sistemul de axe Oy_cz_c, conform relațiilor (5.34) sunt constante:

$$I_{y'}=I_y=I_z=I_{z'} \tag{5.36}$$

c. Suprafața triunghiulară

Se consideră suprafața triungiulară şi un sistem de axe astfel ales încât axa Oy să coincidă cu baza triunghiului, iar axa Oz să treacă prin centrul de greutate C, ca în figura 5.9.

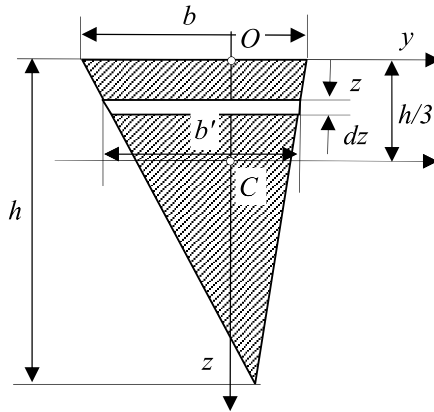


Fig. 5.9

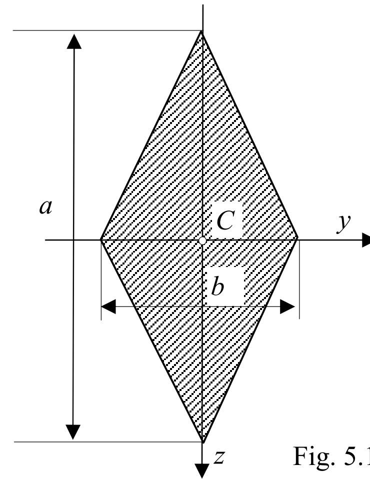


Fig. 5.10

Pentru a determina momentele de inerție față de sistemul de axe Oyz se consideră un element de arie dA de forma unei fâşii înguste cu baza b' şi înălțimea dz, paralelă cu axa Oy şi situată la distanța z față de baza triunghilui. Pe baza asemănării triunghiurilor având bazele b şi b' se scrie relația:

$$\frac{b'}{b}=\frac{h-z}{h}\Rightarrow\ b'=\frac{b}{h}(h-z). \tag{5.37}$$

Aria suprafeței elementare se scrie: $dA=b'\cdot dz=\frac{b}{h}(h-z)\cdot dz;$ (5.38)

- *momentul de inerție axial* față de axa *Oy* este:

$$I_y = \int z^2 \cdot dA = \int_0^h z^2 \frac{b}{h}(h-z)dz; \quad I_y = \frac{bh^3}{12}. \qquad (5.39)$$

- *momentul de inerție axial* în raport axa centrală Cy_c se determină cu ajutorul relației lui *STEINER*:

$$I_{y_C} = I_y - z_C^2 \cdot A \qquad \Rightarrow I_{yc} = \frac{bh^3}{36} \qquad (5.40)$$

d. Suprafața rombică

Se consideră suprafața rombică de diagonale *a* şi *b* şi un sistem de axe central *Oyz* care conține cele două axe de simetrie, ca în figura 5.10.

- *momentul de inerție axial* față de axa *Oy* este de două ori momentul de inerție al suprafeței triunghiului având ca bază diagonala de lungime *b*:

$$I_y = 2 \cdot \frac{b(a/2)^3}{12} \Rightarrow I_y = \frac{ba^3}{48} \qquad (5.41)$$

- În mod analog se obține *momentul de inerție axial* în raport cu axa *Oz:*

$$I_z = 2 \cdot \frac{a(b/2)^3}{12} \Rightarrow I_z = \frac{ab^3}{48} \qquad (5.42)$$

- datorită simetriei secțiunii în raport cu axele *Oy* şi *Oz momentul de inerție centrifugal* I_{yz} este nul: $I_{yz} = 0$ (5.43)

e. Suprafața hexagonală

Se consideră suprafața hexagonală şi un sistem de axe astfel ales încât originea lui să treacă prin centrul de greutate *C* şi să coincidă cu axele de simetrie ale hexagonului ca în figura 5.11. Pentru a determina momentele de inerție față de sistemul de axe *Oyz* se aplică formula lui *STEINER* pentru figurile simple ce formează hexagonul.

Pentru a calcula momentul de inerție față de axa Oy se descompune hexagonul într-un dreptunghi de laturi *a* şi $a\sqrt{3}$ şi un romb de diagonale *a* şi $a\sqrt{3}$ (fig.5.12):

$$I_y = \frac{a(a\sqrt{3})^3}{12} + \frac{a(a\sqrt{3})^3}{48} \qquad \Rightarrow I_y = \frac{5\sqrt{3}a^3}{16} \qquad (5.44)$$

Pentru a calcula momentul de inerție față de axa *Oz* se Oy se extrage dintr-un romb de diagonale *2a* şi $2a\sqrt{3}$ un romb de diagonale *a* şi $a\sqrt{3}$ (fig.5.12). Folosind relațiile de calcul a momentului de inerție pentru romb (5.42) se obține:

$$I_z = \frac{2a\sqrt{3} \cdot (2a)^3}{48} - \frac{a\sqrt{3} \cdot a^3}{48} \qquad \Rightarrow I_z = \frac{5\sqrt{3}a^3}{16} \qquad (5.45)$$

Se observă că cele două momente de inerție I_y şi I_z sunt egale.

Ca şi în cazul suprafeței pătrate , momentele de inerție rămân constante la rotirea sistemului de axe *Oyz*, cele două momente de inerție I_y şi I_z fiind egale .

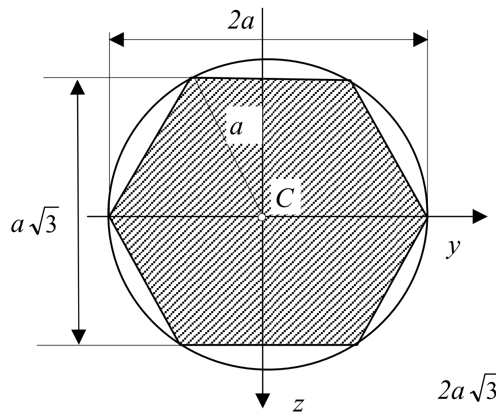


Fig. 5.11

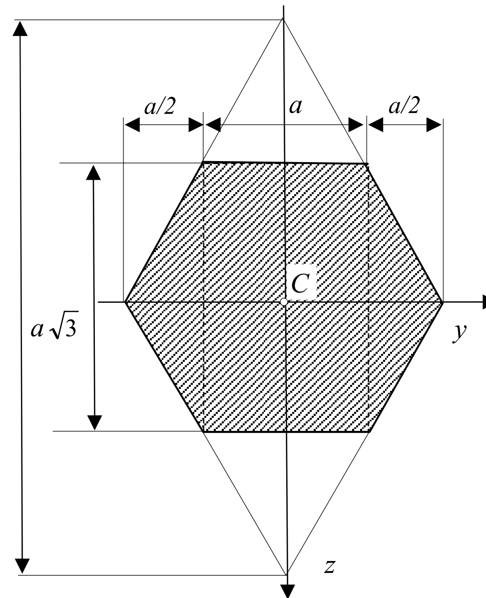


Fig. 5.12

f. Suprafaţa circulară şi semicirculară

Se consideră suprafaţa circulară de diametru *d* şi un sistem central de axe *Oyz* (fig.5.13).

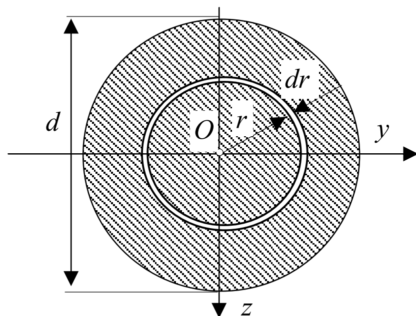


Fig. 5.13

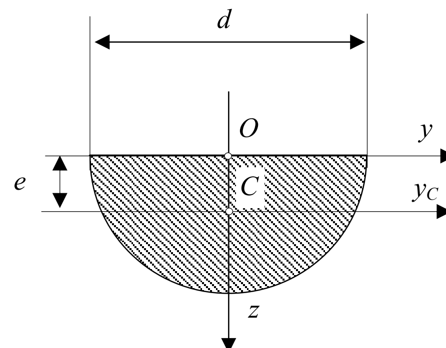


Fig. 5.14

Se consideră elementul de arie dA de forma unei coroane circulare de rază interioară r şi lățimea dr: $dA = 2\pi r \cdot dr$.

- Folosind relația (5.5) se obține *momentul de inerție polar*:

$$I_O = \int_A r^2 \cdot dA = \frac{\pi d^4}{32} \tag{5.46}$$

- Datorită simetriei suprafeței în raport cu orice axă ce trece prin O, *momentul de inerție centrifugal* este nul $I_{yz} = 0$ iar momentele de inerție axiale sunt egale:

$$I_O = I_y + I_z = 2I_y = 2I_z \tag{5.47}$$

Rezultă:
$$I_y = I_z = \frac{\pi d^4}{64} \tag{5.48}$$

Pentru *suprafața semicirculară* din figura 5.14, conform relației de calcul a momentelor de inerție axiale (5.4), momentele de inerție axiale I'_y şi I'_z reprezintă jumătate din momentele de inerție ale întregii secțiuni circulare:

$$I'_y = \frac{1}{2} I_y = \frac{\pi d^4}{128}; \quad I'_z = \frac{1}{2} I_z = \frac{\pi d^4}{128}; \tag{5.49}$$

Momentul de inerție axial față de axa Oy_C care trece prin centrul de greutate al suprafeței semicirculare situat la distanța e de axa Oy (fig.5.14):

$$e = \frac{2}{3}\frac{d}{2} \cdot \frac{2}{\pi} sin\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow e = \frac{2d}{3\pi} \tag{5.50}$$

se determină cu ajutorul relației lui *STEINER:*

$$I'_{yC} = I'_y - A^* e^2 = \frac{\pi d^4}{128} - \frac{\pi d^2}{8}\left(\frac{2d}{3\pi}\right)^2 \Rightarrow I'_{yC} = \frac{\pi d^4}{128}\left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right) \tag{5.51}$$

g. Suprafața inelară şi semiinelară circulară

Se consideră suprafața inelară de diametru interior d şi exterior D şi un sistem central de axe Oyz (fig.5.14).

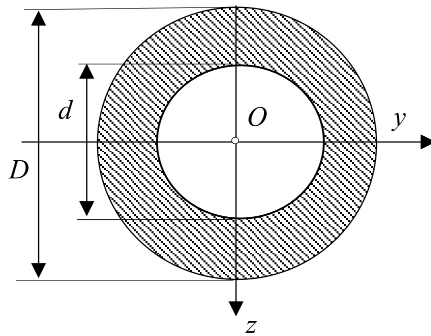


Fig. 5.15

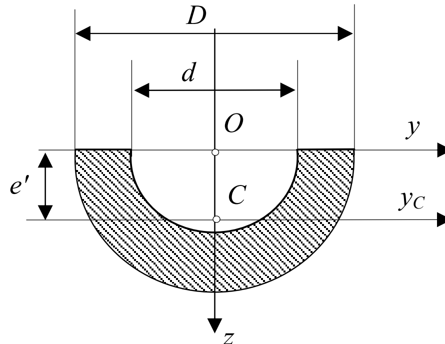


Fig. 5.16

Pentru această suprafață momentul de inerție se calculează astfel:

$$I_y = I_z = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{64} \tag{5.52}$$

Pentru *suprafața semiinelară* circulară din figura 5.16 momentele de inerție axiale I'_y şi I'_z reprezintă jumătate din momentele de inerție ale secțiunii inelare (5.52):

$$I'_y = \frac{1}{2} I_y = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{128}; \quad I'_z = \frac{1}{2} I_z = \frac{\pi\left(D^4 - d^4\right)}{128}; \tag{5.53}$$

Momentul de inerție axial față de oaxa Oy_C care trece prin centrul de greutate al suprafeței semicirculare situat la distanța *e'* de axa *Oy* (fig.5.16):

$$e' = \frac{A_1^* \cdot e_1 - A_2^* \cdot e_2}{A_1^* - A_2^*} \quad \Rightarrow e' = \frac{2}{18\pi}\frac{D^3 - d^3}{D^2 - d^2} \tag{5.54}$$

în care: $A_1^*,\ A_2^*$ sunt ariile celor două semicercuri de diametre *D* şi *d*.

$e_1 = \frac{2D}{3\pi},\ \ e_2 = \frac{2d}{3\pi}$, distanțele de la axa Oy la centrele de greutate.

Momentul de inerție axial față de axa Oy_C care trece prin centrul de greutate al suprafeței semiinelare circulare situat la distanța *e'* de axa *Oy* se determină cu ajutorul relației lui *STEINER*:

$$I'_{yC} = I'_y - A^* e'^2 = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{128} - \frac{1}{18\pi}\frac{(D^3 - d^3)^2}{D^2 - d^2} \tag{5.55}$$

h. Suprafața eliptică şi semieliptică

Se consideră suprafața eliptică de semiaxe *a* şi *b* şi un sistem central principal de axe *Oyz* (fig.5.13).

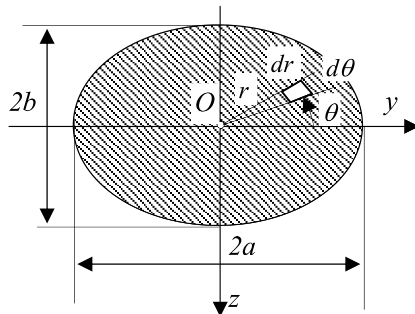


Fig. 5.17

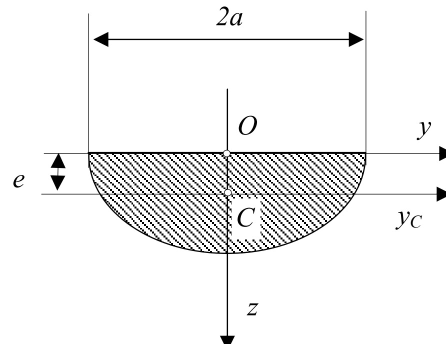


Fig. 5.18

Se consideră elementul de suprafață de forma unui segment de arie eliptic:

$$dA = a \cdot b \cdot dr \cdot r d\theta$$
$$r \in (0,1); \quad \theta \in (0,2\pi) \tag{5.56}$$

Cu ajutorul coordonatelor poare $r, \ \theta$ se pot exprima coordonatele y,z:

$$\begin{cases} y = ar \cdot sin\,\theta \\ z = br \cdot cos\,\theta \end{cases} \tag{5.57}$$

- *Aria suprafeței eliptice* se obține cu ajutorul relației:

$$A = \int_A dA = \int_0^1 \int_0^{2\pi} abr \cdot dr \cdot d\theta \quad \Rightarrow A = \pi ab \tag{5.58}$$

- *Momentele de inerție* axiale se determină cu ajutorul relațiilor (5.4):

$$I_y = \int_A z^2 \cdot dA = \int_0^1 \int_0^{2\pi} b^2 r^2 \cos^2\theta \cdot abr \cdot drd\theta \quad \Rightarrow I_y = \frac{\pi ab^3}{4}$$
$$I_z = \int_A y^2 \cdot dA = \int_0^1 \int_0^{2\pi} a^2 r^2 \sin^2\theta \cdot abr \cdot drd\theta \quad \Rightarrow I_z = \frac{\pi a^3 b}{4} \tag{5.59}$$

Pentru *suprafața semieliptică* din figura 5.18, conform relației de calcul a momentelor de inerție axiale (5.4), momentele de inerție axiale I'_y şi I'_z reprezintă jumătate din momentele de inerție ale întregii secțiuni eliptice:

$$I'_y = \frac{1}{2} I_y = \frac{\pi ab^3}{8}; \quad I'_z = \frac{1}{2} I_z = \frac{\pi a^3 b}{8}; \tag{5.60}$$

Momentul de inerție axial al suprafeței semieliptice față de oaxa Oy_C care trece prin centrul de greutate C se determină astfel:

- se determină distanța e de axa Oy la axa Oy_c (fig.5.18):

$$e = \frac{S_y^*}{A^*}; \quad S_y^* = \int_0^1 \int_0^{\pi} br\cos\theta \cdot abr \cdot dr \cdot d\theta \quad \Rightarrow S_y^* = \frac{2}{3} ab^2$$
$$A^* = \frac{\pi ab}{2} \qquad \Rightarrow \qquad e = \frac{4b}{3\pi} \tag{5.61}$$

- se determină momentul de inerție axial față de oaxa Oy_C cu ajutorul relației lui *STEINER*:

$$I'_{yC} = I'_y - A^* e^2 = \frac{\pi ab^3}{8} - \frac{\pi ab}{2}\left(\frac{4a}{3\pi}\right)^2 \quad \Rightarrow I'_{yC} = \frac{\pi ab^3}{8}\left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right) \tag{5.62}$$

În mod analog se determină şi momentul de inerție pentru semielipsa de semiaxă a față de axa Oz:

$$I'_{zC} = \frac{\pi a^3 b}{8}\left(1 - \frac{64}{9\pi^2}\right) \tag{5.63}$$

k. Suprafața inelară şi semiinelară eliptică

Pentru o suprafață inelară eliptică (coroană eliptică) momentul de inerție se calculează scăzând momentele de inerție axiale corespunzătoare celor două suprafețe eliptice de semiaxe a_1, b_1 şi a_2, b_2 aşa cum rezultă din relația de calcul (5.4) şi figura 5.19:

$$I_y = \frac{\pi(a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3)}{4}$$
$$I_z = \frac{\pi(a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2)}{4} \tag{5.64}$$

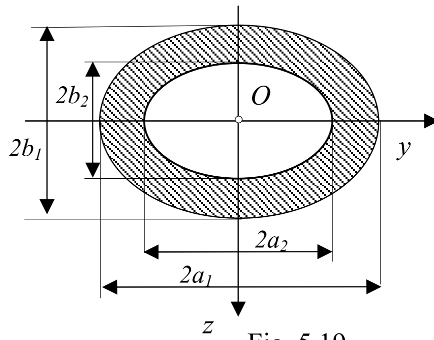


Fig. 5.19

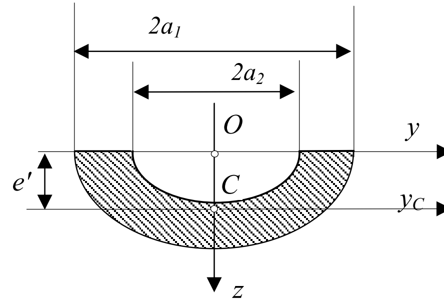


Fig. 5.20

Pentru *suprafața semiinelară* eliptică din figura 5.20 momentele de inerție axiale I'_y şi I'_z reprezintă jumătate din momentele de inerție ale secțiunii inelare:

$$I'_y = \frac{\pi(a_1 b_1^3 - a_1 b_1^3)}{8}$$
$$I'_z = \frac{\pi(a_1^3 b_1 - a_1^3 b_1)}{8} \tag{5.65}$$

Momentul de inerție axial față de oaxa Oy_C care trece prin centrul de greutate al suprafeței semiinelare C situat la distanța e' de axa Oy (fig.5.10):

$$e' = \frac{A_1^* \cdot e_1 - A_2^* \cdot e_2}{A_1^* - A_2^*} \tag{5.66}$$

în care: A_1^*, A_2^* sunt ariile celor două semielipse;

$e_1 = \frac{4b_1}{3\pi}$, $e_2 = \frac{4b_2}{3\pi}$, distanțele de la axa Oy la centrele lor de greutate.

Momentul de inerție axial față de axa Oy_C care trece prin centrul de greutate al suprafeței semiinelare circulare situat la distanța e' de axa Oy se determină cu ajutorul relației lui STEINER:

$$I'_{yc} = I'_y - A^*(e')^2 \quad \Rightarrow I'_{yc} = \frac{\pi(a_1 b_1^3 - a_2 b_2^3)}{8} - \frac{8}{9\pi} \frac{(a_1 b_1^2 - a_2 b_2^2)^2}{a_1 b_1 - a_2 b_2} \tag{5.67}$$

5.2.6. Caracteristici geometrice ale suprafețelor compuse

Pentru calculul caracteristicilor geometrice ale unei suprafețe compuse se parcurg următoarele etape:

1. se descompune suprafața în suprafețe simple;
2. se determină centrul de greutate al suprafeței compuse;
3. se calculează momentele de inerție ale suprafețelor simple în raport cu axele care trec prin centrele lor de greutate;
4. se determină momentele de inerție în raport cu sistemul de axe ce trece prin centrul de greutate al secțiunii compuse pentru fiecare suprafață simplă şi se însumează rezultatele obținute.

Aplicația 5.1

Pentru suprafața compusă din figura 5.21 se cere să se determine:

- momentele de inerție axiale, polare şi centrifugale față de sistemul de axe central paralel cu sistemul de axe dat *Oyz;*
- direcțiile şi momentele de inerție principale.

Rezolvare

Figura compusă poate fi descompusă în două suprafețe dreptunghiulare simple având centrele de greutate C_1 şi C_2. Față de sistemul de axe *Oyz* se determină:

1. poziția centrului de greutate *C* al suprafeței compuse ;
2. momentele de inerție axiale şi centrifugale ;

Față de sistemul de axe central Cy_cz_c se determină:

3. momentele de inerție axiale şi centrifugale;
4. direcțiile principale;
5. momentele de inerție principale.

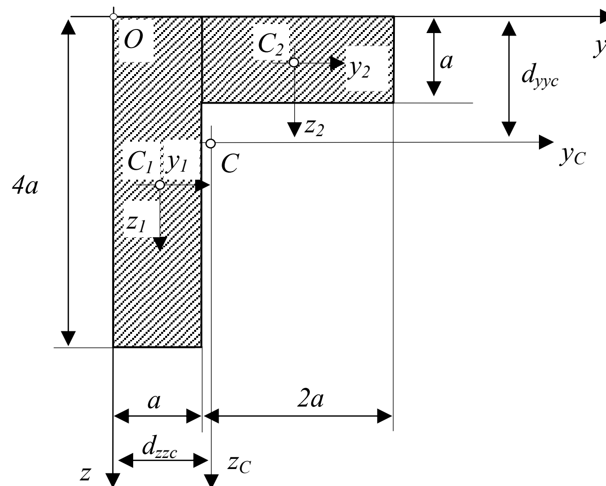


Fig. 5.21

1. Poziția centrului de greutate al suprafeței compuse

Se notează cu:

- C_1 și respectiv C_2 centrele de greutate ale celor două suprafețe dreptunghiulare simple (fig. 5.21);
- d_{yy1}, d_{zz1}, d_{yy2}, d_{zz2}, d_{yyc} și d_{zzc} distanțele dintre axele paralele corespunzătoare: *Oy și* C_1y_1*, Oz și* C_1z_1*, Oy și* C_2y_2*, Oz și* C_2z_2*, Oy și* Cy_c*,* respectiv *Oz și* Cz_c ;
- A_1 și A_2 ariile celor două dreptunghiuri.

Poziția centrului de greutate al suprafeței se calculează cu ajutorul relațiilor:

$$d_{zz_C} = \frac{A_1 \cdot d_{zz_1} + A_2 \cdot d_{zz_2}}{A_1 + A_2} = \frac{4a^2 \cdot 0{,}5a + 2a^2 \cdot 2a}{4a^2 + 2a^2} \quad \Rightarrow d_{zz_C} = a$$
$$d_{yy_C} = \frac{A_1 \cdot d_{yy_1} + A_2 \cdot d_{yy_2}}{A_1 + A_2} = \frac{4a^2 \cdot 2a + 2a^2 \cdot 0{,}5a}{4a^2 + 2a^2} \quad \Rightarrow d_{yy_C} = 1{,}5a \qquad (5.68)$$

2. Momentul de inerție axial al suprafeței compuse față de axa Oy

Momentele de inerție sunt notate cu doi indici: cel superior se referă la numărul suprafeței simple iar cel inferior la axa în raport cu care se calculează:

- *Momentul de inerție al suprafeței dreptunghiulare 1* față de axa C_1y_1 care trece prin centrul său de greutate este:

$$I_{y_{c1}}^{(1)} = \frac{64a^4}{12}. \qquad (5.69)$$

- *Momentul de inerție față de axa Oy* se determină utilizând relația lui *STEINER* pentru translația axelor, distanța fiind $d_{y_1y} = 2a$:

$$I_y^{(1)} = I_{y_{c1}}^{(1)} + A_1 \cdot d_{y_1y}^2 = \frac{64a^4}{12} + 4a^2(2a)^2 \quad \Rightarrow I_y^{(1)} = \frac{256a^4}{12}. \qquad (5.70)$$

- *Momentul de inerție al suprafeței dreptunghiulare 2* față de axa C_2y_2 care trece prin centrul său de greutate este :

$$I_{y_{c2}}^{(2)} = \frac{2a \cdot a^3}{12} \quad \Rightarrow I_{y_{c2}}^{(2)} = \frac{2a^4}{12}; \qquad (5.71)$$

- *Momentul de inerție față de axa Oy* se determină utilizând relația lui *STEINER* distanța fiind $d_{y_2y} = a/2$:

$$I_y^{(2)} = I_{y_{c2}}^{(2)} + A_2 \cdot d_{y_2y}^2 = \frac{2a^4}{12} + 2a^2\left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow I_y^{(2)} = \frac{8a^4}{12}. \qquad (5.72)$$

- *Momentul de inerție al suprafeței compuse* în raport cu axa *Oy* se obține astfel:

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = 22a^4 \qquad (5.73)$$

Momentul de inerție axial al suprafeței compuse față de Oz:

- *Momentul de inerție al suprafeței dreptunghiulare 1*, față de axa *Oz* este:

$$I_{z_{c1}}^{(1)} = \frac{4a(a)^3}{12} \quad \Rightarrow I_{z_{c1}}^{(1)} = \frac{4a^4}{12} \qquad (5.74)$$

$$I_z^{(1)} = I_{z_{c1}}^{(1)} + A_1 \cdot d_{z_1 z}^2 = \frac{4a^4}{12} + 4a^2(0{,}5a)^2 \quad \Rightarrow I_z^{(1)} = \frac{16a^4}{12}. \qquad (5.75)$$

- *Momentul de inerție al suprafeței dreptunghiulare 2*, față de axa *Oz* este:

$$I_{z_{c2}}^{(2)} = \frac{a \cdot (2a)^3}{12} \qquad \Rightarrow I_{z_{c2}}^{(2)} = \frac{8a^4}{12}; \qquad (5.76)$$

$$I_z^{(2)} = I_{z_{c2}}^{(2)} + A_2 \cdot d_{z_2 z}^2 = \frac{8a^4}{12} + 2a^2(2a)^2 \quad \Rightarrow I_z^{(2)} = \frac{104a^4}{12} \qquad (5.77)$$

- *Momentul de inerție al suprafeței compuse față de Oz* se obține prin însumarea valorilor obținute pentru cele două suprafețe simple:

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} = 10a^4 \qquad (5.78)$$

Momentele de inerție centrifugale al suprafeței compuse:

- *Momentele de inerție centrifugale ale suprafeței dreptunghiulare 1* față de axele centrale C_1y_1 şi C_1z_1 sunt nule deoarece acestea sunt axe de simetrie.
- *Momentul de inerție centrifugal al suprafeței dreptunghiulare 1* față de axele *Oy* şi *Oz,* se determină utilizând relația lui *STEINER* pentru translația axelor:

$$I_{yz}^{(1)} = I_{yz_{c1}}^{(1)} + A_1 \cdot d_{z_1 z} \cdot d_{y_1 y} = 4a^4 \qquad (5.79)$$

- Momentul de inerție centrifugal al suprafeței dreptunghiulare 2, față de axele *Oy* şi *Oz:*

$$I_{yz}^{(2)} = I_{yz_{c2}}^{(2)} + A_2 \cdot d_{z_2 z} \cdot d_{y_2 y} = 2a^4 \qquad (5.80)$$

- *Momentul de inerție centrifugal al suprafeței compuse față de axele Oy şi Oz* se obține prin însumarea valorilor obținute mai sus:

$$I_{yz} = I_{yzc}^{(1)} + I_{yzc}^{(2)} = 6a^4 \qquad (5.81)$$

3. Caracteristicile suprafeței compuse față de axele centrale Cy_c şi Cz_c

Pentru determinarea momentelor de inerție axiale şi centrifugale se utilizează relațiile lui *STEINER* în care se introduc distanțele:

$$d_{zz_C} = a; \quad d_{yy_C} = 1{,}5a \qquad (5.82)$$

- *Momentele de inerție axiale ale suprafeței compuse față de axele* Cz_c şi Cy_c:

$$I_{z_C} = I_z - A \cdot d_{zz_C}^2 = 10a^4 - 6a^2(a)^2 \quad \Rightarrow I_{z_C} = 4a^4 \qquad (5.83)$$

$$I_{y_C} = I_y - A \cdot d_{yy_C}^2 = 22a^4 - 6a^2(1{,}5a)^2 \quad \Rightarrow I_{y_C} = 8{,}5a^4 \qquad (5.84)$$

- Momentul de inerție centrifugal al suprafeței compuse față de axele centrale Cz_c şi Cy_c:

$$I_{yz_C} = I_{yz} - A \cdot d_{zz_C} \cdot d_{yy_C} = 6a^4 - 6a^2(a)(1{,}5a) \Rightarrow I_{yz_C} = -3a^4 \qquad (5.85)$$

4. Direcțiile principale

- Pentru determinarea direcțiilor principale se determină unghiul α cu ajutorul relației (5.27):

$$tg2\alpha = -\frac{2I_{yz_C}}{I_{y_C} - I_{z_C}} = 1{,}333 \;\Rightarrow \alpha_1 = 26{,}565^0 \qquad (5.86)$$
$$\alpha_2 = 116{,}565^0$$

În figura 5.22 sunt reprezentate cele două direcții principale.

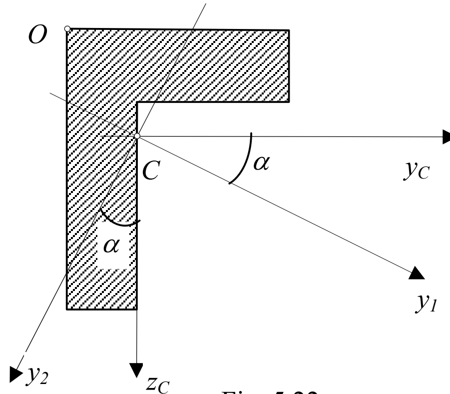


Fig. 5.22

5. Momentele de inerție principale

Momentele de inerție principale se determină față de direcțiile principale Cz_1 și Cy_1 utilizând relația (5.28):

$$I_{1,2} = \frac{I_{y_C} + I_{z_C}}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_{y_C} - I_{z_C}\right)^2 + 4I_{yz_C}^2} = \frac{12{,}5a^4}{2} \pm \frac{7{,}5a^4}{2} \qquad (5.87)$$
$$\Rightarrow \quad I_1 = 10a^4 \;\; ; \quad I_2 = 2{,}5a^4$$

5.3. Relația lui NAVIER pentru calculul tensiunilor la încovoierea pură simetrică

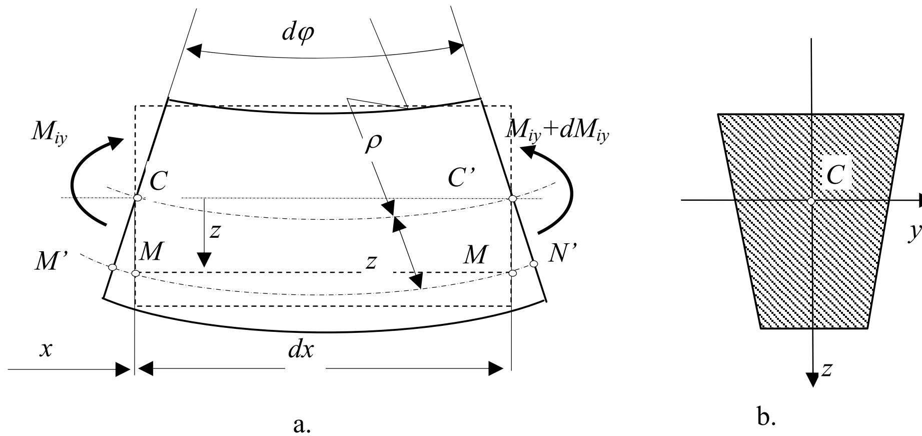
Se consideră o bară dreaptă solicitată la încovoiere având secțiunea constantă pe toată lungimea ei. Ipotezele de lucru pentru studiul încovoierii pure sunt:

- *materialul barei este omogen și izotrop* și respectă *legea lui Hooke* (proporționalitatea între tensiuni și deformații*)*;
- *ipoteza încovoierii simetrice:* bara este solicitată de cupluri de forțe situate într-un plan *principal* de simetrie (care conține axa longitudinală și o axă principală de inerție ca în figura 5.23) și într-o secțiune oarecare apar numai eforturi încovoietoare;

- *ipoteza lui Bernoulli* sau a secțiunii transversale plane şi normale la axa barei înainte şi după deformație;
- *ipoteza deformațiilor mici* în raport cu dimensiunile barei;
- *ipoteza stării plane de tensiuni:* fibrele longitudinale ale barei sunt supuse unor tensiuni normale de întindere şi compresiune şi suferă deformații specifice longitudinale, iar tensiunile şi deformațiile măsurate pe direcții perpendiculare pe aceste fibre se neglijează.

Se consideră o bară dreaptă supusă la încovoiere pură astfel încât în două secțiuni aflate la distanța dx acționează eforturile încovoietoare M_{iy} respectiv $M_{iy}+dM_{iy}$.

Fie un element de bară de lungime dx aflat la distanța x de capătul barei, de formă prismatică, ca în figura 5.23.



a. b.

Fig 5.23

S-a reprezentat cu linie întreruptă fibrele extreme şi secțiunile elementului înainte de deformare. Se aproximează porțiunea *CC'* din axa longitudinală a barei cu un arc de cerc de rază ρ. Se fac notațiile:

- *MN* – fibra situată la distanța z față de axa longitudinală *CC'* a barei înainte de deformare;
- *M'N'* – fibra situată la distanța z față de axa longitudinală *CC'* după deformare;
  ρ– raza de curbură a fibrei medii deformate. Lungimea fibrei medii deformate *CC'* se aproximează cu cea a arcului de cerc de rază ρ: $dx = \rho d\varphi$;
- ω_y – rotirea specifică sau rotirea relativă a celor două secțiuni aflate la distanța dx:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx} = \omega_y ;$$

Ținând seama notațiile şi ipotezele de mai sus, deformația specifică se scrie:

$$\varepsilon = \frac{\Delta(MN)}{MN} = \frac{(\rho + z)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} \quad \Rightarrow \varepsilon = \frac{z}{\rho} \tag{5.88}$$

Considerând forma fibrei medii deformate o funcţie *w(x)* de două ori derivabilă, *raza de curbură ρ (x)* se scrie cu ajutorul relaţiei din geometria diferenţială:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{w''}{\sqrt{1+w'^2}}\,. \qquad (5.89)$$

Folosind ipoteza deformaţiilor mici se neglijează termenul $w'=\varphi$ (unghiul de rotire al secţiunii în radiani) în raport cu 1: $w'^2\cong 0$ şi relaţia (5.89) devine:

$$\omega_y=\frac{1}{\rho}=\frac{d^2w}{dx^2} \qquad (5.89')$$

Ţinând seama de ipoteza legii lui Hooke, tensiunea normală σ corespunzătoare deformaţiei specifice a fibrei *MN* dată de relaţia (5.88) se scrie:

$$\sigma=E\omega_y\cdot z \qquad (5.90)$$

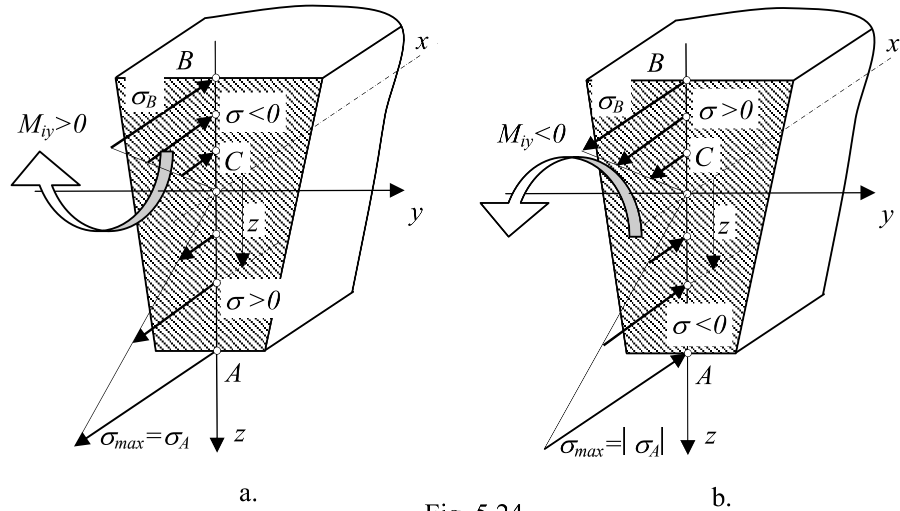


Fig. 5.24

Pentru un moment pozitiv $M_{iy}>0$ distribuţia tensiunilor normale σ dată de relaţia 5.90 este liniară în raport cu *z* şi sunt pozitive pentru zona secţiunii corespunzătoare lui $z>0$ şi negative pentru zona secţiunii $z<0$ (fig.5.24.a).

Pentru $M_{iy}<0$ distribuţia se inversează (fig. 5.24.b).

Conform teoremei de echivalenţă a tensiunilor, eforturile secţionale sunt rezultatul reducerii forţelor elementare în centrul de greutate *C* al secţiunii.

În cazul încovoierii pure, întrucât eforturile N şi M_{iz} sunt nule iar efortul M_{iy} este nenul, se pot scrie relaţiile:

$$N=\int_A \sigma\,dA=0;\qquad M_{iy}=\int_A z\cdot\sigma\,dA\neq 0;\qquad M_{iz}=\int_A y\cdot\sigma\,dA=0 \qquad (5.91)$$

Din prima relaţie (5.91) rezultă:

$$\int_A E\,\omega_y\, z dA = 0 \quad \Rightarrow E\,\omega_y \int_A z dA = 0 \quad \Rightarrow S_y = 0 \qquad (5.92)$$

Relaţia (5.92) arată că axa *Oy* trece prin centrul de greutate *C* al secţiunii, iar relaţia (5.90) arată că tensiunile normale de încovoiere σ sunt nule în punctele situate pe axa *Oy* (*z=0*), de aceea axa *Oy* se mai numeşte şi *axa neutră.*

A doua relaţie (5.91) se mai scrie sub forma:

$$\int_A E\,\omega_y\, z^2 dA = M_{iy} \quad \Rightarrow E\,\omega_y\, I_y = M_{iy} \quad \Rightarrow \omega_y = \frac{M_{iy}}{E\ I_y} \qquad (5.93)$$

Relaţia (5.93) arată că *rotirea specifică* ω_y este direct proporţională cu momentul încovoietor M_{iy} şi invers proporţională cu *rigiditatea la încovoiere* EI_y.

Înlocuind în relaţia (5.90) se obţine *relaţia lui NAVIER* pentru calculul tensiunilor normale la încovoierea pură simetrică:

$$\sigma = \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z \qquad (5.94)$$

Tensiunea normală la încovoierea pură în orice punct al secţiunii este direct proporţională cu momentul încovoietor şi cu distanţa *z* faţă de axa neutră şi invers proporţională cu momentul de inerţie axial I_y.

Din a treia relaţie (5.91) rezultă momentul centrifugal $I_{yz}=0$, ceea ce confirmă ipoteza că axele *Oy* şi *Oz* sunt direcţii principale de inerţie ale secţiunii transversale (prin ipoteză s-a stabilit axa *Oz* ca axă de simetrie a secţiunii).

Tensiunile maxime dintr-o secţiune a barei se obţin în punctele cele mai depărtate faţă de axa neutră (fig.5.24):

$$\sigma_{max} = \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_{max} \quad sau \quad \sigma_{max} = \frac{M_{iy}}{W_y} \qquad (5.95)$$

în care z_{max} este distanţa maximă de la axa neutră la punctul cel mai depărtat şi W_y este *modul de rezistenţă la încovoiere* :

$$W_y = \frac{I_y}{z_{max}}. \qquad (5.96)$$

5.4. Calcule de rezistenţă la solicitarea de încovoiere

Se consideră o bară dreaptă supusă la încovoiere având o anumită lungime şi dimensiuni ale secţiunii transversale, încărcată cu un sistem de forţe şi cu anumite legături la mediul fix. În funcţie de datele şi cerinţele problemei (datele de intrare şi de ieşire) se definesc următoarele calculule de rezistenţă: calculul de verificare, calculul de dimensionare şi calculul forţei capabile.

5.4.1. Calcule de verificare

Pentru calculele de verificare, *datele de intrare* sunt: caracteristicile fizice ale materialului, lungimea şi dimensiunile secţiunii barei, modul de legătură cu mediul fix, schema de încărcare şi mărimea sarcinilor exterioare. *Datele de ieşire* sunt: tensiunea

maximă din secțiunea periculoasă care trebuie să fie mai mică decât tensiunea admisibilă, conform organigramei din figura 5.25.

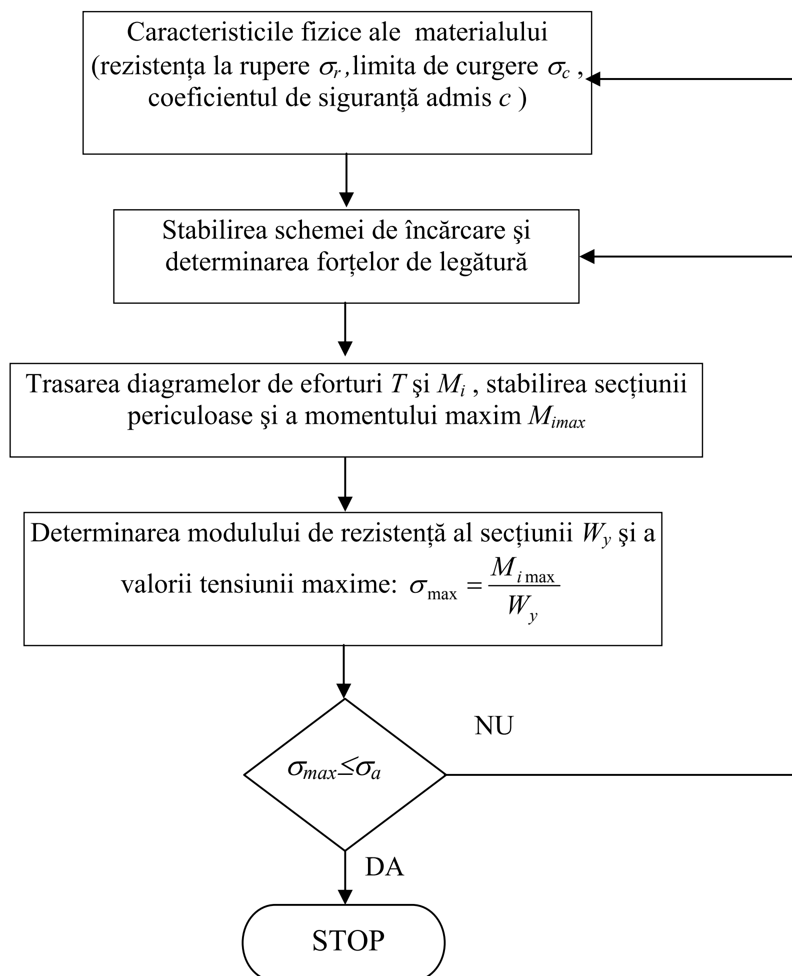


Fig. 5.25. Organigrama pentru calculul de verificare la încovoiere

5.4.2. Calcule de dimensionare

Pentru calculele de dimensionare, *datele de intrare* sunt: caracteristicile fizice ale materialului, lungimea şi forma secţiunii transversale a barei, modul de legătură cu mediul fix, schema de încărcare şi mărimea sarcinilor exterioare. *Datele de ieşire* sunt: valoarea parametrului secţiunii (*s*) ce rezultă din condiţia ca tensiunea maximă din secţiunea periculoasă să fie mai mică decât tensiunea admisibilă (fig.5.26).

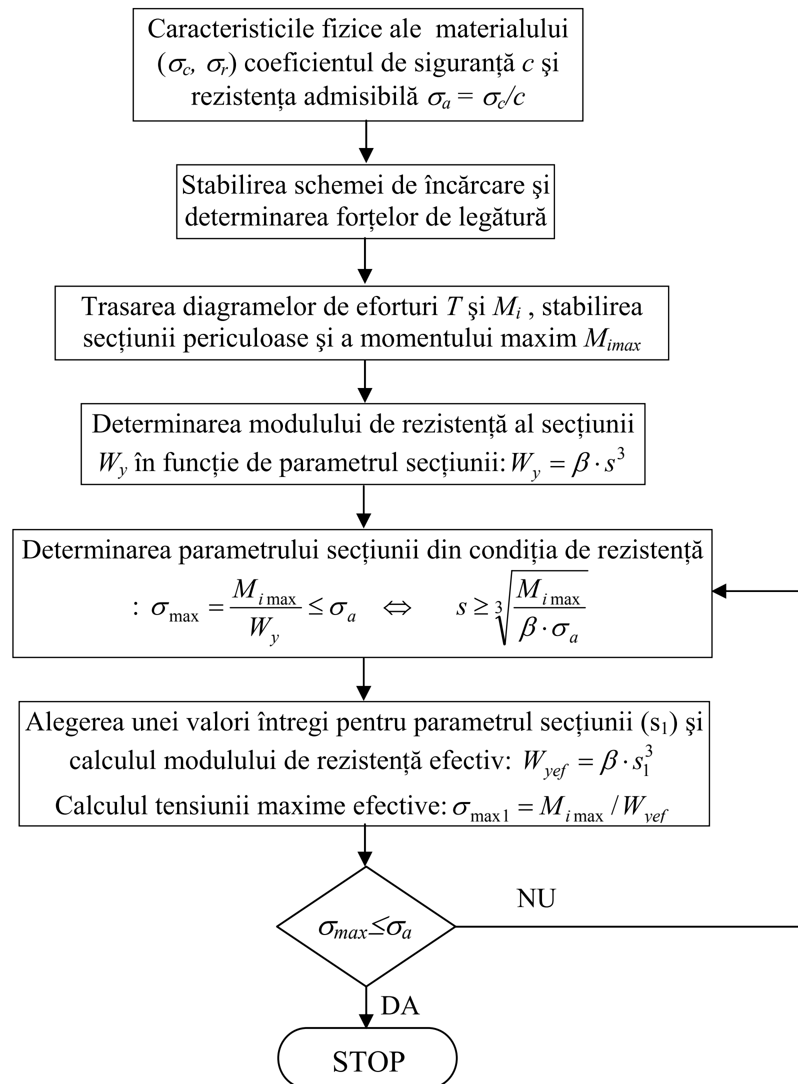


Fig. 5.26. Organigrama calculului de dimensionare la încovoiere

5.4.3. Calculul sarcinii capabile

Pentru calculul sarcinii capabile *datele de intrare* sunt: caracteristicile fizice ale materialului, lungimea, forma şi dimensiunile secţiunii barei, modul de legătură cu mediul fix, schema de încărcare cu sarcini exterioare. *Datele de ieşire* sunt: valoarea maximă a sarcinii sau *sarcina capabilă* P_{cap} ce rezultă din condiţia ca tensiunea maximă din secţiunea periculoasă să fie mai mică decât tensiunea admisibilă conform organigramei din figura 5.27.

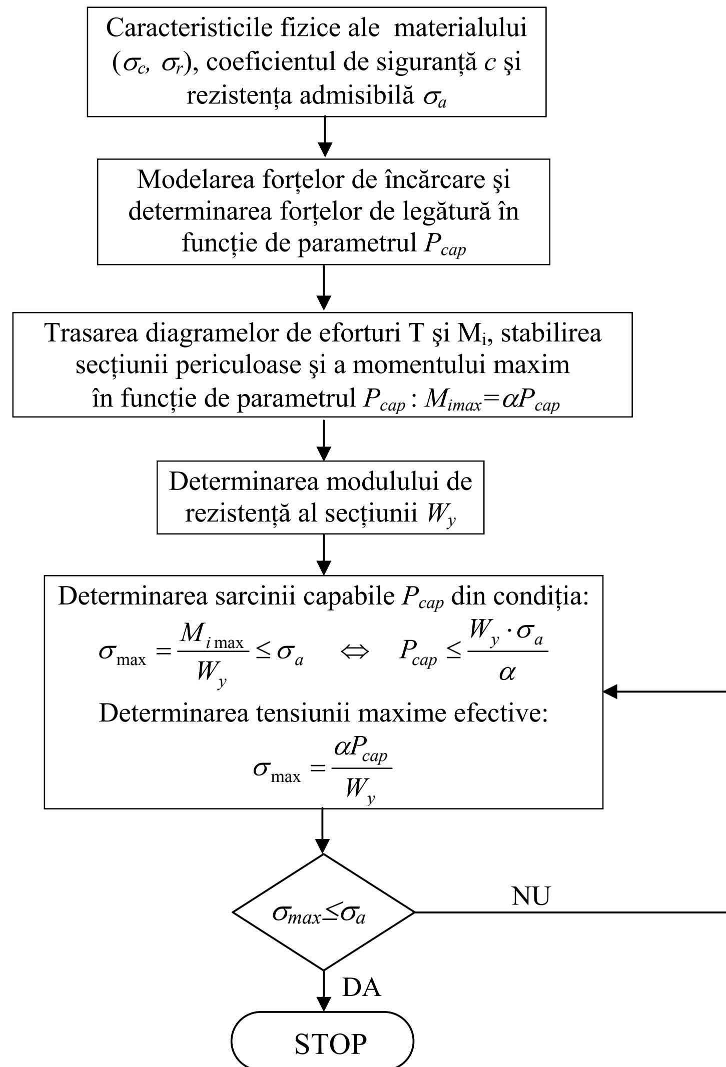


Fig. 5.27. Organigrama pentru calculul forţei capabile la încovoiere

5.5. Relația lui JURAVSKI pentru calculul tensiunilor tangențiale la încovoierea simplă

O bară este supusă la *încovoiere simplă* dacă într-o secțiune a sa se dezvoltă atât eforturi încovoietoare cât şi eforturi tăietoare. Se consideră un element de bară de lungime *dx* aflat la distanța *x* de capătul ei şi o secțiune longitudinală *ABB'A'* de lățime *AB=b* paralelă cu planul *Oxy* , situată la distanța *z* față de *Oxy,* ca în figura 5.28.

Fie un punct *M* situat pe linia *AB* şi aria elementară *dA* în jurul punctului *M* aflată pe suprafața secțiunii transversale. În cazul *încovoierii simple* pe această suprafață acționează atât tensiunea normală σ_x cât şi tensiunea tangențială τ_{zx} (fig. 5.28). Conform *teoremei dualității tensiunilor tangențiale,* pe suprafața secțiunii longitudinale *ABB'A'* acționează tensiunea tangențială τ_{xz} egală în valoare absolută cu tensiunea tangențială τ_{zx} :

$$\tau_{xz}=\tau_{zx} \qquad (5.97)$$

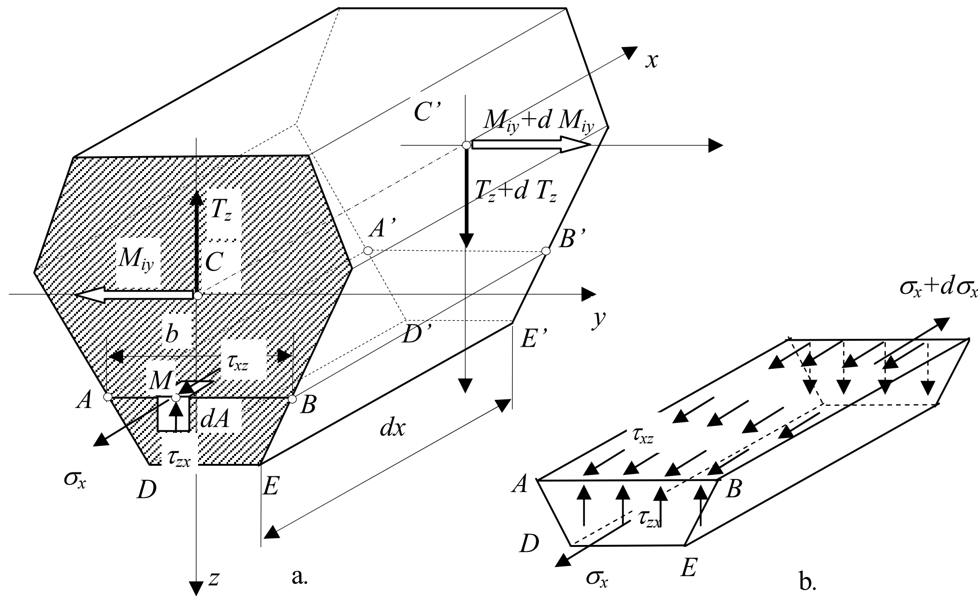


Fig 5.28

Conform teoremei de echivalență a tensiunilor, eforturile secționale M_{iy} şi T_z reprezintă elementele torsorului de reducere a forțelor elementare corespunzătoare tensiunilor σ_x şi τ_{zx} în centrul de greutate *C* al secțiunii:

$$T_z=\int_A \tau_{zx}dA\neq 0; \qquad M_{iy}=\int_A z\cdot\sigma\cdot dA\neq 0 \qquad (5.98)$$

Întrucât eforturile axiale sunt nule în secțiunea barei, avem relația:

$$\int_A \sigma dA = 0; \tag{5.99}$$

Ecuația de echilibru a forțelor care acționează asupra elementului de bară inferior de lungime *dx* delimitat de planul longitudinal *ABB'A'* se scrie (fig.5.28):

$$-\int_{A^*} \sigma\, dA - \tau_{xz}\cdot b\cdot dx + \int_{A^*}(\sigma + d\sigma)dA = 0$$

$$-\int_{A^*} \frac{M_{iy}}{I_y} z\cdot dA - \tau_{xz}\cdot b\cdot dx + \int_{A^*}\left(\frac{M_{iy}+dM_{iy}}{I_y}\right) z\cdot dA = 0 \tag{5.100}$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{xz}\cdot b\cdot dx = \frac{dM_{iy}}{I_y}\int_{A^*} z\, dA$$

în care A^* este aria secțiunii inferioare delimitată de planul longitudinal *ABB'A'*.

Ținând seama că expresia momentului static al suprafeței secțiunii *ABED* față de axa neutră *Cy* se scrie :

$$S_y^* = \int_{A^*} z\, dA \tag{5.101}$$

şi că între eforturile T_z şi M_{iy} există relația diferențială:

$$T_z = \frac{dM_{iy}}{dx} \tag{5.102}$$

rezultă *formula lui JURAVSKI* pentru calculul tensiunilor tangențiale la încovoierea simplă:

$$\tau_{xz} = \frac{T_z\cdot S_y^*}{b\cdot I_y} \tag{5.103}$$

Observații:

- Tensiunile tangențiale τ_{zx} de-a lungul liniei *DE* a suprafeței secțiunii transversale din figura 5.28 sunt nule deoarece momentul static S_y^* al ariei situată sub linia *DE* este nul;
- tensiunile tangențiale de-a lungul axei neutre a secțiunii (*Cy*) sunt maxime întrucât momentul static al secțiunii situată sub axa neutră este maxim: momentul static al secțiunii față de axa neutră *Cy* este nul fiind format din suma momentelor statice al celor două jumătăți ale secțiunii:

  $S_y = S_{y1}^* + S_{y2}^* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad S_{y1}^* = -S_{y2}^*$

Aplicația 5.2

Să se determine legea de variație a tensiunilor tangențiale τ_{zx} pe o secțiune transversală dreptunghiulară, circulară şi pătrată, față de axele principale de inerție în funcție de distanța z până la axa neutră.

a. secțiunea dreptunghiulară (fig.5.29).

Tensiunile tangențiale pe linia *AB* situată la distanța z de axa neutră *Cy* se determină cu ajutorul relației lui *JURAVSKI* (5.103), în care momentul static S_y^* al secțiunii situată sub linia *AB* (fig. 5.29) are expresia:

$$S_y^* = A^* \cdot z_{C'} = b\left(\frac{h}{2} - z\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} + z\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) \tag{5.104}$$

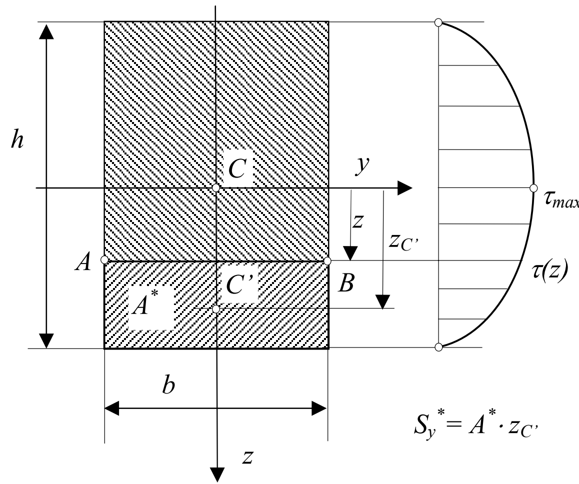


Fig. 5.29

Înlocuind în relația tensiunii tangențiale (5.103) se obține legea de variație a tensiunii funcție de coordonata z:

$$\tau_{zx} = T_z \frac{S_y^*}{bI_y} = \frac{3T_z}{2bh}\left[1 - 4\left(\frac{z}{h}\right)^2\right] \tag{5.105}$$

Legea de variație (5.105) este o funcție de gradul al II lea având valoarea maximă pentru $z=0$:

$$\tau_{max} = \frac{3T_z}{2A} \tag{5.106}$$

b. secțiunea circulară (fig.5.30).

Tensiunile tangențiale pe linia *AB* situată la distanța *z* de axa neutră *Cy* se determină cu ajutorul relației lui *JURAVSKI* (5.103), în care momentul static S_y^* al secțiunii situată sub linia *AB* are expresia (fig. 5.30):

$$S_y^* = A^* \cdot z_{C'} \tag{5.107}$$

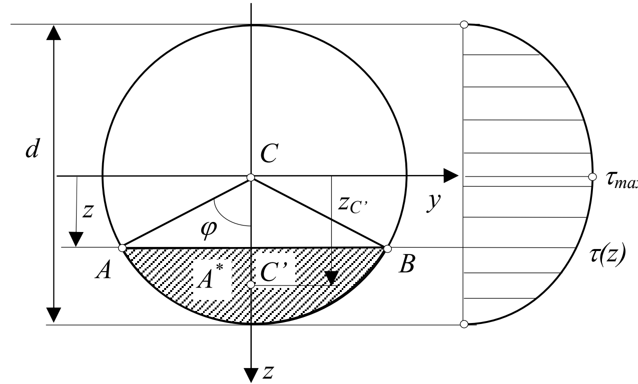


Fig. 5.30

Aria secțiunii situată sub linia *AB* şi distanța până la centrul ei de greutate se scriu în funcție de unghiul φ astfel:

$$A^* = \frac{d^2}{4}\left(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\right)$$
$$z_{C'} = \frac{d\sin\varphi(1-\cos^2\varphi)}{3(\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)} \tag{5.108}$$

Înlocuind în relația (5.107) se obține:

$$S_y^* = \frac{d^3}{12}\sin^3\varphi\,; \tag{5.109}$$

Lungimea liniei *AB* este: $b = d\sin\varphi$ (5.110)

Înlocuind în relația (5.103) se obține tensiunea tangențială în funcție de unghiul φ:

$$\tau_{zx} = \frac{16T_z}{3\pi d^2}\sin^2\varphi \tag{5.111}$$

Legea de variație a tensiunilor tangențiale τ_{zx} în funcție de unghiul φ este reprezentată în fig. 5.30 şi admite un maxim pentru $\varphi=\pi/2$:

$$\tau_{max} = \frac{16T_z}{3\pi d^2} = \frac{4}{3}\frac{T_z}{A} \tag{5.112}$$

c. secțiunea pătrată având axele după direcția diagonalelor.

Pentru o secțiune pătrată având axele după direcția diagonalelor, tensiunile tangențiale pe linia *AB* situată la distanța *z* de axa neutră *Cy* se determină cu ajutorul relației (5.103) în care momentul static S_y^* are expresia (fig. 5.31):

$$S_y^* = A^* \cdot z_{C'} = S_y^* = A^* \cdot z_{C'} = \frac{1}{4}\left(\frac{a\sqrt{2}}{2} - z\right)^2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{6} + \frac{2}{3}z\right) \qquad (5.113)$$

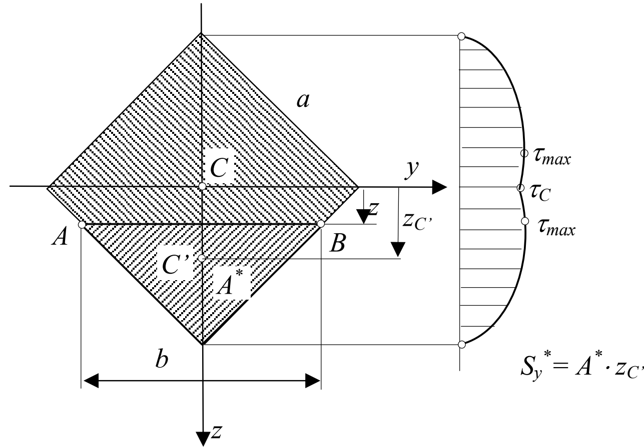


Fig. 5.31

Înlocuind în expresia tensiunii tangențiale (5.103) se obține legea de variație pe suprafața secțiunii în funcție de distanța *z*:

$$\tau_{zx} = T_z \frac{S_y^*}{bI_y} = \frac{3T_z}{2a^2}\left(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6}\frac{z}{a} - \frac{2}{3}\frac{z^2}{a^2}\right) \qquad (5.114)$$

în care $I_y = \frac{a^4}{12}$ este momentul de inerție față de axa *Oy* (conform relației 5.36).

Legea de variație (5.114) este o funcție de gradul al II lea având valoarea maximă pentru $\frac{d\tau_{zx}}{dz} = 0$, adică pentru: $z = \pm a\frac{\sqrt{2}}{8}$ (5.115)

Înlocuind în (5.114) se obține valoarea maximă: $\tau_{max} = \frac{9}{32}\frac{T_z}{A}$ (5.116)

în care : $A=a^2$ este aria secțiunii pătrate.

Pe axa neutră tensiunile tangențiale au valoarea : $\tau_C = \frac{1}{4}\frac{T_z}{A}$ (5.117)

Pentru această secțiune se observă o mai bună distribuție a tensiunilor tangențiale, cea maximă fiind un sfert din valoarea tensiunii de forfecare medii.

Aplicația 5.3

Să se determine legea de variație a tensiunilor tangențiale τ_{zx} pe suprafața secțiunii compuse având forma şi dimensiunile din figura 5.32.

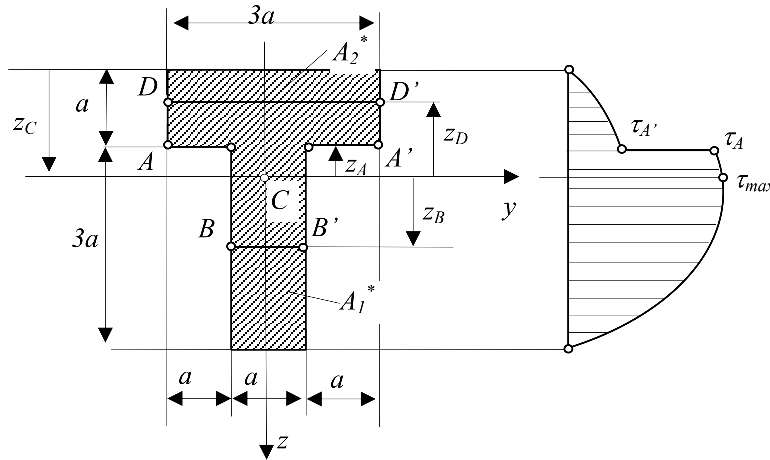


Fig 5.32

Pentru a determina momentul de inerție I_{yc} al secțiunii compuse se determină mai întâi poziția centrului de greutate (distanța z_C din figura 5.32):

$$z_C = \frac{3a^2 \cdot 0{,}5a + 3a^2 \cdot 2{,}5a}{6a^2} = 1{,}5a \qquad (5.118)$$

$$I_y = \frac{a \cdot (3a)^3}{12} + 3a^2 \cdot a^2 + \frac{3a \cdot (a)^3}{12} + 3a^2 \cdot a^2 = 8{,}5a^4 \qquad (5.119)$$

- Momentul static S_{y1}^* al secțiunii situată sub linia BB' la distanța z_B (fig. 5.32) se calculează astfel:

$$S_{y1}^* = A_1^* \cdot z_{C1} = \frac{a}{2}\left(z_C^2 - z_B^2\right) \qquad (5.120)$$

Tensiunile tangențiale corespunzătoare au expresia:

$$\tau_{zx} = \frac{T_z}{b}\frac{S_{y1}^*}{I_y} = \frac{T_z}{17a^2}\left(6{,}25 - \left(\frac{z}{a}\right)^2\right) \qquad (5.121)$$

Pentru $z=0$ se obține maximul local:

$$\tau_{max} = \frac{6{,}25T_z}{17a^2} = 0{,}368\frac{T_z}{a^2} \qquad (5.122)$$

Tensiunile tangențiale corespunzătoare liniei AA' ($z_A = -0{,}5a$) sunt:

$$\tau_{zx\,A} = \frac{6T_z}{17a^2} = 0{,}353\frac{T_z}{a^2} \qquad (5.123)$$

- Momentul static S^*_{y2} al secţiunii situată deasupra liniei *DD'* la distanţa z_D (fig. 5.32) se calculează astfel:

$$S^*_{y2} = A^*_2 \cdot z_{C2} = \frac{3a}{2}\left(2{,}25a^2 - z^2\right) \tag{5.124}$$

Tensiunile tangenţiale corespunzătoare acestei zone sunt:

$$\tau_{zx} = T_z \frac{S^*_y}{bI_y} = \frac{T_z}{17a^2}\left(2{,}25 - \left(\frac{z}{a}\right)^2\right) \tag{5.125}$$

Tensiunile tangenţiale corespunzătoare liniei *AA'* (z_A= - 0,5a) sunt:

$$\tau_{zxA'} = \frac{2T_z}{17a^2} = 0{,}117\frac{T_z}{a^2} \tag{5.126}$$

În figura 5.32 se observă un salt de trei ori al tensiunilor tangenţiale în punctul corespunzător liniei *AA'*: z_A=-0,5a . Acest salt se datorează faptului că lăţimea secţiunii creşte de la *a* la *3a*.

5.6. Lunecarea longitudinală la încovoierea simplă

Se consideră o bară dreaptă solicitată la încovoiere simplă. Bara este compusă din două platbande de secţiune dreptunghiulară ca în figura 5.33. Momentele de inerţie pentru cele două platbande este suma momentelor de inerţie calculate faţă de centrele lor de greutate:

$$\left.\begin{aligned} I_y^{(1)} &= \frac{a\cdot(3a)^3}{12} = 2{,}25a^4 \\ I_y^{(2)} &= \frac{3a\cdot(a)^3}{12} = 0{,}25a^4 \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = 2{,}5a^3 \tag{5.127}$$

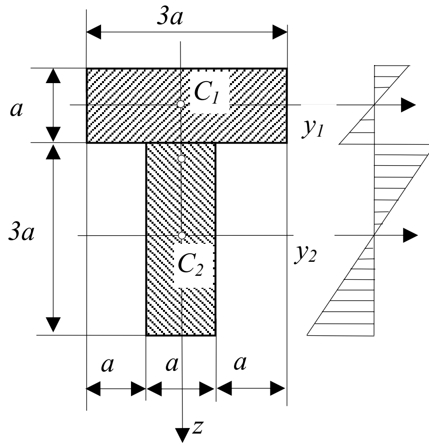


Fig 5.33

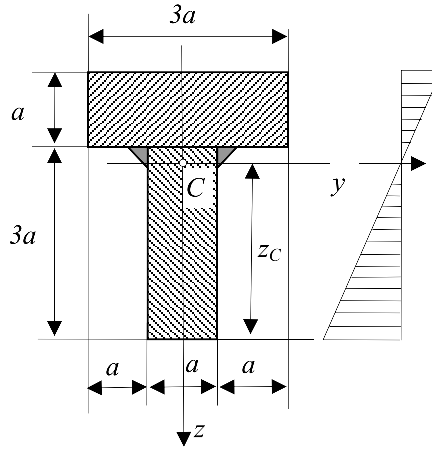


Fig 5.34

Modulul de rezistență este suma modulelor de rezistență pentru cele două secțiuni:

$$\left.\begin{aligned} W_y^{(1)} &= \frac{I_y^{(1)}}{z_{max1}} = \frac{2{,}25a^4}{1{,}5a} = 1{,}5a^3 \\ W_y^{(2)} &= \frac{I_y^{(2)}}{z_{max2}} = \frac{0{,}25a^4}{0{,}5a} = 0{,}5a^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow W_y = W_y^{(1)} + W_y^{(2)} = 2a^3 \qquad (5.128)$$

În cazul în care cele două bare sunt sudate sau rigidizate între ele prin nituire (fig. 5.34) momentul de inerție şi modulul de rezistență au aceeaşi expresie ca în cazul secțiunii compacte sub formă de T având valorile calculate la aplicația 5.3:

$$I_y = 8{,}5a^4; \qquad W_y = 3{,}4a^3 \qquad (5.129)$$

Se observă că momentul de inerție este de *3,4* ori mai mare iar modulul de rezistență de *1,7* ori mai mare în cazul secțiunii compacte față de secțiunea compusă. Prin rigidizarea celor două bucăți ale barei este împiedicat fenomenul de lunecare longitudinală, iar elementele de rigidizare (cordoanele de sudură) sunt supuse unor solicitări de forfecare.

5.6.1. Calculul la forfecare ale îmbinărilor sudate

Se consideră o bară în consolă, de lungime L, formată din două bucăți îmbinate între ele cu cordoane de sudură intermitente pe ambele părți, având lungimea c şi pasul e ca în figura 5.35. Bara este încărcată la capătul ei cu o forță concentrată P.

Datorită cordoanelor de sudură este împiedicat fenomenul de lunecare longitudinală, acestea fiind supuse unor tensiuni tangențiale de forfecare importante.

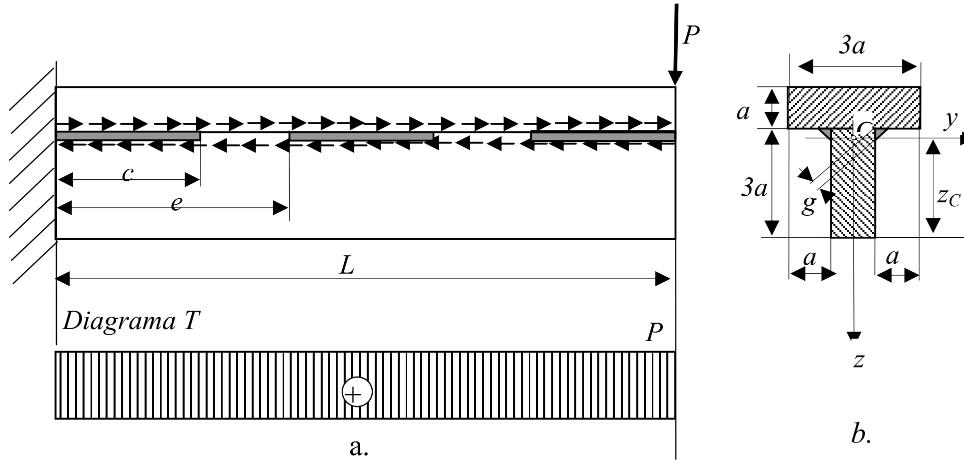


Fig. 5.35

Forța de lunecare longitudinală este echivalentă cu suma forțelor elementare datorate tensiunilor tangențiale de lunecare longitudinală τ_{xz} obținute conform relației lui *JURAVSKI* pentru încovoierea simplă:

$$F_{long} = \tau_{xz} a dx = \frac{TS_y^*}{aI_y} \cdot a \cdot dx = \frac{TS_y^*}{I_y} dx \qquad (5.130)$$

Forța de lunecare longitudinală pe unitatea de lungime f_{long} se scrie astfel:

$$f_{long} = \frac{F_{long}}{dx} = \frac{TS_y^*}{I_y} \qquad (5.131)$$

Verificarea la rezistență a cordoanelor de sudură la solicitarea forfecare se face ținând seama că aceste cordoane sunt pe ambele părți, grosimea cordonului de sudură este g, iar lunecarea longitudinală se produce într-un plan bisector având lățimea g:

$$\tau_{ef} = \frac{f_{long} \cdot e}{2g(c-2g)} = \frac{TS_y^* e}{2g(c-2g)I_y} \leq \tau_{af} \qquad (5.132)$$

unde τ_{af} este rezistența admisibilă la forfecare a materialului cordonului de sudură.

Pentru un cordon de sudură continuu avem relația de verificare:

$$\tau_{ef} = \frac{f_{long}}{2g} = \frac{TS_y^*}{2gI_y} \leq \tau_{af} \qquad (5.133)$$

5.6.2. Calculul la forfecare al îmbinărilor cu nituri

În cazul în care rigidizarea se realizează prin nituire calculul la forfecare al niturilor se face în mod asemănător. Se consideră bara formată din trei bucăți: o platbandă de grosime t_1 și două profile L de grosime t_2 îmbinate cu nituri ca în figura 5.36.

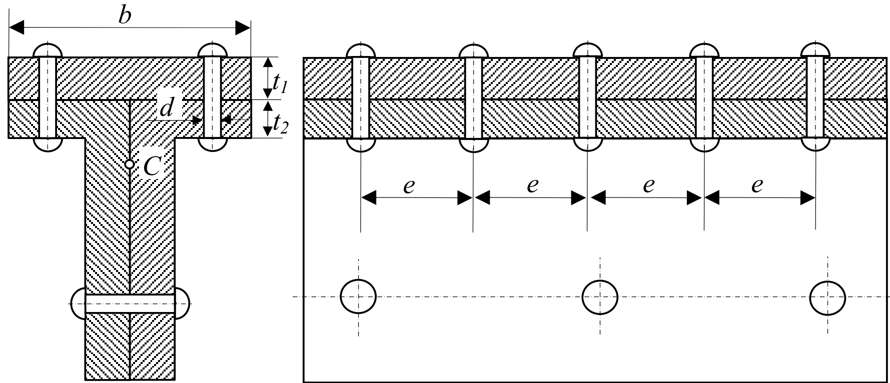


Fig 5.36

Niturile de îmbinare între cele două profile *L* şi platbandă sunt solicitate la forfecare iar cele de îmbinare între cele două profile *L* au numai rol de fixare, nefiind solicitate la forfecare. Diametrul niturilor *d* se alege în funcție de grosimea pieselor îmbinate. Forța de lunecare longitudinală pe unitatea de lungime se scrie:

$$f_{long} = \frac{TS_y^*}{bI_y} \cdot \frac{bL}{L} = \frac{TS_y^*}{I_y} \qquad (5.134)$$

în care S_y^* este momentul static al secțiunii plăcii superioare față de *Oy*.

Niturile se verifică atât la forfecare cât şi la strivire:

a. Verificarea *la forfecare* se face cu ajutorul relației:

$$\tau_{ef} = \frac{f_{long} L}{2nA} \le \tau_{af}\,, \quad A = \frac{\pi d^2}{4} \qquad (5.135)$$

în care: *n* este numărul de perechi de nituri supuse la forfecare în aceeaşi direcție;
A este aria de forfecare a nitului;
τ_{af} este rezistența admisibilă la forfecare a materialului nitului.

Din condiția de rezistență la forfecare (5.135) se determină distanța *e* dintre nituri, ținând seama că această distanță este $e = L/n$:

$$e \le \frac{\pi d^2 \tau_{af}}{2 f_{long}} \qquad (5.136)$$

b. Verificarea *la strivire* a niturilor se face cu ajutorul relației:

$$\sigma_{ef} = \frac{f_{long} L}{2nA} \le \sigma_{as}$$
$$A = d \cdot t_{min}\,, \ t_{min} = min(t_1, t_2) \qquad (5.137)$$

în care: *n* este numărul de perechi de nituri şi *A* este aria de strivire a nitului
σ_{as} este rezistența admisibilă la strivire a materialului nitului.

Din condiția de rezistență (5.137) se poate determina distanța dintre nituri *e* ținând seama că această distanță este $e = L/n$:

$$e \le \frac{2d \cdot t_{min} \cdot \sigma_{as}}{f_{long}} \qquad (5.138)$$

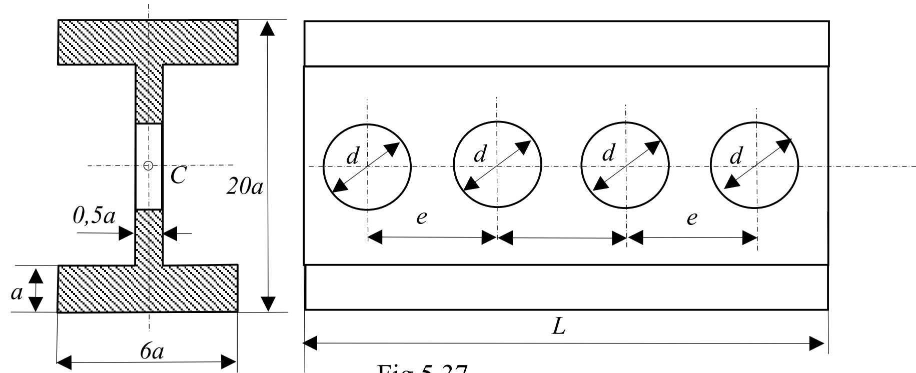


Fig 5.37

5.6.3. Verificarea secțiunilor înalte la lunecarea longitudinală

În cazul grinzilor supuse la solicitări importante de încovoiere se utilizează grinzi cu secțiuni înalte, având momente de inerție și module de rezistență la încovoiere mari. În scopul micșorării greutății proprii a acestor grinzi, inima secțiunii are fie grosime mică fie găuri de ușurare ca în figura 5.37. Datorită fenomenului de lunecare longitudinală se poate produce deplanarea puternică sau forfecarea inimii secțiunii.

Conform relației lui *JURAVSKI* tensiunile tangențiale la încovoierea simplă au valori maxime în zona axei neutre. Pentru secțiunea din figura 5.37, dar fără găuri de ușurare în zona mediană, forța de lunecare longitudinală pe unitatea de lungime este:

$$f_{long} = TS_y^* / I_y \tag{5.139}$$

în care: S_y^* este momentul static a jumătății superioare în raport cu centrul de greutate C al secțiunii (maxim): $S_y^* = 77{,}25a^3$ (5.140)

I_y este momentul de inerție axial al secțiunii pline:

$$I_y = \frac{6a\cdot(20a)^3}{12} - \frac{5{,}5a\cdot(18a)^3}{12} = 1327a^4 \tag{5.141}$$

Forța de lunecare longitudinală pe unitatea de lungime are expresia :

$$f_{long} = 0{,}058214\frac{T}{a} \tag{5.142}$$

Condiția de rezistență la *forfecare* se scrie:

$$\frac{f_{long}}{b} \le \tau_{af} \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}058214\frac{T}{a^2} \le \tau_{af} \tag{5.143}$$

în care: $b=0{,}5a$ este lățimea suprafeței longitudinale de lunecare.

τ_{af} este rezistența admisibilă la forfecare a materialului.

Relația de dimensionare din condiția (5.143) de rezistență la forfecare a inimii secțiunii se scrie: $a \ge 0{,}241276\sqrt{T/\tau_{af}}$ (5.144)

În cazul în care inima secțiunii este prevăzută cu găuri având diametrul d situate între ele la distanța e, condiția de rezistență la forfecare (5.143) devine:

$$\tau_{ef} = \frac{f_{long}}{b}\cdot\frac{e}{e-d} \le \tau_{af} \tag{5.145}$$

Forța de lunecare longitudinală pe unitatea de lungime în acest caz este:

$$f_{long} = \frac{TS_y^*}{I'_y} \tag{5.146}$$

în care: S_y^* este momentul static a jumătății superioare a secțiunii: $S_y^* = 77{,}25a^3$

I_y este momentul de inerție axial al secțiunii găurite: $I'_y = 1327\cdot a^4 - 0{,}0416\cdot ad^3$.

Din relația (5.145) rezultă: $e \ge d\left(1 - \dfrac{2f_{long}}{a\cdot\tau_{af}}\right)^{-1}$ (5.147)

5.7. Încovoierea oblică

Formula *NAVIER* pentru calculul tensiunilor normale la încovoierea pură simetrică şi formula *JURAVSKI* pentru tensiunile tangenţiale la încovoierea simplă simetrică, au fost deduse în ipoteza că sistemul de forţe şi cupluri de forţe acţionează într-un plan principal ce conţine axa longitudinală a barei şi una din axele principale de inerţie ale secţiunii (axa de simetrie *Oz* în cazul figurilor 5.23 şi 5.28).

În cazul în care sistemul de forţe şi cupluri de forţe acţionează într-un plan diferit de planul principal spunem că avem *încovoiere oblică* iar axa neutră în acest caz *diferă de axa momentului încovoietor Oy*. Se consideră o bară în consolă de lungime *L* având o secţiune nesimetrică (de exemplu în figura 5.38 de forma unui profil cornier cu aripi neegale) supusă acţiunii unei forţe *P* cuprinsă în planul vertical *Oxz* .

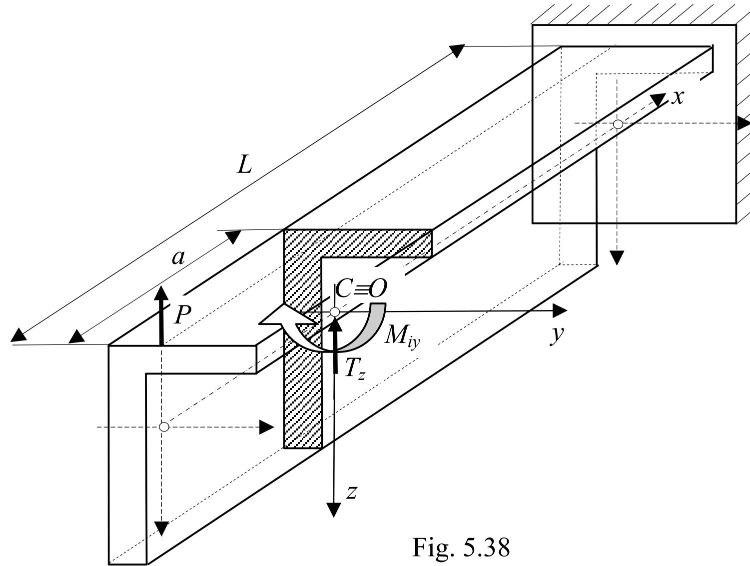


Fig. 5.38

Într-o secţiune situată la distanţa *a* de capătul liber al barei, forţa *P* produce eforturile pozitive: $T_z=P$ şi $M_{iy}=Pa$. Direcţiile principale ale secţiunii Oy_1 şi Oz_1 sunt date de unghiurile α_1 şi α_2 conform relaţiei (5.27):

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} arctg\left(-\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}\right); \quad \alpha_1 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2} \tag{5.148}$$

Descompunând efortul încovoietor M_{iy} după direcţiile principale Oy_1 şi Oz_1 , se obţin componentele (fig.5.39) :

$$\begin{aligned} M_{iy1} &= M_{iy} \cdot cos\,\alpha \\ M_{iz1} &= M_{iy} \cdot sin\,\alpha \end{aligned} \tag{5.149}$$

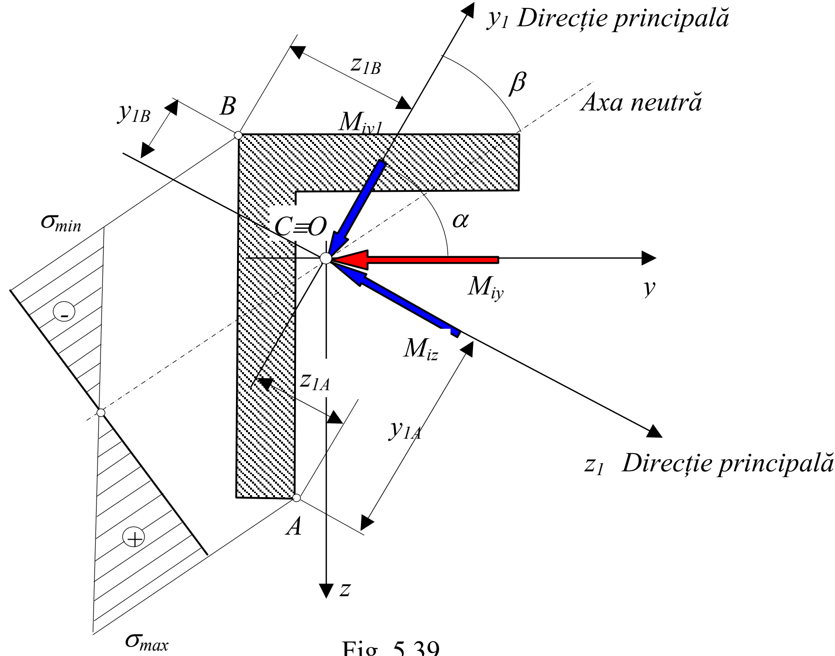


Fig. 5.39

Din figura 5.39 se observă că în primul cadran al sistemului Oy_1z_1 ($y_1>0, z_1>0$), un efort încovoietor pozitiv M_{iy1} produce totdeauna tensiuni pozitive (de întindere) iar un efort pozitiv M_{iz1} , produce totdeauna tensiuni negative (de compresiune). Conform formulei *NAVIER,* într-un punct din primul cadran tensiunile se calculează astfel:

$$\sigma_{x1} = \frac{M_{iy1} \cdot z}{I_{y1}} = \frac{M_{iy} \cdot cos\,\alpha}{I_{y1}} z_1$$
$$\sigma_{x2} = -\frac{M_{iz1} \cdot y_1}{I_{z1}} = -\frac{M_{iy} \cdot sin\,\alpha}{I_{z1}} y_1 \qquad (5.150)$$

Tensiunea normală la încovoierea oblică este suma algebrică a celor două tensiuni:

$$\sigma_x = \sigma_{x1} + \sigma_{x2} = M_{iy}\left(\frac{cos\,\alpha}{I_{y1}} z_1 - \frac{sin\,\alpha}{I_{z1}} y_1\right) \qquad (5.151)$$

Ecuația axei neutre a secțiunii se obține punând în relația (5.151) condiția $\sigma=0$:

$$\frac{cos\,\alpha}{I_{y1}} z_1 - \frac{sin\,\alpha}{I_{z1}} y_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = \frac{I_{y1}}{I_{z1}} tg\alpha \cdot y_1 \qquad (5.152)$$

Deci axa neutră trece prin originea sistemului O şi are panta:

$$m = tg\beta = \frac{I_{y1}}{I_{z1}} tg\alpha \qquad (5.153)$$

Tensiunea maximă (pozitivă) se obţine în punctul *A* al secţiunii deoarece ($z_{1A}>0$, $y_{1A}<0$) iar tensiunea minimă (negativă), în punctul *B* al secţiunii ($y_{1B}>0$, $z_{1B}<0$):

$$\sigma_{max} = M_{iy}\left(\frac{\cos\alpha}{I_{y1}} z_{1A} - \frac{\sin\alpha}{I_{z1}} y_{1A}\right); \quad \sigma_{min} = M_{iy}\left(\frac{\cos\alpha}{I_{y1}} z_{1B} - \frac{\sin\alpha}{I_{z1}} y_{1B}\right) \qquad (5.154)$$

În cazul particular al profilului ce admite o axa de simetrie din figura 5.40 deoarece $I_y = I_z$ direcţiile principale date de relaţia (5.148) sunt:

$$2\alpha_1 = arctg\left(-\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}\right) = \frac{\pi}{2} \qquad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{4},\ \alpha_2 = \frac{3\pi}{4}. \qquad (5.155)$$

Descompunând efortul încovoietor M_{iy} după cele două direcţii principale Oy_1 şi Oz_1 se obţine (fig.5.40):

$$M_{iy1} = M_{iz1} = \frac{\sqrt{2}}{2} M_{iy} \qquad (5.156)$$

Conform relaţiei (5.151) tensiunea normală este dată de relaţia:

$$\sigma_x = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{z_1}{I_{y1}} - \frac{y_1}{I_{z1}}\right) M_{iy} \qquad (5.157)$$

Axa neutră a secţiunii se obţine din condiţia $\sigma=0$ şi are coeficientul unghiular:

$$tg\beta = \frac{I_{y1}}{I_{z1}} \qquad (5.158)$$

Tensiunea maximă se obţine în punctul *A* al secţiunii deoarece $z_{1A}>0$, $y_{1A}<0$ iar cea minimă (negativă) în punctul *B* deoarece $y_{1B}=0$, $z_{1B}<0$:

$$\sigma_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{z_{1A}}{I_{y1}} - \frac{y_{1A}}{I_{z1}}\right) M_{iy}; \quad \sigma_{min} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{z_{1B}}{I_{y1}}\right) M_{iy} \qquad (5.159)$$

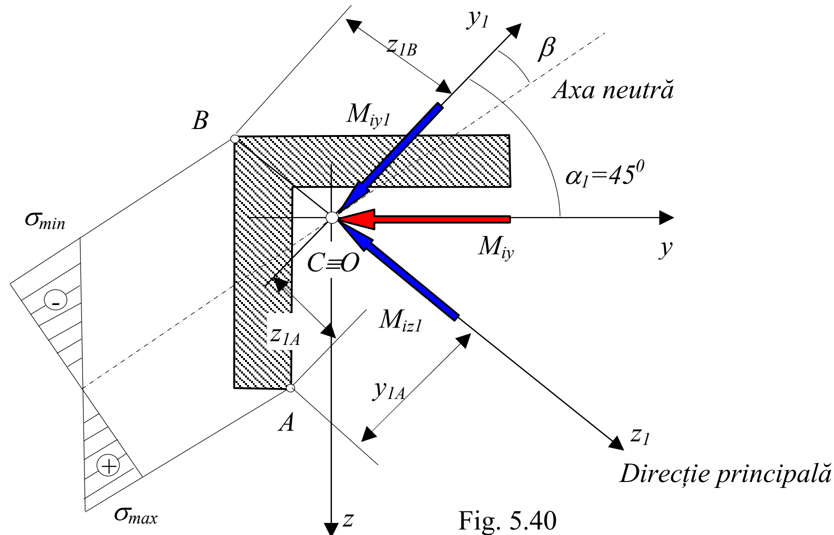


Fig. 5.40

5.8. Încovoierea spațială

5.8.1. Calculul folosind momentele de inerție principale

Încovoierea spațială a barelor este cazul general se produce atunci când forțele şi cuplurile de forțe acționează în două plane *Oxy* şi *Oxz* ce conțin axa longitudinală a barei dar nici una dintre axele principale de inerție. Ca şi în cazul încovoierii oblice, în cazul încovoierii spațiale, axa neutră de diferă de axa efortului încovoietor M_i.

Se consideră bara în consolă din figura 5.41, de lungime *L*, având secțiunea sub forma unui cornier cu aripi neegale, supusă acțiunii unei forțe P_1 cuprinsă în planul vertical *Oxz* şi a unei forțe P_2 cuprinsă în planul orizontal *Oxy* . Axele *Oy* şi *Oz* nu sunt axe principale de inerție ale secțiunii. Într-o secțiune situată la distanța *a* de capătul liber al barei, se produc eforturile tăietoare, respectiv eforturile încovoietoare:

$$T_z=P_1 \ ; \quad T_y=P_2 \qquad (5.160)$$

$$M_{iy}=P_1\,a \ ; \quad M_{iz}=P_2\,a \ . \qquad (5.161)$$

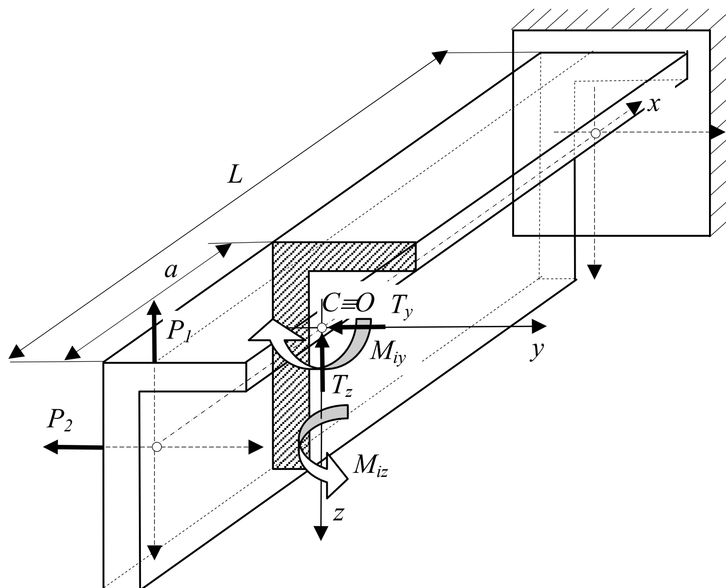


Fig. 5.41

Direcțiile principale ale secțiunii Oy_1 şi Oz_1 date de unghiurile α_1 şi α_2 sunt :

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} arctg\left(-\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}\right); \quad \alpha_1 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2} \qquad (5.162)$$

Dacă se descompun eforturile încovoietoare M_{iy} şi M_{iz} după cele două direcții principale Oy_1 şi Oz_1 se obțin componentele (fig.5.42):

$$\begin{aligned} M_{iy1} &= M_{iy} \cdot cos\,\alpha - M_{iz} \cdot sin\,\alpha \\ M_{iz1} &= M_{iy} \cdot sin\,\alpha + M_{iz} \cdot cos\,\alpha \end{aligned} \qquad (5.163)$$

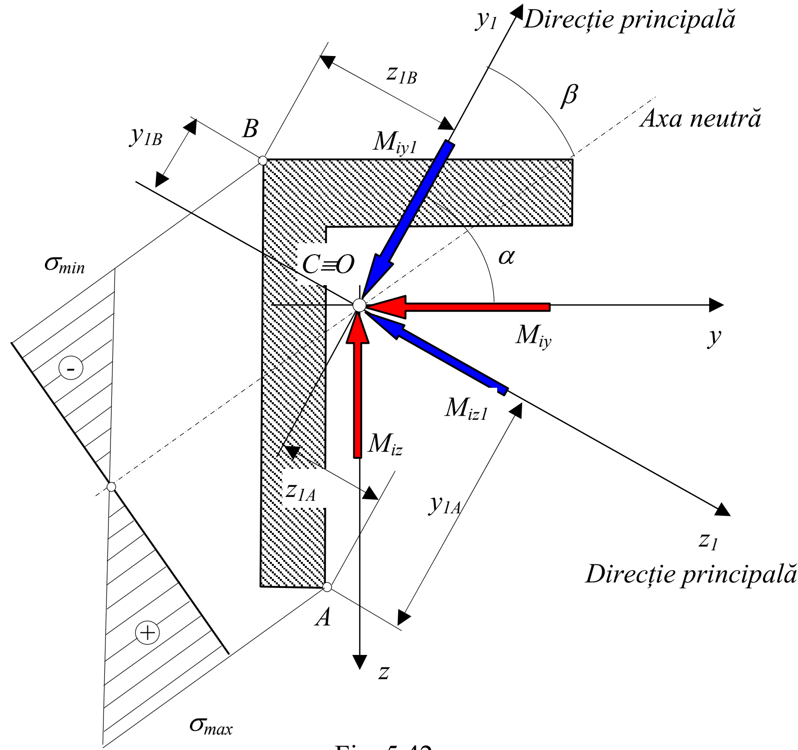


Fig. 5.42

Se observă că în primul cadran al sistemului Oy_1z_1 ($y_1>0,\ z_1>0$), un efort încovoietor pozitiv M_{iy1} produce tensiuni pozitive (de întindere) iar un efort pozitiv M_{iz1} produce tensiuni negative (de compresiune)(fig.5.42). Conform formulei lui *NAVIER,* într-un punct din primul cadran se obțin tensiunile:

$$\sigma_{x1} = \frac{M_{iy1}}{I_{y1}} \cdot z_1 = \frac{M_{iy} \cdot cos\,\alpha - M_{iz} \cdot sin\,\alpha}{I_{y1}} \cdot z_1$$
$$\sigma_{x2} = -\frac{M_{iz1}}{I_{z1}} \cdot y_1 = -\frac{M_{iy} \cdot sin\,\alpha + M_{iz} \cdot cos\,\alpha}{I_{z1}} \cdot y_1 \qquad (5.164)$$

Tensiunea normală este suma algebrică a celor două tensiuni (5.164):

$$\sigma_x = \frac{M_{iy} \cdot cos\,\alpha - M_{iz} \cdot sin\,\alpha}{I_{y1}} z_1 - \frac{M_{iy} \cdot sin\,\alpha + M_{iz} \cdot cos\,\alpha}{I_{z1}} y_1 \qquad (5.165)$$

Ecuația axei neutre a secțiunii se obține din condiția $\sigma=0$:

$$\frac{M_{iy} \cdot cos\,\alpha - M_{iy} \cdot sin\,\alpha}{I_{y1}} z_1 - \frac{M_{iy} \cdot sin\,\alpha + M_{iz} \cdot cos\,\alpha}{I_{z1}} y_1 = 0 \qquad (5.166)$$

Axa neutră trece prin originea *O* şi are coeficientul unghiular:

$$tg\beta = \frac{z_1}{y_1} = \frac{M_{iy} \cdot sin\,\alpha + M_{iz} \cdot cos\,\alpha}{M_{iy} \cdot cos\,\alpha - M_{iz} \cdot sin\,\alpha} \cdot \frac{I_{y1}}{I_{z1}} \tag{5.167}$$

Relația (5.165) permite calculul tensiunii maxime şi minime. Pentru bara din figura 5.42 şi pentru cele două momente încovoietoare M_{iy} şi M_{iz} valorarea maximă a tensiunii (pozitivă) se atinge în punctul *A* ($y_{1A}<0,\ z_{1A}>0$) iar valoarea minimă (negativă) în punctul *B* al secțiunii ($y_{1B}>0,\ z_{1B}<0$):

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= \frac{M_{iy} \cdot cos\,\alpha - M_{iz} \cdot sin\,\alpha}{I_{y1}} z_{1A} - \frac{M_{iy} \cdot sin\,\alpha + M_{iz} \cdot cos\,\alpha}{I_{z1}} y_{1A} \\ \sigma_{min} &= \frac{M_{iy} \cdot cos\,\alpha - M_{iz} \cdot sin\,\alpha}{I_{y1}} z_{1B} - \frac{M_{iy} \cdot sin\,\alpha + M_{iz} \cdot cos\,\alpha}{I_{z1}} y_{1B}\end{aligned} \tag{5.168}$$

8.5.2. Calculul folosind momentele de inerție față de axele sistemului dat

Calculul la încovoierea oblică şi spațială folosind relațiile de mai sus este destul de dificil. Se prezintă în continuare o metodă de calcul a tensiunilor şi a poziției axei neutre față de axele *Oy* şi *Oz* ale sistemului dat[1].

O consecință a ipotezei secțiunii plane a lui *BERNOULLI* şi a ipotezei deformațiilor mici este aceea că deplasarea pe direcția *Ox* a unui punct din suprafața secțiunii *B(y, z)* situat pe fața negativă (fig.5.43) este o funcție liniară în raport cu coordonatele secțiunii *y* şi *z*

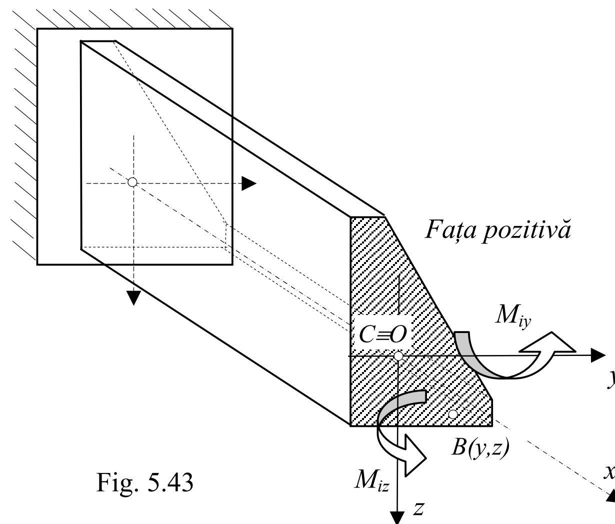


Fig. 5.43

[1] Mircea Radeş – Rezistența materialelor I, Ed. PRINTECH, 2004, pag.144-146

Această funcție este de forma:

$$u = u_0 + z\varphi_y - y\varphi_z \tag{5.169}$$

în care: u_0 este deplasarea punctului O al secțiunii;

φ_y - unghiul de rotire al suprafeței față de axa *Oy;*

φ_z - unghiul de rotire al suprafeței față de axa *Oz.*

La încovoierea pură a barelor s-a notat cu $\omega_y = \dfrac{\partial \varphi_y}{\partial x}$ rotirea specifică a suprafeței secțiunii după axa Oy .

Semnul plus şi semnul minus din relația (5.169) s-au introdus deoarece un moment M_{iy} pozitiv produce totdeauna o deplasare pozitivă (după direcția axei *Ox*) a punctului iar un moment M_{iz} pozitiv produce totdeauna o deplasare negativă a punctului, aşa cum rezultă din figura 5.43. Alungirea specifică a fibrei ce trece prin punctul *B(y, z)* se poate scrie cu ajutorul relațiilor diferențiale dintre deformații şi deplasări:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} - y\frac{\partial \varphi_z}{\partial x} \tag{5.170}$$

Dacă se notează cu $\omega_z = \dfrac{\partial \varphi_z}{\partial x}$ rotirea specifică a suprafeței secțiunii după axa *Oz* şi cu $\varepsilon_0 = \dfrac{\partial u_0}{\partial x}$ deformația specifică a fibrei medii, relația (5.170) se scrie:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + z\omega_y - y\omega_z \tag{5.171}$$

Folosind legea lui HOOKE între tensiunile normale şi deformațiile specifice, tensiunile la încovoierea spațială se scriu astfel:

$$\sigma_x = E\left(\varepsilon_0 + z\omega_y - y\omega_z\right) \tag{5.172}$$

Ecuațiile de echivalență dintre tensiuni şi eforturile secționale se scriu:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x \, dA = 0 &&\Leftrightarrow E\varepsilon_0\int_A dA + E\omega_y\int_A z\cdot dA - E\omega_z\int_A y\cdot dA = 0 \\ M_{iy} &= \int_A z\cdot\sigma_x \, dA &&\Leftrightarrow M_{iy} = E\varepsilon_0\int_A zdA + E\omega_y\int_A z^2\cdot dA - E\omega_z\int_A zy\cdot dA \\ M_{iz} &= -\int_A y\cdot\sigma_x \, dA &&\Leftrightarrow M_{iz} = -E\varepsilon_0\int_A ydA - E\omega_y\int_A zy\cdot dA + E\omega_z\int_A y^2\cdot dA \end{aligned} \tag{5.173}$$

Întrucât sistemul de axe este central, momentele statice sunt nule:

$E\,\omega_y\int_A zdA = 0$; $E\,\omega_z\int_A ydA = 0$ şi prima relație (5.173) conduce la: $\varepsilon_0 = 0$ (5.174)

Celelate două relații (5.173) se mai scriu:

$$\begin{aligned} M_{iy} &= EI_y\omega_y - EI_{yz}\omega_z \\ M_{iz} &= -EI_{yz}\omega_y + EI_z\omega_z \end{aligned} \tag{5.175}$$

Rezolvând sistemul de ecuații (5.175) se obțin rotirile specifice necunoscute:

$$\omega_y = \frac{I_z M_{iy} + I_{yz} M_{iz}}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}; \qquad \omega_z = \frac{I_{yz} M_{iy} + I_y M_{iz}}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)} \tag{5.176}$$

Înlocuind în relaţia pentru calculul a tensiunilor (5.172) se obţine:

$$\sigma_x = \frac{I_z M_{iy} + I_{yz} M_{iz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z - \frac{I_{yz} M_{iy} + I_y M_{iz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y \qquad (5.177)$$

Ecuaţia axei neutre se deduce din condiţia $\sigma=0$:

$$\frac{I_z M_{iy} + I_{yz} M_{iz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} z - \frac{I_{yz} M_{iy} + I_y M_{iz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} y = 0$$
$$z = \frac{I_{yz} M_{iy} + I_y M_{iz}}{I_z M_{iy} + I_{yz} M_{iz}} y \qquad (5.178)$$

Încovoierea oblică este un caz particular al încovoierii spaţiale cu $M_{iy} \neq 0$ şi $M_{iz}=0$. Înlocuind în relaţia (5.177) se obţine:

$$\sigma_x = M_{iy} \frac{I_z \cdot z - I_{yz} \cdot y}{I_y I_z - I_{yz}^2} \qquad (5.179)$$

Ecuaţia axei centrale în acest caz se deduce din condiţia $\sigma=0$:

$$\frac{I_z \cdot z - I_{yz} \cdot y}{I_y I_z - I_{yz}^2} = 0 \Leftrightarrow z = \frac{I_{yz}}{I_z} y \qquad (5.180)$$

Încovoierea simetrică este un caz particular al încovoierii oblice: dacă axa *Oy* este o axă de simetrie: $I_{yz}=0$ şi se obţine formula lui *NAVIER* şi ecuaţia axei neutre $z=0$.

În cazul particular al încovoierii oblice cu $M_{iy} \neq 0$ şi a unei secţiuni cu o axă de simetrie, înlocuind în (5.177) $M_{iz}=0$, $I_y= I_z$ şi $I_{yz}\neq 0$ se obţine:

$$\sigma_x = \frac{I_y \cdot z - I_{yz} \cdot y}{I_y^2 - I_{yz}^2} M_{iy} \qquad (5.181)$$

Ecuaţia axei centrale în acest caz se deduce din condiţia $\sigma=0$:

$$z = \frac{I_{yz}}{I_y} y \qquad (5.181')$$

5.9. Încovoierea barelor din profile subţiri deschise. Centrul de forfecare-încovoiere

Aşa cum s-a precizat la capitolul de răsucire, în cazul încovoierii barelor apar deformaţii suplimentare care se neglijează în cazul secţiunilor compacte, cum ar fi profilele subţiri închise, dar nu se mai pot neglija ca în cazul profilelor subţiri deschise.

5.9.1. Încovoierea profilelor subţiri rectangulare

Pentru profilul subţire deschis rectangular din figura 5.45, sub acţiunea forţelor F_1 şi F_2 din planul principal *Oxz* bara suferă deformaţii de încovoiere dar şi de răsucire după axa *Ox,* datorită tensiunilor tangenţiale mari în zona inimii şi a tălpilor. Tensiunile tangenţiale se determină cu ajutorul relaţiei lui *JURAVSKI:*

$$\tau_{zx} = \frac{T S_y^*}{t I_y}$$

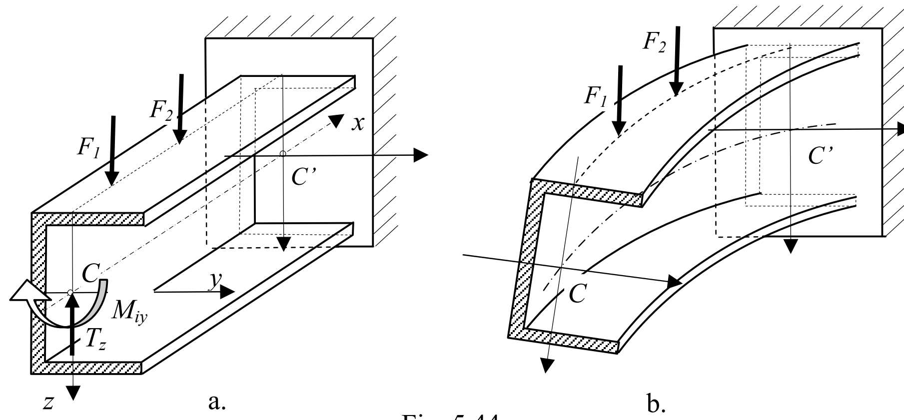


Fig. 5.44

Pentru profilul rectangular din figura 5.45 se fac următoarele ipoteze:

- datorită lăţimii mici t a profilului tensiunile tangenţiale se consideră constante pe lăţimea profilului (lăţimea t se măsoară perpendicular pe linia mediană) şi tangente la contur şi la linia mediană a profilului;
- distribuţia tensiunilor de-a lungul liniei mediane a secţiunii este liniară pe cele două tălpi ale secţiunii (fig.5.45) întrucât momentul static S_y^* este o funcţie de gradul întâi de variabila y_1:

$$S_y^* = ty_1 \cdot \frac{h_1}{2} \tag{5.182}$$

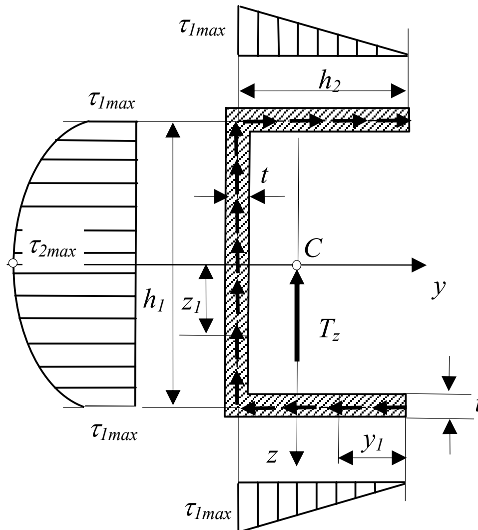


Fig. 5.45

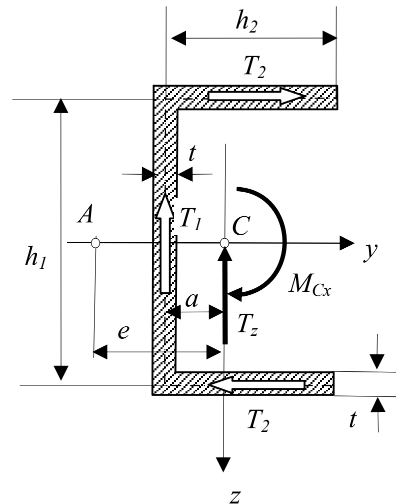


Fig. 5.46

Tensiunea maximă se obţine pentru $y_1=h_2$ unde momentul static este maxim:

$$S^*_{y_{max}} = \frac{1}{2} t \cdot h_1 \cdot h_2 \tag{5.183}$$

şi are expresia:

$$\tau_{1max} = \frac{T \cdot h_1 \cdot h_2}{2I_y} \tag{5.184}$$

- distribuţia tensiunilor de-a lungul liniei mediane a secţiunii este parabolic în zona inimii secţiunii, deoarece momentul static S^*_y este o funcţie de gradul al doilea:

$$S^*_y = th_2 \cdot \frac{h_1}{2} + \frac{t}{2}\left(\frac{h_1^2}{4} - z_1^2\right) \tag{5.185}$$

- tensiunea maximă se obţine pentru $z_1=0$ unde momentul static este maxim:

$$S^*_{y_{max}} = \frac{1}{8} t \cdot h_1 (4h_2 + h_1) \tag{5.186}$$

şi are expresia:

$$\tau_{2max} = \frac{T \cdot h_1 (4h_2 + h_1)}{8I_y} \tag{5.187}$$

Ţinând seama de ipoteza tensiunilor tangenţiale constante pe lăţimea profilului, forţele elementare corespunzătoare elementului de arie dA sunt orientate după direcţia liniei mediane a profilului şi au expresia:

$$dF = \tau \cdot dA \tag{5.188}$$

Reducând aceste forţe elementare în centrul de greutate C al secţiunii rezultă un torsor format din următoarele componente (fig.5.46):

- efortul tăietor $T_z = T_2$, rezultatul însumării forţelor elementare pe inimă după direcţia Oz:

$$T_1 = \int_A \tau_{zx} dA = \int_0^{h_2} \frac{Th_1 y_1}{2I_y} dy_1 = \frac{h_1 h_2^2 t}{2I_y} T \tag{5.189}$$

- eforturile tăietoare $T_y = T_2 - T_2 = 0$, rezultatul însumării forţelor elementare pe cele două tălpi după direcţia Oy:

$$T_2 = \int_{A_2} \tau_{yx} dA = 2\int_0^{h_1/2} \frac{T \cdot t}{I_y}\left(\frac{h_1 h_2}{2} + \frac{h_1^2}{8} - \frac{z_1^2}{2}\right) dz_1$$
$$T_2 = \frac{h_1^2 (6h_2 + h_1) t}{12 I_y} T \tag{5.190}$$

- momentul M_{Cx} faţă de axa Cx care reprezintă un efort de răsucire:

$$M_{Cx} = T_1 \cdot a + T_2 \cdot h_1 \tag{5.191}$$

Se poate alege un punct A situat pe axa Oy la distanţa e de centrul de greutate (fig.5.46) pentru care sistemul de forţe elementare, respectiv forţa T_1 corespunzătoare inimii şi forţele T_2 corespunzătoare celor două tălpi, se reduce numai la efortul T_z, momentul de răsucire fiind nul:

$$M_{Ax} = T_1 \cdot (e - a) + T_2 \cdot h_1 = 0 \tag{5.192}$$

Din relația (5.192) rezultă distanța *e* față de centrul de greutate al secțiunii:

$$e = a + \frac{T_2 \cdot h_1}{T_1} \qquad (5.193)$$

Înlocuind relațiile (5.189) și (5.190) în relația (5.193) se obține:

$$e = a + \frac{h_1^2\left(6h_2 + h_1\right)}{6h_2^2} \qquad (5.194)$$

Prin urmare, pentru ca profilul să nu fie supus la răsucire, forțele aplicate F_1 și F_2 trebuie să treacă prin *centrul de forfecare A,* a cărui poziție depinde doar de geometria secțiunii. Calculul la răsucire se poate face numai după determinarea *centrului de forfecare al secțiunii.* Tensiunile tangențiale provin din forfecare și nu din răsucire, efectul acestor tensiuni conducând în acest caz la un cuplu de răsucire M_{cx}.

Din punctul de vedere al încovoierii barei cu secțiune nesimetrică din profile subțiri, chiar dacă planul forțelor conține axa barei, în afară de încovoiere și forfecare se produce și răsucire.

Pentru a se produce numai încovoiere și forfecare, fără răsucire, planul forțelor trebuie să treacă prin centrul de forfecare: în acest caz el se numește și *centru de încovoiere.*

5.9.2. Încovoierea profilelor subțiri circulare

În figura 5.47 este prezentată secțiunea unei *bare tubulare deschise*, având un profil circular de lățime *t*, linia mediană fiind un arc de cerc de rază *r* și unghi la centru 2α. Se cere să se determine centrul de forfecare în cazul general și pentru cazul particular al unui profil semicircular $\alpha=\pi$ *(rad).*

Dacă sistemul de forțe exterioare acționează în planul principal *Oxz* (ce conține axa centrelor de greutate), în secțiunea barei apare un efort tăietor *T* și tensiunile tangențiale τ (fig.5.47) constante pe lățimea profilului și tangente la linia mediană a profilului (cerc). Forța elementară corespunzătoare tensiunii tangențiale τ este:

$$dF = \tau dA = \tau \cdot t \cdot r d\varphi \qquad (5.195)$$

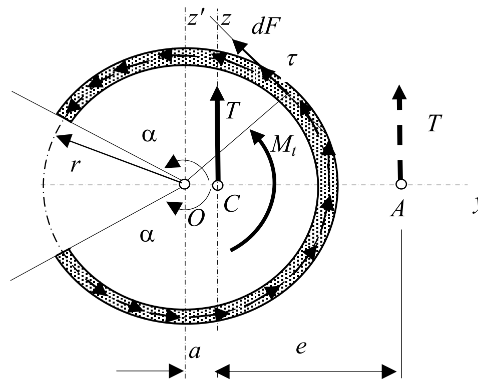


Fig. 5.47

Coordonatele centrului de greutate față de sistemul de aye *Oyz'* se determină cu ajutorul relației:

$$z_C = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} z' t \cdot rd\varphi}{\int_{-\alpha}^{\alpha} trd\varphi} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} r\,sin\,\varphi \cdot t \cdot rd\varphi}{2tr\alpha} = 0;$$

$$a = y_C = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} y \cdot t \cdot rd\varphi}{\int_{-\alpha}^{\alpha} trd\varphi} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} r\,cos\,\varphi \cdot t \cdot rd\varphi}{2tr\alpha} = \frac{r\,sin\,\alpha}{\alpha}; \tag{5.196}$$

Pentru profile subțiri tensiunea tangențială poate fi considerată constantă pe lățimea secțiunii și se calculează conform relației lui *JURAVSKI:*

$$\tau = \frac{TS_y^*}{tI_y} \tag{5.197}$$

în care: S_y^* este momentul static al secțiunii peste linia corespunzătoare unghiului φ:

$$S_y^* = \int_{\varphi}^{\alpha} z' \cdot t \cdot rd\theta = \int_{\varphi}^{\alpha} r\,sin\,\theta \cdot t \cdot rd\theta = r^2 t(cos\,\varphi - cos\,\alpha) \tag{5.198}$$

I_y momentul de inerție al secțiunii față de axa *Oy* și se determină astfel:

$$I_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} z'^2 \cdot trd\theta = \int_{-\alpha}^{\alpha} r^2\,sin^2\,\theta \cdot trd\theta = \frac{r^3 t}{2}(2\alpha - sin\,2\alpha) \tag{5.199}$$

Înlocuind în expresia (5.197) se obține:

$$\tau = \frac{2T}{rt}\frac{cos\,\varphi - cos\,\alpha}{2\alpha - sin\,2\alpha} \tag{5.200}$$

În figura 5.48 s-a reprezentat variația tensiunilor tangențiale cu ajutorul funcției $tau(x) = \tau / \frac{2T}{rt}$ dată de relația (5.200) cu unghiul φ pentru $\alpha=\pi$.

Conform teoremei de echivalență a tensiunilor, în secțiunea barei va apare un efort torsional a cărui expresie se determină față de axa *Ox* astfel:

$$M_{tO} = \int_{-\alpha}^{\alpha} r \cdot \tau \cdot trd\theta = 4Tr\frac{sin\,\alpha - \alpha\,cos\,\alpha}{2\alpha - sin\,2\alpha} \tag{5.201}$$

Față de axa *Cx* efortul torsional se obține din relația torsorului de reducere:

$$M_{tO} = M_{tC} + T \cdot a \Rightarrow M_{tC} = M_{tO} - T \cdot a \tag{5.202}$$

Reducând torsorul din punctul *C* în punctul *A* și impunând condiția pentru efortul torsional: $M_{tA}=0$, se obține:

$$M_{tA} = M_{tC} - Te = 0 \Rightarrow e + a = 4r\frac{sin\,\alpha - \alpha\,cos\,\alpha}{2\alpha - sin\,2\alpha} \tag{5.203}$$

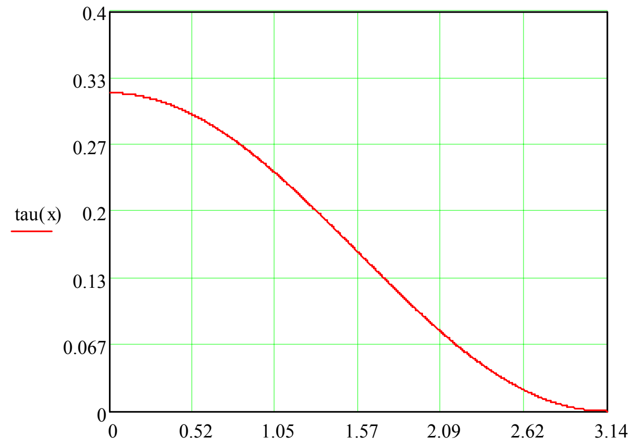


Fig. 5.48

În figura 5.49 s-a reprezentat variația distanței e+a în funcție de unghiul α, cu ajutorul funcției $F(x)=\dfrac{e+a}{4r}$ dată de relația (5.203).

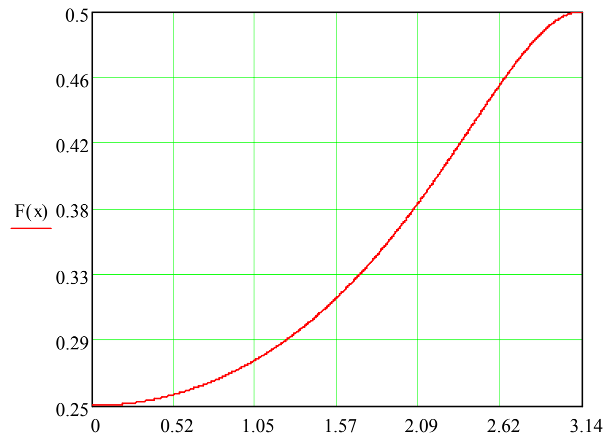


Fig. 5.49

Pentru cazul particular al profilului semicircular $\alpha=\pi$ şi rezultă $\dfrac{e+a}{4r}=0{,}5$ şi din relația (5.196) rezultă $a=0$, deci centrul de încovoiere este situat la distanța $e=2r$.

5.10. Influența forfecării asupra barelor supuse la încovoiere simplă

Conform relației lui *JURAVSKI*, tensiunile tangențiale la încovoierea simplă a barelor drepte variază neliniar (vezi paragraful 5.5, aplicația 5.2). Datorită acestor tensiuni variabile, în secțiunea barei apar deformații specifice unghiulare (lunecări specifice) variabile, maxime în zona axei centrale și nule în fibrele extreme (fig.5.50).

Pentru studiul forfecării la încovoierea simplă a barelor drepte se folosește ipoteza secțiunii plane modificate a lui *TIMOSHENKO*: *o secțiune plană perpendiculară pe axa longitudinală a barei înainte de deformare, rămâne tot plană, dar nu mai este perpendiculară pe fibra medie deformată a barei, fiind înclinată cu un unghi* γ_{med} *ce corespunde unei tensiuni de forfecare constante:* τ_{med} (fig.5.50).

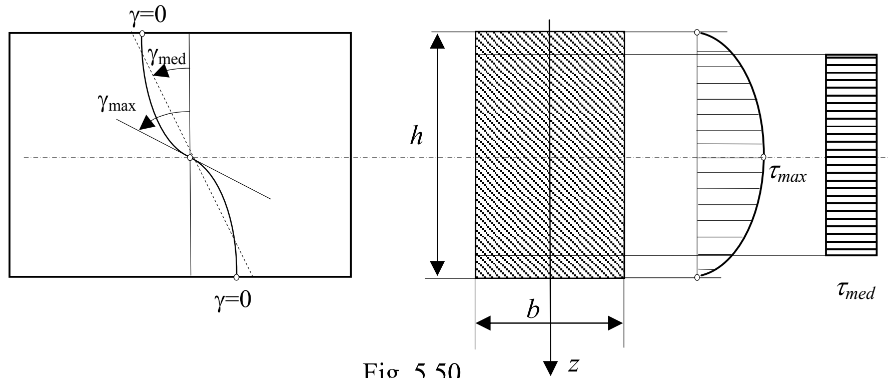


Fig. 5.50

Tensiunea tangențială medie se calculează cu ajutorul relației:

$$\tau_{med} = \frac{T_z}{A_f} \tag{5.204}$$

în care: $A_f = k_f \cdot A$ este aria de forfecare și k_f - *factorul de forfecare* care ține seama de distribuția neuniformă a tensiunilor pe suprafața secțiunii.

T_z este efortul tăietor din secțiune a cărui expresie, conform teoremei de echivalență a tensiunilor se scrie:

$$T_z = \int_A \tau dA \tag{5.205}$$

Pentru a determina factorul de forfecare k_f se egalează energiile potențiale pe unitatea de lungime scrise pentru tensiunile tangențiale reale și pentru tensiunea tangențială medie și aria de forfecare :

$$\int_A \frac{\tau^2}{2G} dA = \int_{A_f} \frac{\tau_{med}^2}{2G} dA_f \Rightarrow \tau_{med}^2 = \frac{\int_A \tau^2 dA}{k_f A} \tag{5.206}$$

Ținând seama de relațiile (5.204) şi (5.205) se obține *factorul de forfecare:*

$$k_f = \frac{1}{A}\frac{\left(\int_A \tau dA\right)^2}{\int_A \tau^2 dA} \tag{5.207}$$

În cazul secțiunii dreptunghiulare din figura 5.50 expresia tensiunilor tangențiale pe înălțimea secțiunii, dedusă la aplicația 5.2 este:

$$\tau = \frac{3T_z}{2A}\left[1 - 4\left(\frac{z}{h}\right)^2\right] \tag{5.208}$$

Efectuând integralele din relația (5.207) se obține: $k_f=0,833$ (5.209)

5.11. Probleme propuse

5.11.1. Se dă grinda cu încărcarea, rezemarea din figura 5.51.a, unde *a=1m* şi *q=20kN/m. Se cere:*

a. să se traseze diagramele de eforturi tăietoare şi încovoietoare

b. să se dimensioneze grinda ştiind că σ_a *=160 MPa*;

c. să se traseze diagramele de variație ale tensiunilor σ şi τ pe înălțimea secțiunii transversale a barei aflată la distanța a de reazemul din stânga;

d. să se determine tensiunile normale principale şi direcțiile lor în punctele secțiunii *K*, K_0 şi *Kc* din figura 5.51.b. *(Concursul de Rezistența materialelor, Ploieşti 1988)*

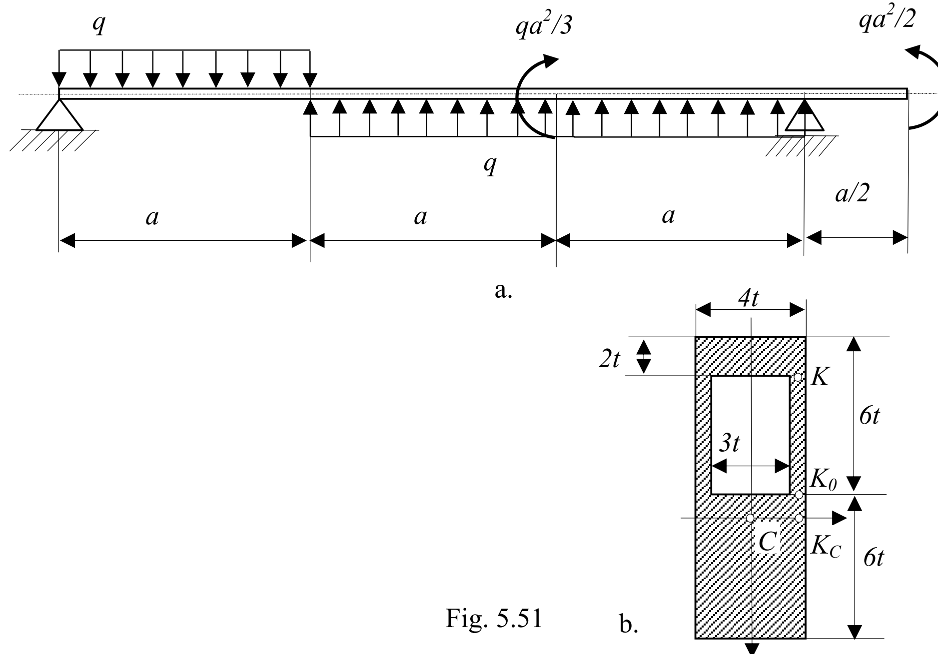


Fig. 5.51

5.11.2. Se dă grinda din oţel, cu secţiunea constantă, rezemată în (1) , (2) şi (4) şi articulată în (3), încărcată ca în figura 5.52.a, unde *a=0,5m* şi *d=20mm. Se cere:*
a. să se traseze diagramele de eforturi tăietoare şi încovoietoare
b. să se determine intensitatea maximă a sarcinii distribuite *p* astfel încât să nu se depăşească tensiunea admisibilă a materialului σ_a *=150 MPa*;
c. să se determine tensiunile normale σ_K şi tangenţiale τ_K în punctul *K* al secţiunii transversală (2) a barei (fig. 5.52.b). *(Concursul de Rezistenţa materialelor, Petroşani 1989).*

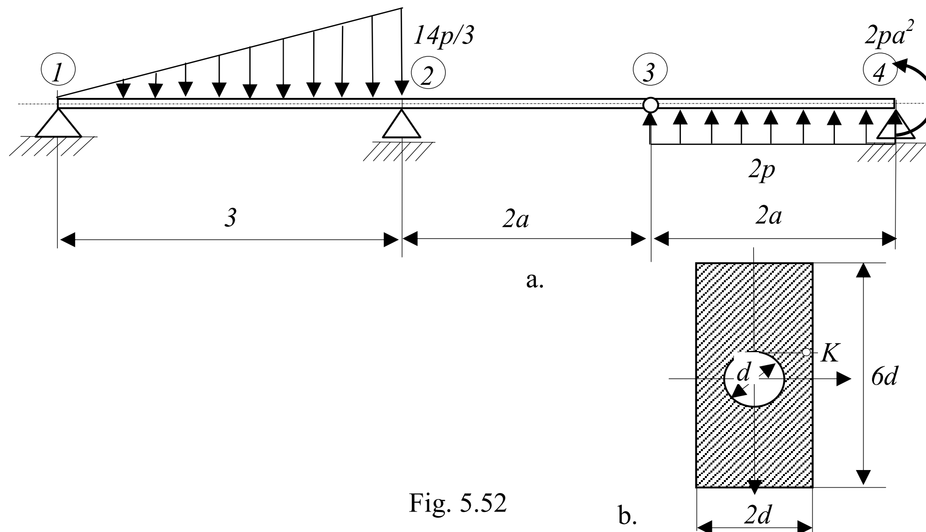


Fig. 5.52

5.11.3. Se dă grinda metalică, cu secţiunea constantă în formă de T, rezemată în (1), (2) şi (4) şi articulată în (3), încărcată ca în figura 5.53.a, unde *a=1m* şi *q=20 kN/m.* Bara are secţiunea din figura 5.53.b. *Se cere:*
a. să se traseze diagramele de eforturi tăietoare şi încovoietoare;
b. să se verifice grinda ştiind că: σ_a *=160 MPa* şi *b=60mm*;
c. să se traseze diagramele de variaţie ale tensiunilor σ şi τ pe înălţimea secţiunii transversale corespunzătoare eforturilor maxime M_{max} şi T_{max};
(Concursul de Rezistenţa materialelor, Cluj-Napoca 1988)

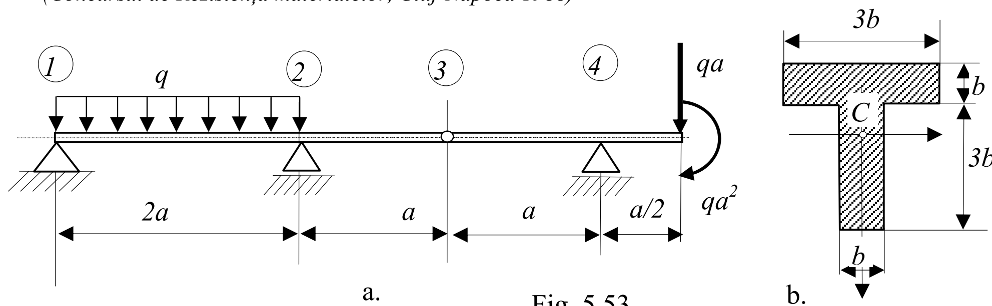
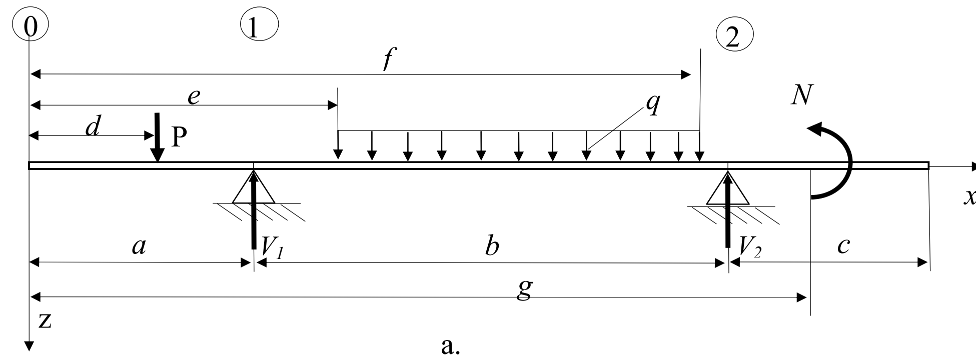


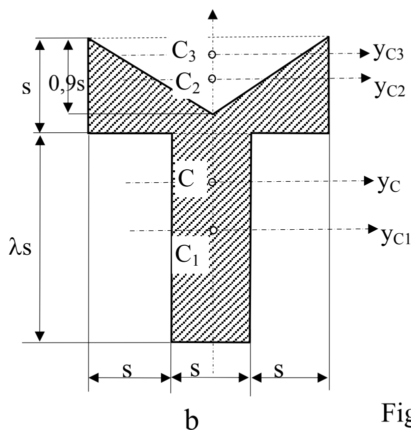
Fig. 5.53

5.11.4. Se consideră o bară dreaptă având forma generală ca în figura 5.54.a, cu două console de lungimi *a* şi *c* şi distanţa între reazeme *b* şi secţiunea constantă pe lungimea ei de forma din figura 5.54.b, solicitată la încovoiere simplă prin acţiunea următoarelor sarcini exterioare: o forţă concentrată *P* ce acţionează la distanţa *d*, o sarcină uniform distribuită *q* ce acţionează între distanţele *e* şi *f* şi un cuplu concentrat *N* ce acţionează la distanţa *g* faţă de capătul barei. Reacţiunile V_1 şi V_2 au direcţiile perpendiculare pe bară şi sensurile din fig. 5.53. *Se cere:*

1. să se determine valorile reacţiunilor V_1 şi V_2 ;
2. să se traseze diagramele eforturilor tăietoare *T* şi încovoietoare *M* ,
3. să se determine valoarea eforturilor maxime: încovoietor M_{max} şi tăietor T_{max};
4. să se determine momentul de inerţie I_y şi modulul de rezistenţă W_y în funcţie de parametrul *s* al secţiunii;
5. să se dimensioneze bara la încovoiere ştiind că: $\sigma_a = 150\ MPa$;
6. să se traseze diagrama de variaţie a tensiunilor σ şi τ pe înălţimea secţiunii transversale corespunzătoare eforturilor maxime M_{max} şi T_{max}.

(Problemă examen model 1, Universitatea VALAHIA Targoviste, 2006)





DATE DE INTRARE

a (m)	b (m)	c (m)	d (m)	e (m)	f (m)	g (m)
2	3	1	6	0	5	0

λ	P kN	q kN/m	N kNm
1	-2	1	-5

Fig. 5.54

5.11.5. Se dă grinda metalică cu încărcarea, rezemarea și secțiunea transversală din figura 5.55.a, unde $a=1m$, $c=0{,}5m$, $q_1=10kN/m$, $q_2=20kN/m$ și $M_0=20kNm$.
Se cere: a. calculul și trasarea diagramelor de eforturi tăietoare și încovoietoare;
b. dimensionarea grinzii știind că σ_a *=150 MPa*;
c. să se traseze diagramele de variație ale tensiunilor σ și τ pe înălțimea secțiunii transversale (2);
d. să se determine tensiunile normale principale și direcțiile principale în punctul K al secțiunii transversale având forma din figura 5.55.b.
(Concursul de Rezistența materialelor, Cluj-Napoca, 1990)

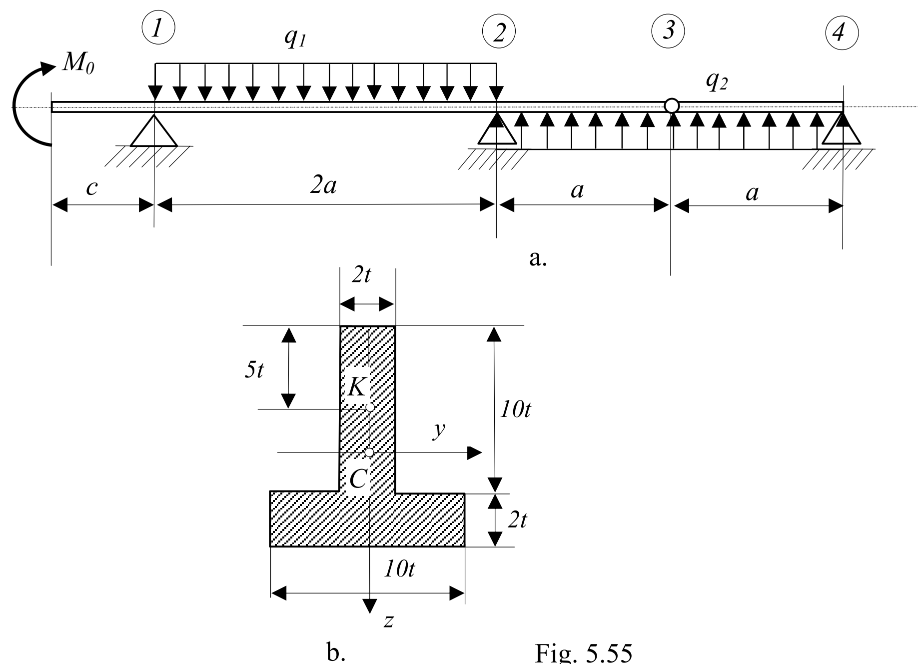


Fig. 5.55

5.11.6. Se dă grinda metalică formată dintr-un profil I_{20} (STAS 565: $h=200mm$, $b=90mm$, $d=7{,}5mm$, $A=33{,}5cm^2$, $I_y=205cm^4$, $I_z=117cm^4$), având cu încărcarea și rezemarea ca în figura 5.56.a. Se cunosc valorile: $a=1m$, $q=10kN/m$ și $M_0=20kNm$.
Se cere:
a. calculul și trasarea diagramelor de eforturi tăietoare și încovoietoare;
b. verificarea grinzii, știind că σ_a *=100 MPa*;
c. să se traseze diagramele de variație ale tensiunilor σ și τ pe înălțimea secțiunii transversale periculoase (corespunzătoare momentului maxim);

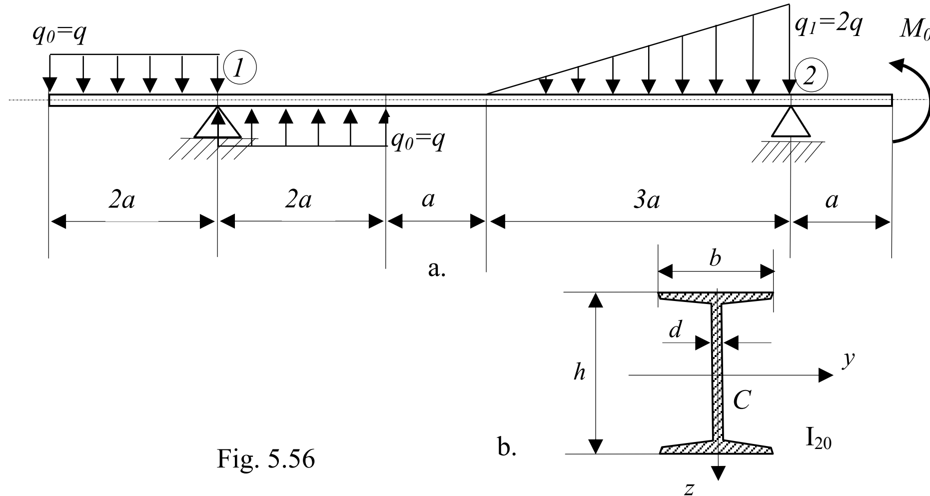


Fig. 5.56

5.11.7. Se dă grinda metalică formată din două profile independente având forma din figura 5.57.b şi c. Bara este încărcată şi rezemată ca în figura 5.57.a. Se cunosc valorile: $a=1m$, $q=10kN/m$ şi $M_0=20kNm$. *Se cere:*

a. calculul şi trasarea diagramelor de eforturi tăietoare şi încovoietoare;

b. dimensionarea grinzii, ştiind că σ_a *=100 MPa*;

c. care este valoarea maximă a tensiunii dacă cele două profile se asamblează şi sudează pe muchiile *A* şi *B* ?

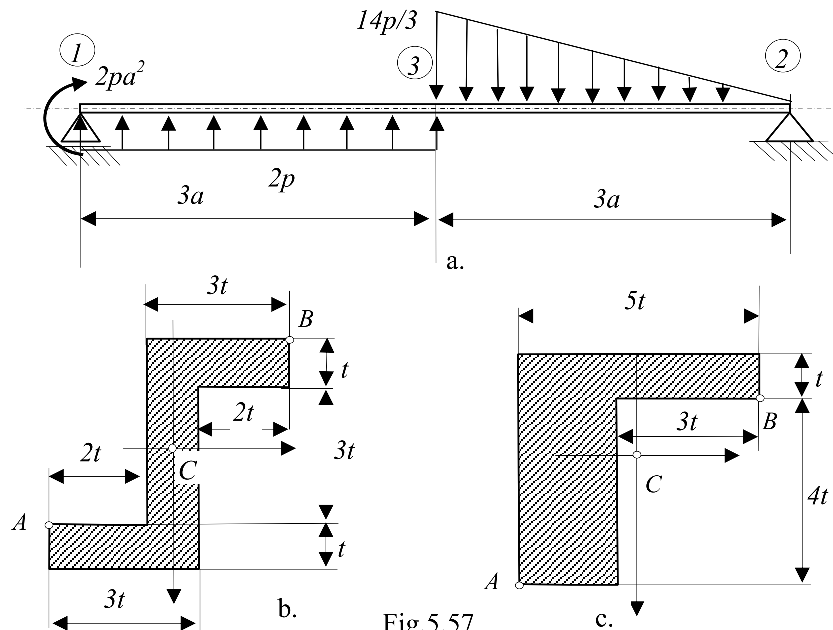


Fig.5.57

5.11.8. Se dă grinda metalică formată dintr-un profil I_{24} (STAS 565: $h=240mm$, $b=106mm$, $d=8,7mm$, $A=46,1cm^2$, $I_y=4250cm^4$, $I_z=221cm^4$)(fig.5.58.b) și două profile U_{10} (STAS 564: $h=100mm$, $b=50mm$, $d=6mm$, $e=1,55mm$, $A=13,5cm^2$, $I_y=205cm^4$, $I_z=29,3cm^4$) (fig.5.58.c), sudate între ele (fig.5.58.d,e,f), cu încărcarea și rezemarea din figura 5.58.a. Se cunosc: $a=1m$ $q=10kN/m$. *Se cere:*

a. calculul și trasarea diagramelor de eforturi tăietoare și încovoietoare;

b. verificarea grinzii, știind că $\sigma_a = 100\ MPa$;

c. să se traseze diagramele de variație ale tensiunilor σ și τ pe înălțimea secțiunii transversale periculoase.

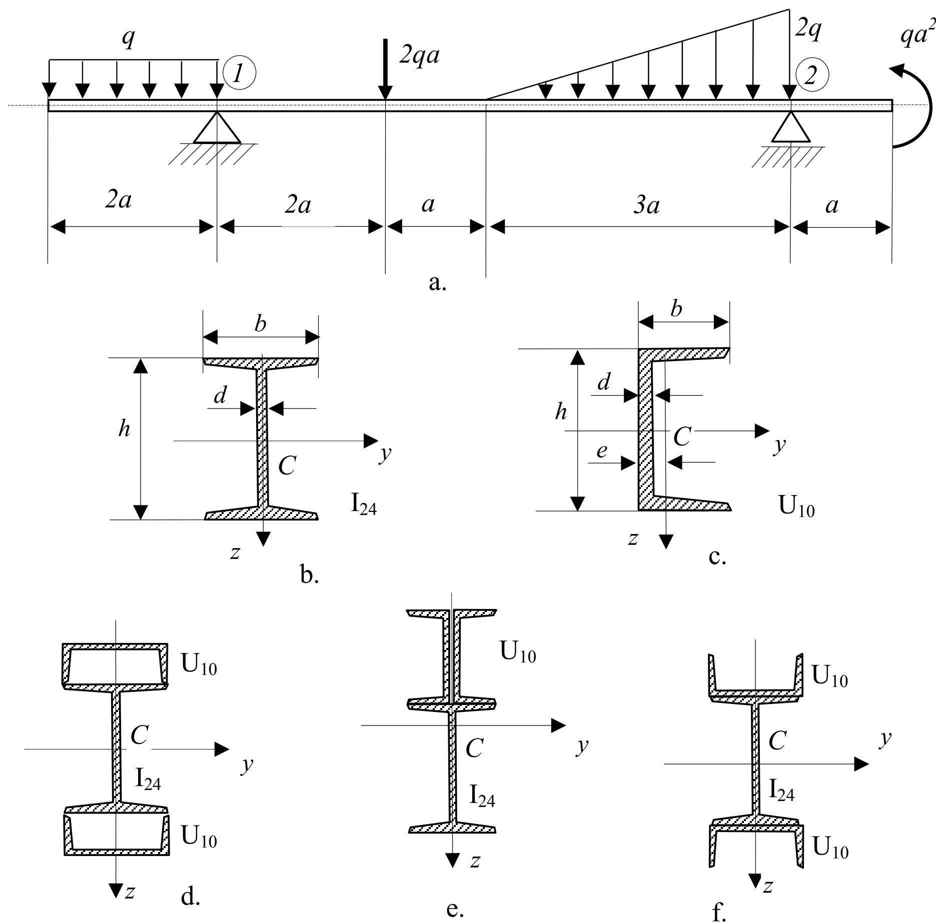


Fig. 5.58

5.11.9. Se dă grinda metalică, cu secțiunea constantă, rezemată în *A* şi *B*, încărcată cu o forță uniform distribuită *q* în plan vertical şi o forță concentrată *P=2qa* în planul orizontal trecând prin centrul de încovoiere-torsiune *C*, ca în figura 5.59.a, unde $a=1m$ şi $q=60$ *kN/m*. Bara are secțiunea din figura 5.59.b unde $t=10$ *mm*. Modulul de elasticitate este $E=2,1\cdot10^5$ *MPa. Se cere:*

1. să se traseze diagramele de eforturi;
2. verificarea barei pentru $\sigma_{admisibil}=210$ *MPa;* în secțiunile ele mai solicitate se va trasa axa neutră şi diagrama tensiunilor normale σ cu valori;
3. deplasarea totală în punctul *D*.

(Concursul Profesional de Rezistența Materialelor C.C. TEODORESCU, Târgu-Mureş, mai 2005).

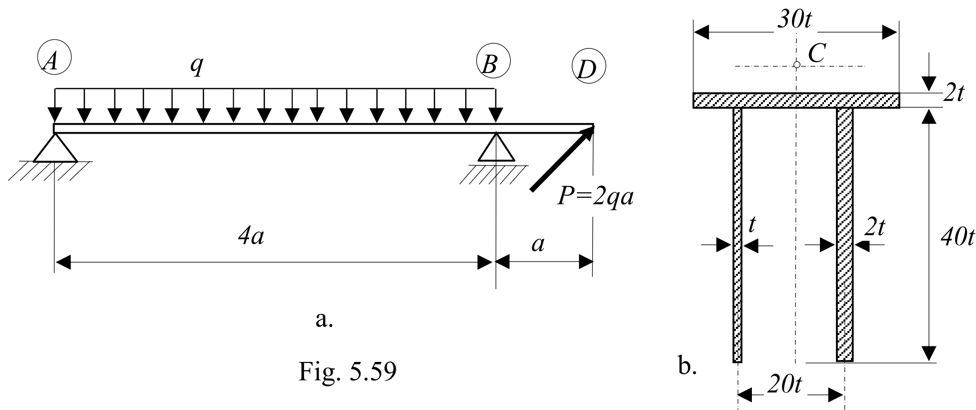


Fig. 5.59

5.11.10. Se consideră grinda de oțel cu rigiditatea *EI*=constantă având încărcarea şi rezemarea din figura 5.60.a, unde $a=1m$ şi $q=8$ *N/mm.* Secțiunea barei are forma din figura 5.60.b. Se cer:

a. diagramele de eforturi *T, M* (literal);
b. dimensionarea secțiunii, dacă se cunosc: $\sigma_a=100$ *MPa;*
c. diagrama σ în secțiunea periculoasă;
b. valoarea maximă a tensiunii tangențiale τ_{max}.

(Concursul Profesional de Rezistența Materialelor C.C. TEODORESCU, Târgu-Mureş, mai 2005).

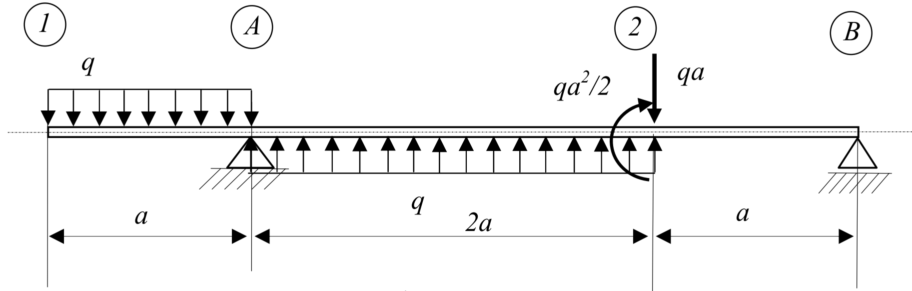


Fig.5.60.a

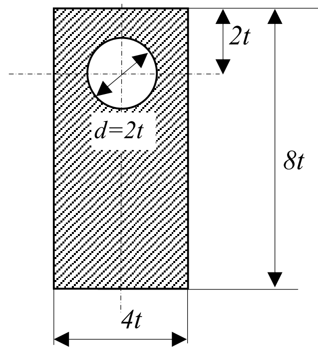


Fig.5.60.b

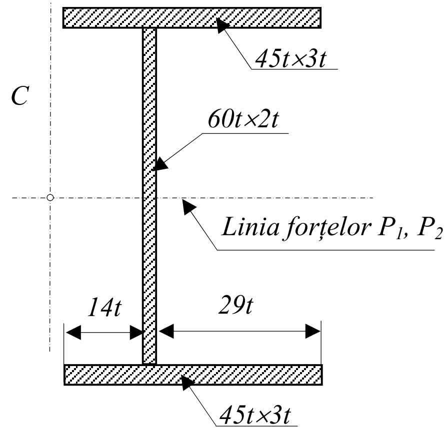


Fig.5.61.b

5.11.11. Pentru consola încărcată ca în figura 5.61.a şi având secțiunea din figura 5.61.b, se dau: $a=0,5m$, $t=6mm$. Se cere:

1. să se determine valoarea încărcării p ştiind că în secțiunea (3) $\sigma_{max}=80MPa$.
2. să se traseze diagrama tensiunilor normale în secțiunea (4);
3. să se determine poziția centrului de încovoiere-torsiune (modul de aplicare al forțelor p, P_1 şi P_2 nu conduce la torsiunea barei).

(Concursul Profesional de Rezistența Materialelor C.C. TEODORESCU, Timişoara, mai 2004).

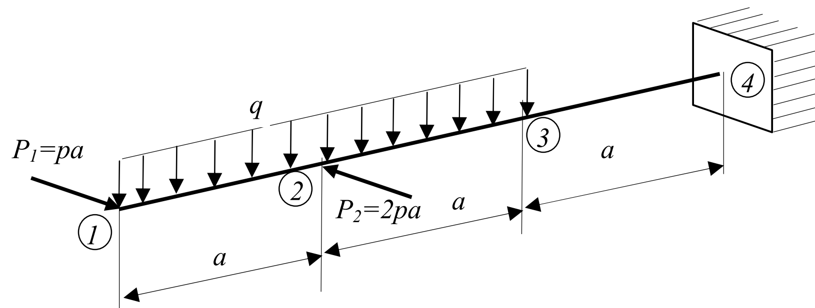


Fig. 5.61.a

5.11.12. Pentru consola din figura 5.62, cu secţiunea simetrică sudată, încărcată cu o forţă uniform distribuită q şi două forţe concentrate *12qa* şi *16qa,* considerând *AB=1,5m; BC=1,5m* şi σ_{adm}*=210 MP. Se cer:*

1. să se calculeze valoarea q_{cap} şi să se traseze diagramele tensiunilor σ_x în secţiunea cea mai solicitată ;

2. să se determine M_{xcap} ştiind că τ_{adm}*=80 MPa* şi diagramele tensiunilor tangenţiale τ în varianta în care sudura din punctul *i* cedează.

(Concursul Profesional de Rezistenţa Materialelor C.C. TEODORESCU, UTCB , mai 2006).

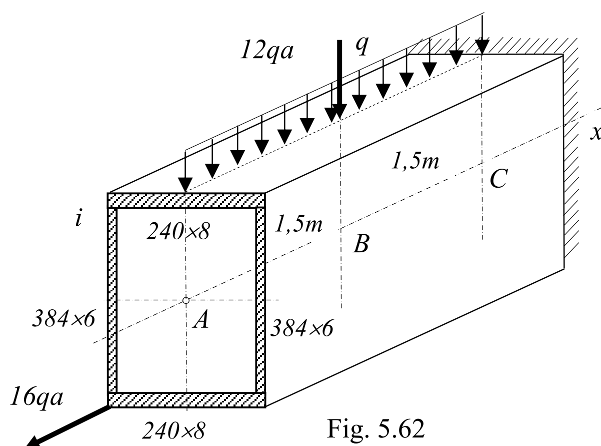
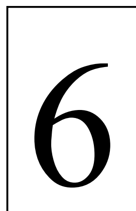


Fig. 5.62



FORFECAREA BARELOR

6.1. Introducere

Solicitarea de forfecare a barelor se datorează existenței în secțiunea barei a eforturilor tăietoare *T*, aşa cum s-a arătat şi la încovoierea simplă a barelor.

Se consideră o bară dreaptă de secțiune dreptunghiulară $b \times h$ rezemată la capete şi supusă la forfecare sub acțiunea a două forțe *P* perpendiculare pe axa barei, situate la o distanță foarte mică *e* (muchiile tăietoare ale unei ghilotine).

Într-o secțiune situată la mijlocul distanței *e* dintre cele două forțe *P* bara este supusă la *forfecare pură,* aşa cum rezultă din diagramele eforturilor *T* şi *M* din figura 6.2.

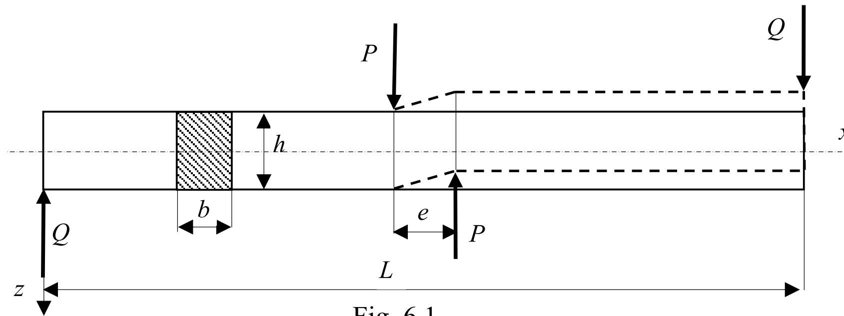


Fig. 6.1

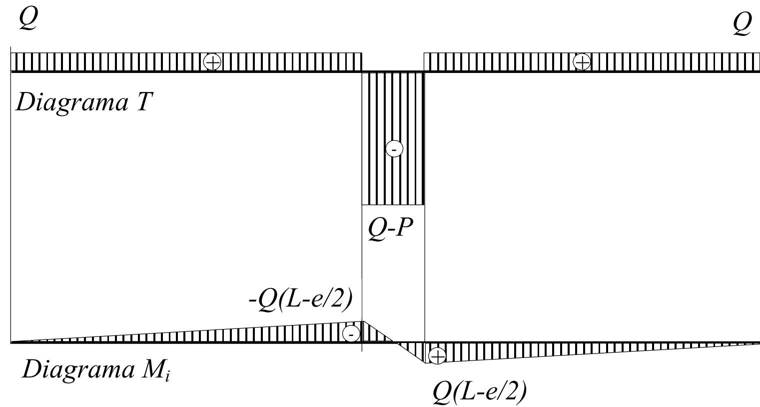


Fig. 6.2

Cu cât distanța *e* dintre cele două forțe *P* este mai mică cu atât forțele *Q* din reazemele barei sunt mai mici, conform ecuației de momente:

$$Pe - QL = 0 \qquad \Rightarrow \qquad Q = \frac{e}{L}P \tag{6.1}$$

Se observă din diagramele de eforturi din figura 6.2 că bara este supusă la forfecare şi încovoiere pe toată lungimea sa, iar pe distanța *e* preponderent la forfecare. În secțiunea situată la mijlocul distanței dintre cele două forțe *P* există numai eforturi tăietoare *Q-P*, cele încovoietoare fiind nule.

Se consideră un element de volum *dV=dxdydz* din zona secțiunii supusă la forfecare pură. Pe fețele acestui element acționează tensiunile tangențiale τ_{xz} şi τ_{zx} ca în figura 6.3.

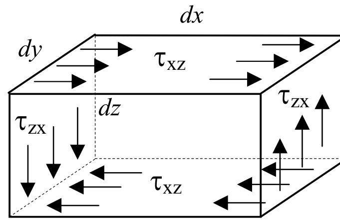


Fig. 6.3

Dacă se scriu ecuațiile de echilibru pentru forțele elementare de pe cele patru fețe ale elementului se obține:

$$\begin{aligned} &\sum F_x = 0: \quad \tau_{xz}dxdy - \tau_{xz}dxdy = 0 \\ &\sum F_z = 0: \quad \tau_{zx}dzdy - \tau_{zx}dzdy = 0 \\ &\sum My = 0: \quad \tau_{xz}dxdy \cdot dz - \tau_{zx}dzdy \cdot dx = 0 \end{aligned} \qquad (6.2)$$

Primele două relații sunt identități iar a treia conduce la *legea dualității tensiunilor tangențiale*:

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \qquad (6.3)$$

Legea dualității tensiunilor tangențiale afirmă că tensiunile tangențiale ce acționează pe fețele unui element de volum supus la forfecare pură sunt reciproc perpendiculare pe muchia comună şi egale.

În cazul forfecării pure a barelor drepte se face ipoteza ca tensiunile tangențiale sunt constante pe suprafața secțiunii:

$$\tau_{zx} = constant \qquad (6.4)$$

Dacă se integrează forțele elementare datorate acestor tensiuni tangențiale se obține efortul tăietor T_z:

$$\begin{aligned} &T_z = \int_A \tau_{zx} dA = \tau_{zx} \int_A dA \\ &\Rightarrow T_z = \tau_{zx} \cdot A \end{aligned} \qquad (6.5)$$

Relația (6.5) se utilizează în calculele de forfecare ale barelor subțiri.

Relațiile de calcul pentru cele trei tipuri de calcule sunt :

- pentru calculul de verificare la forfecare:

$$\tau_{zx} = \frac{T_z}{A} \le \tau_a \qquad (6.6)$$

în care τ_a este rezistența admisibilă la forfecare a materialului.

- pentru calculul de dimensionare la forfecare se scrie:

$$A_{nec} = \frac{T_z}{\tau_a} \qquad (6.7)$$

- pentru calculul forței capabile la forfecare se scrie:

$$T_{cap} = A \cdot \tau_a \tag{6.8}$$

Relațiile de calcul de mai sus se aplică pentru calculul :

- îmbinărilor nedemontabile cu nituri şi sudate (lipite);
- îmbinărilor cu pene şi caneluri;
- filetului şuruburilor;
- şaibelor, bucşelor, etc.

6.2. Calculul la forfecare al îmbinărilor cu nituri

Îmbinările cu nituri sunt îmbinări nedemontabile în care elementele de îmbinare (niturile) sunt supuse la solicitările de forfecare şi presiune de contact. Diametrul nitului este cu 0,5 ... 1 mm mai mic decât diametrul găurii de nit pentru a permite introducerea cu joc a nitului ce urmează a fi bătut.

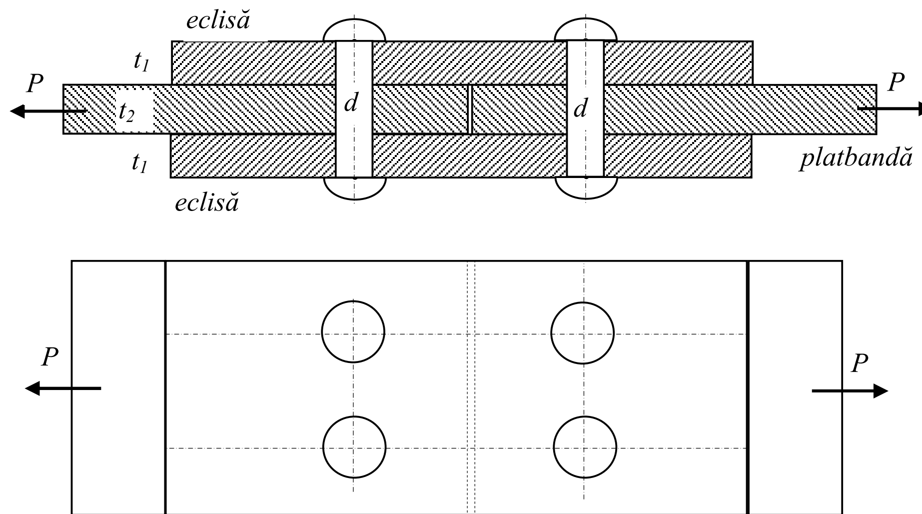


Fig 6.3

În figura 6.3 este prezentată o îmbinare cu nituri a două platbande cu eclise. Baterea niturilor este operația de deformare plastică la cald sau la rece a capătului cilindric al nitului în vederea obținerii capului semisferic şi a eliminării jocului între nit şi gaură.

Diametrul niturilor se alege în funcție de grosimea minimă a platbandei sau ecliselor conform relației:

$$d \cong \sqrt{50 t_{min}} - a \tag{6.9}$$

în care a este o valoarea în funcție de tipul îmbinării: de rezistență sau de etanşare.

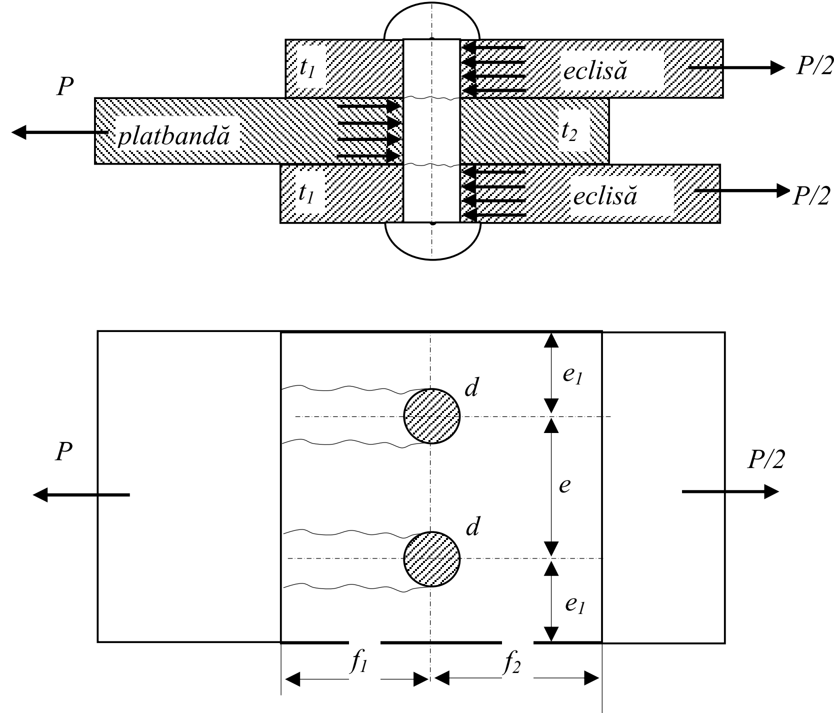


Fig 6.4

Calculul niturilor se face la forfecare şi la strivire:

- la forfecare $\tau = \frac{T}{A_f} = \frac{P}{n \cdot i \cdot \frac{\pi d^2}{4}} \leq \tau_{af}$ (6.10)

în care n reprezintă numărul de nituri pe o platbandă (pentru fig. 6.3: $n=2$)
i numărul de secţiuni de forfecare (pentru fig. 6.3: $i=2$)

- la strivire $p_s = \frac{P}{A_s} = \frac{P}{n \cdot h_{min} d} \leq p_{as}$ (6.11)

în care h_{min} reprezintă grosimea minimă a platbandei respective a ecliselor (în fig 6.3: $t_{min} = min\ (2t_1, t_2)$)

Calculului tablelor (platbandă şi eclise) se face la tracţiune respectiv la forfecare:

- la tracţiune $\sigma_t = \frac{P}{A_t} = \frac{P}{(2e_1 + e_2) \cdot h_{min}} \leq \sigma_{at}$ (6.12)
- la forfecare $\tau = \frac{T}{A_f} = \frac{P}{2n \cdot h_{min} \cdot f_{min}} \leq \tau_a$ (6.13)

în care n reprezintă numărul de nituri pe o platbandă (în fig. 6.3: $n=2$)
f_{min} reprezintă lățimea minimă a platbandei respective a ecliselor supusă la forfecare (în fig 6.4: $f_{min}= min\ (f_1,f_2)$).

6.3. Calculul la forfecare al îmbinărilor sudate

Îmbinările sudate sunt îmbinări nedemontabile având ca elemente de îmbinare cordoane de sudură supuse în principal la solicitarea de de forfecare.

Pentru calculul îmbinărilor sudate se fac următoarele ipoteze:

a. tensiunea admisibilă pentru materialul cordonului de sudură se alege în funcție de tipul solicitării :

- pentru sudura solicitată la tracțiune: $\sigma_{as}=0,8\cdot\sigma_a$;
- pentru sudura solicitată la compresiune: $\sigma_{as}= \sigma_a$;
- pentru sudura solicitată la forfecare: $\sigma_{as}=0,65\cdot\sigma_a$

în care σ_a este tensiunea admisibilă a tablelor de îmbinare.

b. tensiunile de forfecare se distribuie uniform pe toată suprafața de calcul a cordonului de sudură;

c. convexitatea cordonului de sudură nu se ia în calcul şi nici depăşirea grosimii cordonului de sudură sau capetele cordonului de sudură: lungimea de calcul a cordonului de sudură se consideră: $L_c=L-2a$

unde cu a se notează înălțimea cordonului de sudură (fig.6.5)

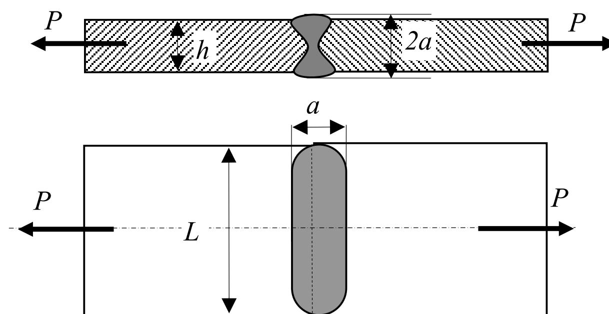


Fig 6.5

6.3.1. Calculul sudurii cap la cap

Se consideră că acest tip de sudură este supus la întindere sau compresiune şi grosimea cordonului de sudură a se consideră egală cu jumătate din grosimea tablelor sudate h (fig.6.5). Relația de calcul în acest caz se scrie:

$$\sigma_t = \frac{P}{A_t} = \frac{P}{(L-2a)\cdot h} \le \sigma_{as} \tag{6.14}$$

6.3.2. Calculul sudurii frontale

Cordoanele de sudură sunt supuse în acest caz unor solicitări compuse de întindere şi forfecare (fig.6.6). Dacă se consideră că cele două table au aceeaşi lăţime b şi aceeaşi grosime $t_1=t_2=h$ atunci între grosimea cordonului de sudură a şi grosimea h există relaţia: $a = 0{,}7 \cdot h$ (6.15)

Forţa corespunzătoare fiecărui cordon de sudură este :

$$T = N = \frac{P}{2} cos\, 45^0 \cong 0{,}35P\ . \qquad (6.16)$$

- Pentru solicitarea de întindere rezultă tensiunea:

$$\sigma_t = \frac{0{,}35P}{A_t} = \frac{0{,}35P}{(L-2a)\cdot a} \leq \sigma_{as} \qquad (6.17)$$

- Pentru solicitarea de forfecare rezultă tensiunea:

$$\tau_f = \frac{0{,}35P}{A_f} = \frac{0{,}35P}{(L-2a)\cdot a} \leq 0{,}65\sigma_{as} \qquad (6.18)$$

Se observă că cea de a doua relaţie este mai restrictivă, solicitarea de forfecare fiind în acest caz predominantă.

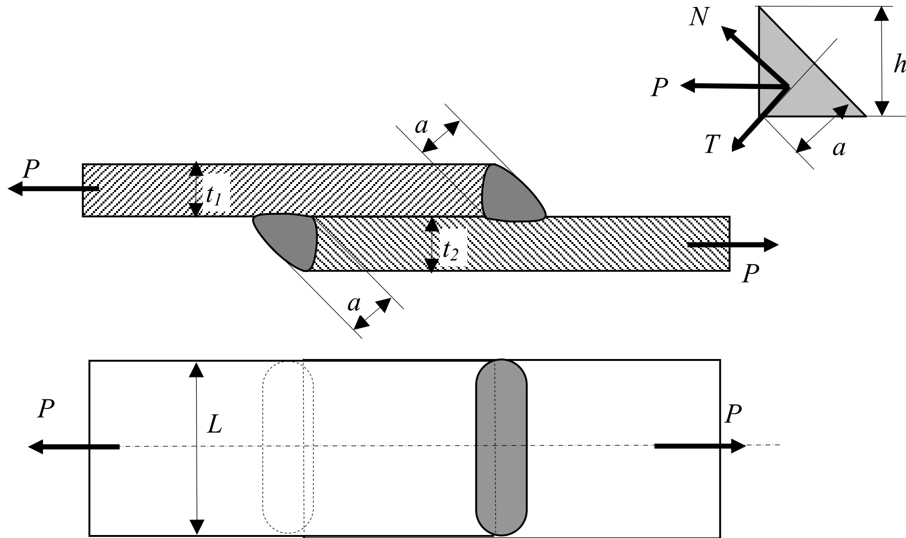


Fig 6.6

În calculele cordoanelor de sudură frontale se foloseşte o relaţie care ţine seama de ambele solicitări:

$$\tau_f = \frac{0{,}5P}{(L-2a)\cdot a} \leq 0{,}65\cdot\sigma_{as}\,; \quad a = 0{,}7h \qquad (6.18)$$

6.3.3. Calculul sudurii laterale

Cordoanele de sudură laterale sau de flanc sunt supuse numai solicitărilor de forfecare. Dacă se consideră că cele două table au grosimile t_1 *şi* t_2 atunci între grosimea cordonului de sudură a şi grosimea t_1 (fig.6.7), există relația:

$$a = 0{,}7 \cdot t_1 \tag{6.19}$$

Forțele corespunzătoare celor două cordoane de sudură se determină din ecuațiile de momente față de axa forțelor P:

$$T_1 = \frac{c}{c+e} P; \quad T_2 = \frac{e}{c+e} P; \tag{6.20}$$

Condiția de rezistență la forfecare pentru fiecare din cele două cordoane se scrie astfel:

- Pentru cordonul 1:

$$\tau_{f1} = \frac{T_1}{A_f} = \frac{c}{c+e} \frac{P}{(L_1 - 2a) \cdot a} \leq 0{,}65 \cdot \sigma_{as} \tag{6.21}$$

- Pentru cordonul 2:

$$\tau_{f2} = \frac{T_2}{A_f} = \frac{e}{c+e} \frac{P}{(L_2 - 2a) \cdot a} \leq 0{,}65 \cdot \sigma_{as} \tag{6.22}$$

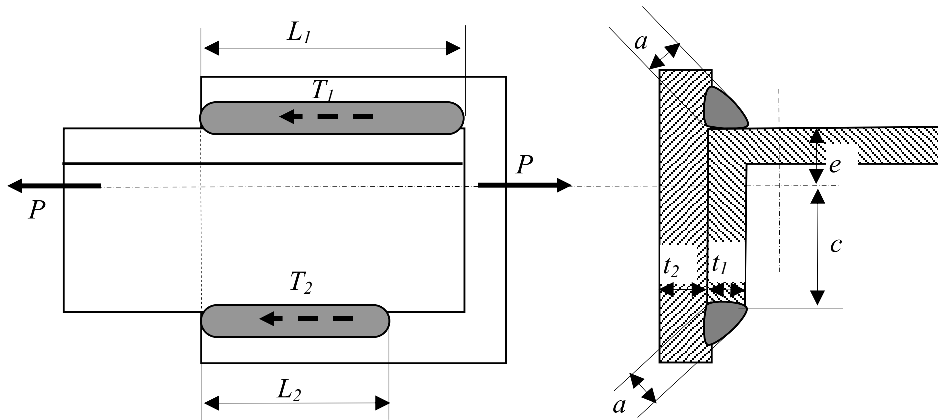


Fig 6.7

6.4. Problemă propusă

În vederea încercării statice la forfecare pură a materialelor s-a propus o schemă principială având forma din figura 6.8.a, în care epruveta de lungime $L+2c$ este simplu rezemată şi încărcată simetric, la mijlocul deschiderii şi la capetele celor două console, cu trei forţe concentrate F. Rotind această schemă cu 180^0 şi notând cu $L_0=L/2+c$, se obţine schema static nedeterminată din figura 6.8.b. Se cere:

1. determinarea valorii raportului $k=c/L$, respectiv $z=c/L_0$, pentru care cele două grinzi sunt echivalente din punct de vedere al încărcărilor;
2. calculul săgeţilor din punctele (0), (1) şi (2) ale grinzii din figura 6.8.a.

(prof. dr. ing. Augustin CREŢU, Probleme alese din Rezistenţa materialelor, UT Cluj-Napoca 1993)

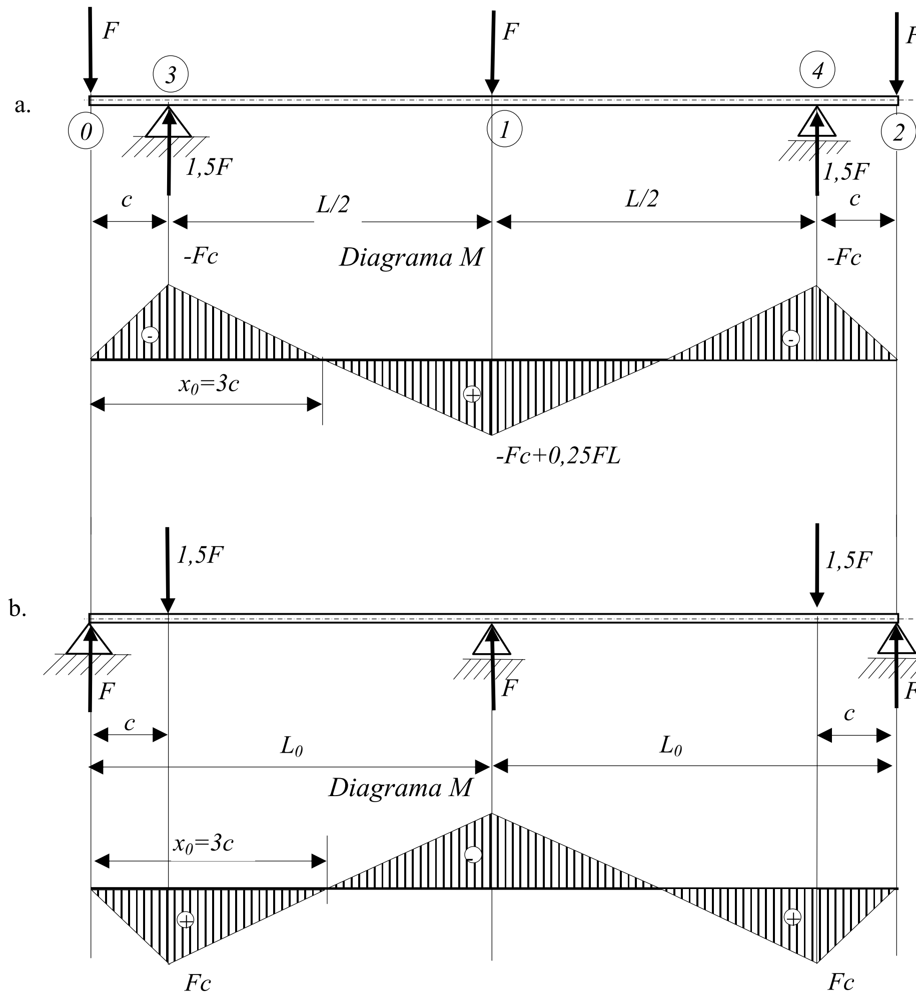
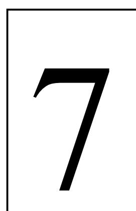


Fig. 6.8



DEFORMAȚIILE LA ÎNCOVOIERE ALE BARELOR

7.1. Ecuația diferențială a fibrei medii deformate

7.1.1. Deformațiile barei în cazul încovoierii simetrice

Se consideră o bară dreaptă de lungime L şi rigiditate la încovoiere EI_y constantă şi un sistem de axe drept *Oxyz.* Bara este supusă la încovoiere simetrică de un sistem de forțe şi cupluri de forțe care acționează într-un plan ce conține axa longitudinală a barei şi axa de simetrie a secțiunii transversale *(Oxz)* (fig.7.1). În urma deformațiilor axa longitudinală a barei - inițial o line dreaptă - devine o curbă plană numită *fibra medie deformată* sau *linia elastică a barei.*

În cazul *încovoierii simetrice după axa Oy* , forma fibrei medii deformate a barei este definită de *săgeata w(x)* sau deplasarea după direcția axei *Oz* şi *panta w'(x)* la linia elastică sau *rotirea secțiunii* $\varphi_y(x)$ după direcția axei *Oy*.

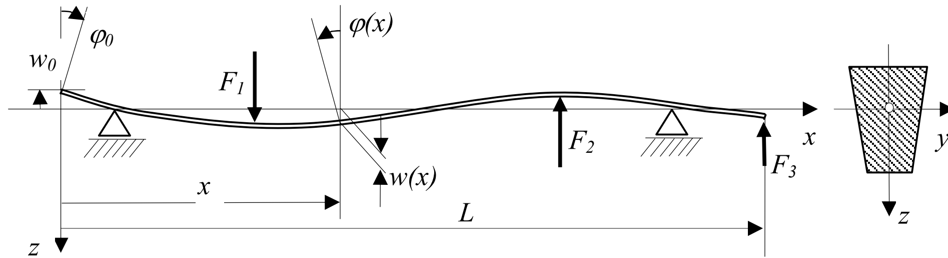


Fig 7.1

Într-o secțiune situată la distanța x de capătul barei solicitată de un moment încovoietor $M_{iy}=M$ pozitiv, săgeata $w(x)$ şi panta $w'(x)$ sunt pozitive, iar rotirea secțiunii $\varphi_y(x)$ este negativă, aşa cum rezultă din figura 7.2:

$$\frac{dw}{dx} = -\varphi_y \qquad (7.1)$$

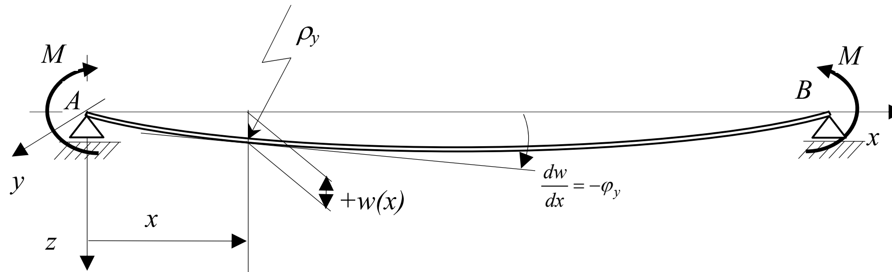


Fig 7.2

Ținând seama de relația (7.1) şi de relația (5.93) dintre curbura $1/\rho_y$ şi rotirea specifică ω_y se obține:

$$\frac{1}{\rho_y}=\omega_y=\frac{d\varphi_y}{dx}=-\frac{d^2w}{dx^2} \tag{7.2}$$

Ținând seama de relația pentru rotirea specifică (5.93) şi relația (7.2) rezultă ecuația diferențială a fibrei medii deformate pentru încovoierea simetrică după axa *Oy*:

$$\frac{d^2w}{dx^2}=-\frac{M_{iy}}{EI_y} \tag{7.3}$$

Din figura 7.2 se observă că față de un sistem drept *Oxyz,* un moment încovoietor M_{iy} pozitiv produce săgeți *w(x)* pozitive, linia elastică este concavă cu derivata a doua negativă $w''<0$, ceea ce confirmă semnul minus din relația (7.3).

În cazul *încovoierii simetrice după axa Oz* fibra media deformată a barei este definită de deplasarea după direcția axei *Oy* sau *săgeata v(x)* şi *panta v'(x)* la linia elastică sau *rotirea secțiunii* $\varphi_z(x)$ după direcția axei *Oz*.

Într-o secțiune situată la distanța *x* de capătul barei solicitată de un moment încovoietor $M_{iz}=N$ pozitiv, atât săgeata *v(x)* şi panta *v'(x)* sunt pozitive, cât şi rotirea secțiunii $\varphi_z(x)$ aşa cm rezultă din figura 7.3:

$$\frac{dv}{dx}=\varphi_z \tag{7.4}$$

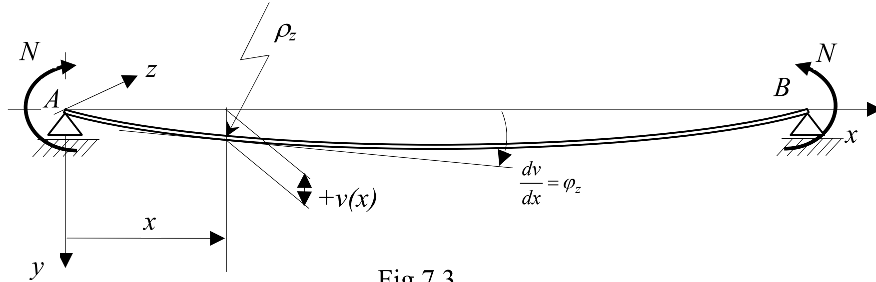


Fig 7.3

În mod asemănător se scrie curbura $\frac{1}{\rho_z}$ sau rotirea specifică ω_z după *Oz*:

$$\frac{1}{\rho_z}=\omega_z=\frac{d\varphi_z}{dx}=\frac{d^2v}{dx^2} \tag{7.5}$$

Ecuația diferențială a fibrei medii deformate la încovoierea simetrică după *Oz*:

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\frac{M_{iz}}{EI_z} \tag{7.6}$$

7.1.2. Deformațiile barei în cazul încovoierii oblice

Se consideră o bară dreaptă de lungime L și un sistem drept $Oxyz$, cu axa Oz oarecare - nu este o axă de simetrie și nici axă principală de inerție. Sub acțiunea forței P din planul Oxz (fig.7.4) bara este supusă la încovoiere oblică întrucât efortul încovoietor M_{iy} se descompune după cele două direcții principale ale secțiunii, aceste componente dând deplasări și rotiri independente conform celor prezentate la încovoierea oblică (paragraful 5.7).

Linia elastică este o curbă în spațiu caracterizată de patru parametri: *săgeata* $w(x)$ după direcția axei Oz , *săgeata* $v(x)$ după direcția axei Oy, *rotirea secțiunii* $\varphi_y(x)$ după direcția Oy și *rotirea secțiunii* $\varphi_z(x)$ după direcția Oz (fig.7.4).

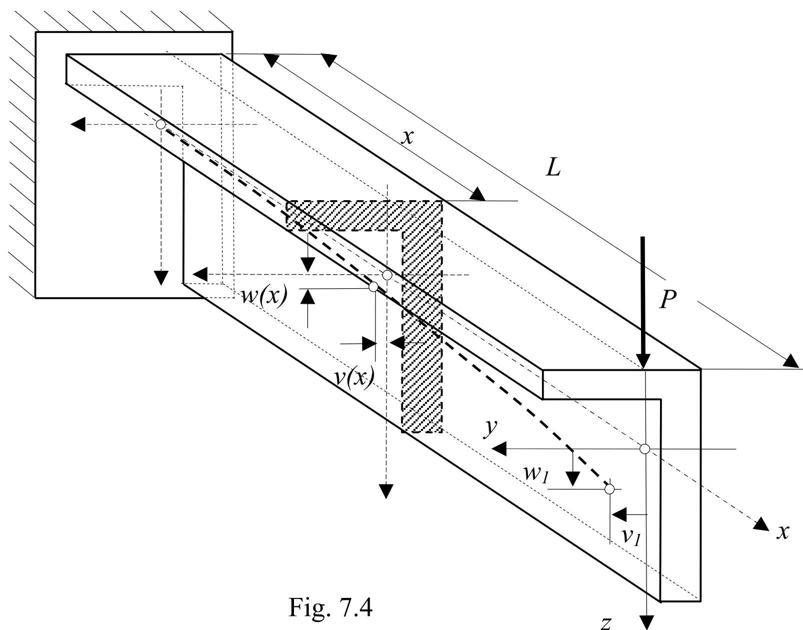


Fig. 7.4

Ecuația diferențială a fibrei medii deformate, în proiecții pe cele două plane Oxz și Oxy se obține cu ajutorul expresiilor rotirilor specifice după cele două axe Oy și Oz din relația (5.176), înlocuind pe $M_{iz}=0$:

$$\omega_y = \frac{I_z M_{iy}}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)};$$
$$\omega_z = \frac{I_{yz} M_{iy}}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}. \qquad (7.7)$$

Pentru consola din figura 7.4 forța P produce în secțiunea situată la distanța x de încastrare un moment încovoietor M_{iy} negativ și săgeți $w(x)$ și $v(x)$ pozitive.

Aşa cum rezultă din figura 7.2 şi 7.3 rotirea specifică după direcţia axei *Oy* corespunde unei pante negative: $\varphi_y = -\frac{dw}{dx}$, iar rotirea specifică după direcţia axei *Oz* corespunde unei pante pozitive: $\varphi_z = \frac{dv}{dx}$. (7.8)

Înlocuind în relaţiile (7.7) şi ţinând seama de relaţia (7.2) se obţin ecuaţiile diferenţiale ale deformaţiilor barei la încovoierea oblică din cele două plane *Oxz* şi *Oxy*, fără a mai fi necesară determinarea direcţiilor şi planelor principale:

$$\begin{aligned} \frac{d^2w}{dx^2} &= -\frac{I_z M_{iy}}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)} \\ \frac{d^2v}{dx^2} &= \frac{I_{yz} M_{iy}}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)} \end{aligned} \qquad (7.9)$$

Prin integrarea ecuaţiilor diferenţiale (7.9) şi introducerea condiţiilor la limită corespunzătoare, se obţin funcţiile: $\varphi_y(x)$ $\varphi_z(x)$ şi respectiv $w(x)$, $v(x)$.

Expresia efortului încovoietor pentru bara din figura 7.4. se scrie:

$$M_{iy}(x) = -P(L-x) \qquad (7.10)$$

Condiţiile la limită sunt:

$$\begin{aligned} &w(0)=0; \quad v(0)=0; \\ &w'(0)=0; \quad v'(0)=0 \end{aligned} \qquad (7.11)$$

Dacă secţiunea are forma din figura 7.4 şi dimensiunile din figura 5.21, momentele de inerţie axiale şi centrifugale faţă de axele *Oy* şi *Oz* ce trec prin centrul de greutate al secţiunii au fost calculate la aplicaţia 5.1:

$$I_y = 8{,}5a^4; \quad I_z = 4a^4; \quad I_{yz} = -3a^4 \qquad (7.12)$$

Integrând ecuaţiile diferenţiale (7.8) şi introducând condiţiile la limită pentru rotiri (7.11) şi expresiile momentelor (7.12) se obţine:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= -\frac{I_z}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)} \int_0^x M_{iy}(s)ds = \frac{4P}{25Ea^4}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{I_{yz} M_{iy}}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)} \int_0^x M_{iy}(s)ds = \frac{3P}{25Ea^4}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) \end{aligned} \qquad (7.13)$$

Rotirile corespunzătoare după direcţia axelor *Oy* şi *Oz* sunt:

$$\begin{aligned} \varphi_y(x) &= -\frac{dw}{dx} = -\frac{4P}{25Ea^4}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) \\ \varphi_z(x) &= \frac{dv}{dx} = \frac{3P}{25Ea^4}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) \end{aligned} \qquad (7.14)$$

Din relaţiile (7.14) se observă că rotirea după *Oz* este pozitivă, iar rotirea după axa *Oy* negativă.

Integrând încă o dată relaţiile (7.13) şi introducând condiţiile la limită (7.11) se obţine:

$$w(x) = \frac{4P}{25Ea^4}\left(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right);$$
$$v(x) = \frac{3P}{25Ea^4}\left(L\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \tag{7.15}$$

Din relaţiile (7.15) se observă că săgeţile după direcţiile *Oy* şi *Oz* sunt pozitive pentru orice valoare a lui $x \in [0, L]$. Expresiile rotirilor şi săgeţilor secţiunii din capătul barei ($x=L$) sunt:

$$\varphi_{y1} = -\frac{4PL^2}{50Ea^4}; \quad \varphi_{z1} = \frac{3PL^2}{50Ea^4} \quad w_1 = \frac{4PL^3}{75Ea^4}; \quad v_1 = \frac{3PL^3}{75Ea^4}. \tag{7.16}$$

7.1.3. Deformaţiile barei în cazul încovoierii spaţiale

Se consideră o bară dreaptă de lungime *L* şi un sistem drept *Oxyz*, cu axa *Oz* oarecare - care nu este o axă de simetrie şi nici axă principală de inerţie. Bara este supusă la încovoiere spaţială sub acţiunea forţei transversale P_1 ce acţionează în planul *Oxz* şi a forţei transversale P_2 ce acţionează în planul *Oxy* (fig.7.5). Eforturile încovoietoare într-o secţiune oarecare situată la distanţa *x* se scriu:

$$M_{iy}(x) = -P_1(L-x); \qquad M_{iz}(x) = P_2(L-x) \tag{7.17}$$

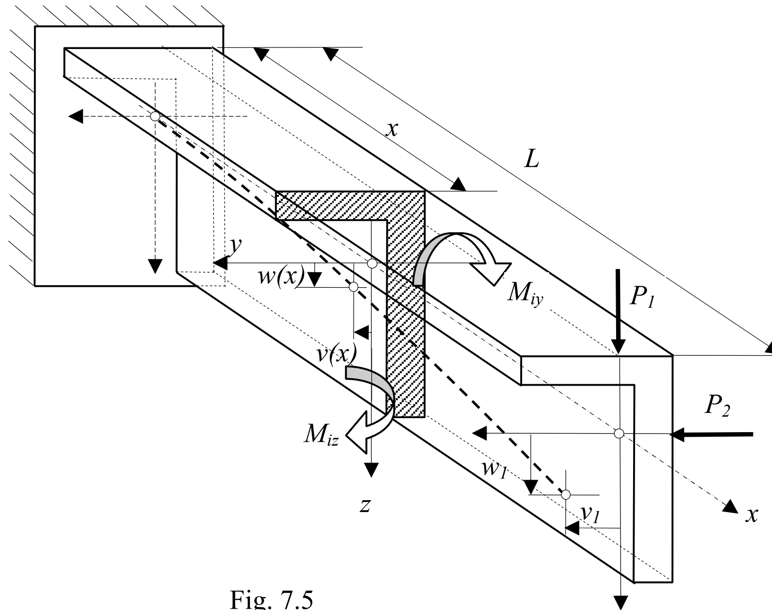


Fig. 7.5

Ca şi în cazul încovoierii oblice, *linia elastică a barei* în acest caz este o curbă în spaţiu caracterizată de patru parametri: *săgeata w(x)* după direcţia axei *Oz*, *săgeata v(x)* după direcţia axei *Oy*, *rotirea secţiunii* $\varphi_y(x)$ după direcţia *Oy* şi *rotirea secţiunii* $\varphi_z(x)$ după direcţia *Oz*.

Ecuaţia diferenţială a fibrei medii deformate, în proiecţii pe cele două plane *Oxz* şi *Oxy* se obţine cu ajutorul expresiilor rotirilor specifice după direcţiile celor două axe *Oy* şi *Oz* date de relaţiile (5.176):

$$\omega_y = \frac{I_z M_{iy} + I_{yz} M_{iz}}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}; \qquad \omega_z = \frac{I_{yz} M_{iy} + I_y M_{iz}}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)} \tag{7.18}$$

Aşa cum rezultă din figura 7.2 şi 7.3 rotirea specifică după axa *Oy* corespunde unei pante negative, iar după axa *Oz* corespunde unei pante pozitive.

Înlocuind în relaţiile (7.18) şi ţinând seama de relaţia (7.8) se obţin ecuaţiile diferenţiale ale deplasărilor la încovoierea spaţială:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{I_z M_{iy} + I_{yz} M_{iz}}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}; \qquad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{I_{yz} M_{iy} + I_y M_{iz}}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)} \tag{7.19}$$

Prin integrarea ecuaţiilor diferenţiale (7.19) şi introducerea condiţiilor la limită:

$$w(0) = 0; \quad v(0) = 0; \quad w'(0) = 0; \quad v'(0) = 0 \tag{7.20}$$

se obţin funcţiile ce caracterizează deformaţia în cazul încovoierii spaţiale.

Dacă secţiunea are dimensiunile din figura 5.21, momentele de inerţie axiale şi centrifugale faţă de axele *Oy* şi *Oz* ce trec prin centrul de greutate al secţiunii calculate la aplicaţia 5.1 sunt:

$$I_y = 8{,}5a^4; \quad I_z = 4a^4; \quad I_{yz} = -3a^4 \tag{7.21}$$

Integrând ecuaţiile diferenţiale (7.19) se obţine:

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{1}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}\left[I_z \int_0^x M_{iy}(s)ds + I_{yz}\int_0^x M_{iz}(s)ds\right]$$
$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}\left[I_{yz} \int_0^x M_{iy}(s)ds + I_y\int_0^x M_{iz}(s)ds\right] \tag{7.22}$$

Introducând condiţiile la limită (7.20) şi ţinând seama de expresiile (7.16) ale funcţiilor moment M_{iy} şi M_{iz} se obţin rotirile corespunzătoare după axa *Oy* şi *Oz*:

$$\varphi_y(x) = -\frac{dw}{dx} = -\frac{4P_1 + 3P_2}{25Ea^4}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right)$$
$$\varphi_z(x) = \frac{dv}{dx} = \frac{3P_1 + 8{,}5P_2}{25Ea^4}\left(Lx - \frac{x^2}{2}\right) \tag{7.23}$$

Se observă din (7.23) că rotirea $\varphi_z(x)$ este pozitivă, iar rotirea $\varphi_y(x)$ este negativă pentru orice valoare $x \in [0, L]$.

Integrând din nou relațiile (7.22) şi introducând condițiile la limită (7.20) se obțin deplasările după axele Oy şi Oz:

$$w(x)=\frac{4P_1+3P_2}{25Ea^4}\left(L\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right)$$
$$v(x)=\frac{3P_1+8{,}5P_2}{25Ea^4}\left(L\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right) \tag{7.24}$$

Se observă din (7.24) că săgețile sunt pozitive pentru orice valoare $x\in[0,L]$.

Expresiile rotirilor şi săgeților secțiunii din capătul barei ($x=L$) sunt:

$$\varphi_{y1}=-\frac{(4P_1+3P_2)L^2}{50Ea^4};\quad \varphi_{z1}=\frac{(3P_1+8{,}5P_2)L^2}{50Ea^4}$$
$$w_1=\frac{(4P_1+3P_2)L^3}{75Ea^4};\quad v_1=\frac{(3P_1+8{,}5P_2)L^3}{75Ea^4}. \tag{7.25}$$

7.2. Metode de calcul a săgeților şi rotirilor la încovoiere

7.2.1. Metoda grafo-analitică MOHR

Se consideră în continuare cazul încovoierii simetrice după axa Oy. Dacă se integrează ecuația diferențială (7.3) pentru un tronson de bară de lungime x (fig.7.2) se obține rotirea secțiunii aflate la distanța x de origine:

$$tg\varphi=\frac{dw}{dx}=-\int_0^x\frac{M_{iy}}{EI_y}ds+tg\varphi_0 \tag{7.26}$$

sau :

$$tg\varphi-tg\varphi_0=-\frac{\Omega_{0x}}{EI_y} \tag{7.26'}$$

unde : φ_0 este rotirea secțiunii corespunzătoare originii tronsonului de bară;

Ω_{0x} aria diagramei momentelor încovoietoare pentru tronsonul de bară de lungime x (fig. 7.6): $\Omega_{0x}=\int_0^x M_{iy}ds$.

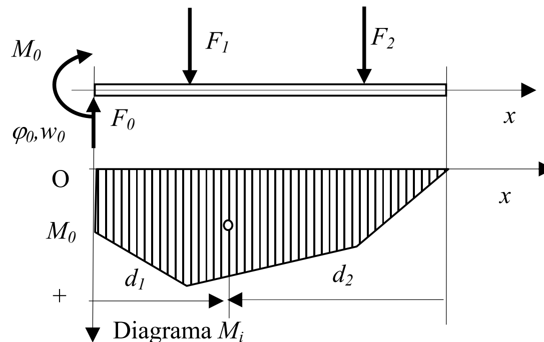


Fig.7.6

Ținând seama de ipoteza deformațiilor mici, se poate aproxima tangenta unghiului de rotire, cu unghiul în radiani. În aceste condiții relația (7.26') devine :

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\Omega_{0x}}{EI_y} \tag{7.27}$$

Relația (7.27) este *ecuația lui MOHR pentru calculul rotirilor* unei secțiuni situată la distanța x față de origine în funcție de doi parametri: rotirea φ_0 și aria Ω_{0x} a diagramei momentelor încovoietoare corespunzătoare.

Dacă se integrează din nou relația (7.27) se obține:

$$EI_y(\, w - x \cdot tg\varphi_0 \,) = -\int_0^x \Omega_{0x} ds + C \tag{7.28}$$

Rezolvând prin părți integrala (7.28) se obține:

$$\int_0^x \Omega_{0x} ds = x\Omega_{0x} - \int_0^x x \cdot d\Omega_{0x} = (\, x - d_1 \,)\Omega_{0x} = S_{x0} \tag{7.29}$$

în care $S_{x0} = \Omega_{0x} d_2$ este momentul static al diagramei de momente încovoietoare a tronsonului de bară, față de axa verticală situată la distanța x (fig.7.6).

Ținând seama de (7.29) relația (7.28) se scrie:

$$EI_y(\, w - x \cdot tg\varphi_0 \,) = -S_{x0} + C \tag{7.30}$$

Constanta de integrare C se obține introducând în relația (7.30) condiția la limită din origine $w(0)=w_0$:

$$EI_y(\, w_0 - 0 \cdot tg\varphi_0 \,) = C \quad \Rightarrow C = EI_y w_0 \tag{7.31}$$

Înlocuind în relația (7.30) se obține funcția deplasărilor:

$$w(\, x \,) = w_0 + x \cdot tg\varphi_0 - \frac{S_{x0}}{EI_y} \tag{7.32}$$

Aplicând ipoteza deformațiilor mici, se aproximează tangenta unghiului de rotire a secțiunii cu unghiul exprimat în radiani. În aceste condiții relația (7.32) devine *ecuația lui Mohr pentru calculul săgeților*:

$$w(x) = w_0 + x \cdot \varphi_0 - \frac{S_{x0}}{EI_y} \tag{7.33}$$

În tabelul 7.1 sunt prezentate relațiile de calcul ale ariei diagramei de momente Ω_{0x} și a momentului static al diagramei de momente S_{x0} față de o axă care trece prin secțiunea situată la distanța x, pentru cele patru tipuri de sarcini din figura 7.7.

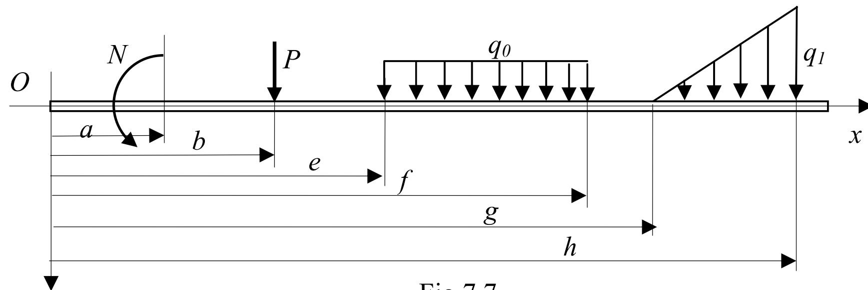


Fig 7.7

Tabelul 7.1

Tipul de sarcină şi diagrama de momente	*Aria diagramei* Ω_{01}	*Momentul static al diagramei* S_{10}
	$\Omega_{01} = c \cdot N$	$S_{10} = \frac{c^2}{2} N$
	$\Omega_{01} = \frac{c^2}{2} \cdot P$	$S_{10} = \frac{c^3}{6} P$
	$\Omega_{01} = -\frac{c^3 - d^3}{6} \cdot q_0$	$S_{10} = -\frac{c^4 - d^4}{24} \cdot q_0$

Tipul de sarcină şi diagrama de momente	Aria diagramei Ω_{01}	Momentul static al diagramei S_{10}
0, q_1, x, q_1, c, d, $-q_1c^2/6$, O, $d_2=c/5$, x, $d'_2=d/5$, $+q_1d^2/6$, $d''_2=d/4$, z, $+q_1d^2/2$	$\Omega_{01}=-\frac{c^3}{24}\cdot q_1+\frac{d^3}{24}q_1+\frac{d^3}{6}q_1$	$S_{10}=-\frac{c^4}{120}\cdot q_1+\frac{d^4}{120}q_1+\frac{d^4}{24}q_1$

Aplicaţia 7.1

Se consideră o bară dreaptă pe două reazeme punctuale rigide, cu o consolă în stânga de lungime $c_1=1,5m$ şi distanţa între reazeme b=2,4m. Bara este încărcată cu următoarele sarcini: o forţă concentrată P=9,6 kN la jumătatea distanţei între reazeme, o sarcină uniform distribuită q_0=6,4kN/m pe toată lungimea consolei şi un cuplu $N=24kNm$ în reazemul din stânga (fig.7.8.a). Bara are secţiunea constantă şi forma din figura 7.8.b. Se cunoaşte: $\sigma_a=150$ *MPa* şi $E=2,1.10^5$ *MPa*. *Se cer:*

1. reacţiunile V_1 şi V_2
2. diagramele de forţe tăietoare T şi momente încovoietoare M;
3. dimensionarea secţiunii barei (valoarea parametrului a);
4. deplasările şi rotirile secţiunilor corespunzătoare capătului din stânga (0) şi mijlocului distanţei între reazeme (3).

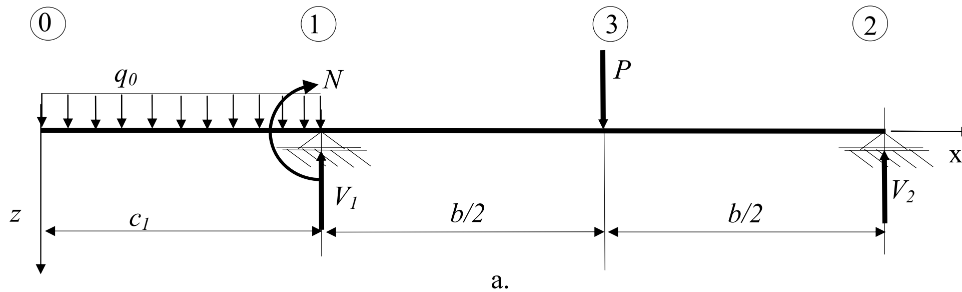


Fig. 7.8

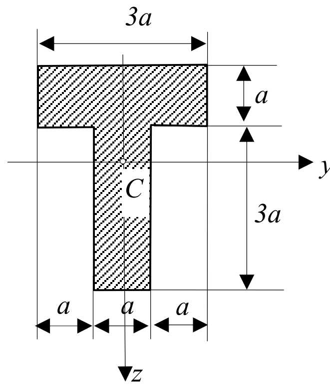


Fig. 7.8 b.

Rezolvare

1. Reacțiunile V_1 şi V_2

Reacțiunile se determină utilizând cele două ecuații de echilibru ale momentelor sarcinilor exterioare şi forțelor de legătură față de axa *Oy* ce trece prin reazemul (2), respectiv prin reazemul (1):

$$\sum M_{2y} = 0: \; V_1 \cdot 2{,}4 - P \cdot 1{,}2 + N - q_0 \cdot 1{,}5 \cdot \left(2{,}4 + \frac{1{,}5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow V_1 = 7{,}4 \; kN$$

$$\sum M_{1y} = 0: \; V_2 \cdot 2{,}4 - P \cdot 1{,}2 - N + q_0 \cdot 1{,}5 \cdot \left(\frac{1{,}5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow V_2 = 11{,}8 \, kN \qquad (7.34)$$

Verificarea se face utilizând ecuația de echilibru a forțelor exterioare şi de legătură pe direcția Oz (verticală):

$$V_1 + V_2 = P + q_0 \cdot 1{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad 7{,}4 + 11{,}8 = 9{,}6 + 6{,}4 \cdot 1{,}5 \qquad (7.35)$$

2. Diagramele de eforturi tăietoare T şi momente încovoietoare M

Diagramele de eforturi secționale *T* şi *M* se trasează utilizând metoda funcției treaptă *Φ(x-a)* şi aplicând principiul suprapunerii efectelor. Se obțin următoarele expresii ale eforturilor tăietoare *T(x)* şi încovoietoare $M_i(x)$:

$$T(x) = -q_0 \cdot \Phi(x) \cdot x + q_0 \cdot \Phi(x - c_1) \cdot (x - c_1) +$$
$$+ V_1 \cdot \Phi(x - c_1) - P \cdot \Phi(x - c_1 - b/2) + V_2 \cdot \Phi(x - c_1 - b).$$

$$M(x) = -\frac{q_0}{2} \cdot \Phi(x) \cdot x^2 + \frac{q_0}{2} \cdot \Phi(x - c_1) \cdot (x - c_1)^2 + N \cdot \Phi(x - c_1) + \qquad (7.36)$$
$$+ \frac{V_1}{2} \cdot \Phi(x - c_1) \cdot (x - c_1) - \frac{P}{2} \cdot \Phi(x - c_1 - b/2)(x - c_1 - b/2) +$$
$$+ \frac{V_2}{2} \cdot \Phi(x - c_1 - b) \cdot (x - c_1 - b).$$

Diagramele de forturi *T(x)* şi $M_i(x)$ sunt prezentate în figura 7.9.

3. Dimensionarea secțiunii barei

Se observă că secțiunea periculoasă este în dreapta reazemului (1) unde momentul are valoarea M_{max}*=16,8kNm* (limita la dreapta). Relația de dimensionare rezultă din condiția de rezistență :

$$\frac{M_{max}}{W_y} \leq \sigma_a \qquad (7.37)$$

în care W_y este modulul de rezistență la încovoiere.

Momentul de inerție şi modulul de rezistență pentru secțiunea din figura 7.8.b a fost calculat la aplicația 5.3 :

$$I_y = 8{,}5a^4 \Rightarrow W_y = \frac{I_y}{z_{max}} = 3.4a^3 \qquad (7.38)$$

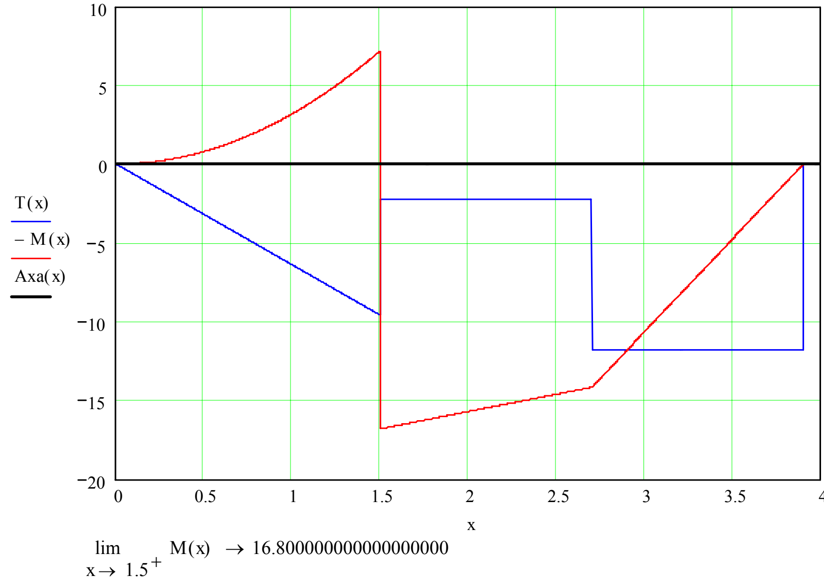


Fig. 7.9. Diagramele de eforturi T şi M

Înlocuind în expresia (7.37) şi folosind sistemul coerent de unităţi de măsură: *N, mm, MPa* se obţine:

$$a \geq \sqrt[3]{\frac{M_{max}}{3.4\sigma_a}} = \sqrt[3]{\frac{16.8 \cdot 10^6}{3.4 \cdot 150}} = 32{,}056\ mm \qquad (7.39)$$
$$a = 33\ mm \quad \Rightarrow \quad I_y = 10\,080\,328\ mm^4$$

4. Calculul săgeţilor şi rotirilor

Calculul săgeţilor şi rotirilor se face cu ajutorul ecuaţiilor lui *MOHR*:

$$w = w_0 + x \cdot \varphi_0 - \frac{S_{x0}}{EI_y}, \quad \varphi = \varphi_0 - \frac{\Omega_{0x}}{EI_y} \qquad (7.40)$$

în care: w_0 este săgeata şi φ_0 rotirea secţiunii corespunzătoare originii tronsonului; Ω_{0x} aria diagramei de momente încovoietoare; S_{x0} momentul static al diagramei de momente încovoietoare faţă de o axă perpendiculară pe *Ox* care trece prin secţiunea curentă situată la distanţa x.

Pentru determinarea parametrilor din origine w_0 şi φ_0 se scriu ecuaţiile lui *MOHR* pentru tronsoanele delimitate de reazemele (0-1) şi (0-2):

$$\begin{cases} w_1 = w_0 + c_1 \cdot \varphi_0 - \dfrac{S_{10}}{EI_y} = 0 \\ w_2 = w_0 + (c_1 + b) \cdot \varphi_0 - \dfrac{S_{20}}{EI_y} = 0 \end{cases} \qquad (7.41)$$

Rezolvând sistemul (7.41) se obțin expresiile parametrilor din origine w_0 şi φ_0:

$$w_0 = \frac{S_{10}}{EI_y}\left(1+\frac{c_1}{b}\right)-\frac{c_1}{b}\frac{S_{20}}{EI_y}$$
$$\varphi_0 = \frac{S_{20}-S_{10}}{b\cdot EI_y} \qquad (7.42)$$

unde S_{10} şi S_{20} se determină conform relațiilor din tabelul 7.1 şi figurii 7.10:

$$S_{10} = -\frac{c_1^4}{24}\cdot q_0 = -1{,}35\ kNm^3;$$
$$S_{20} = -\frac{(c_1+b)^4-b^4}{24}\cdot q_0 + \frac{b^2}{2}N + \frac{b^3}{6}V_1 - \frac{(b/2)^3}{6}P = 30{,}5604\ kNm^3; \qquad (7.43)$$

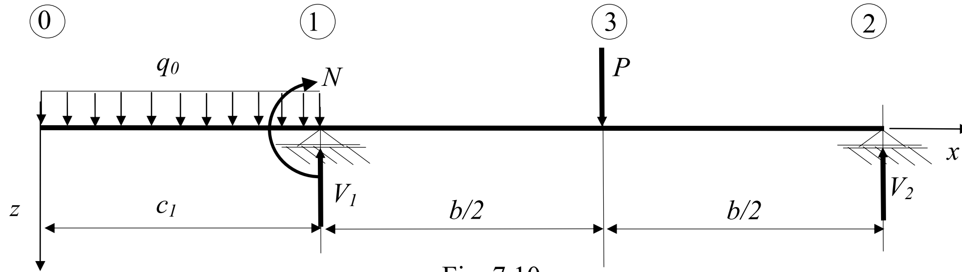


Fig. 7.10

Înlocuind în relația (7.18) se obțin valorile săgeții şi rotirii în secțiunea (0):

$$w_0 = -10{,}059\ \ mm; \qquad \varphi_0 = 6{,}28\cdot 10^{-3}\ \ rad. \qquad (7.44)$$

Pentru a determina deplasarea şi rotirea secțiunii corespunzătoare mijlocului distanței între reazeme (secțiunea 3) se scriu ecuațiile lui *MOHR* pentru tronsonul *0-3:*

$$w_3 = w_0 + \left(c_1+\frac{b}{2}\right)\cdot\varphi_0 - \frac{S_{30}}{EI_y};$$
$$\varphi_3 = \varphi_0 - \frac{\Omega_{03}}{EI_y} \qquad (7.45)$$

în care Ω_{03} şi S_{30} se determină conform relațiilor din tabelul 7.1 şi figura 7.10.

$$\Omega_{03} = -\frac{(c_1+b/2)^3-(b/2)^3}{6}\cdot q_0 + (b/2)N + \frac{(b/2)^2}{2}V_1 \Rightarrow \Omega_{03} = 14{,}976\ kNm^2;$$
$$S_{30} = -\frac{(c_1+b/2)^4-(b/2)^4}{24}\cdot q_0 + \frac{(b/2)^2}{2}N + \frac{(b/2)^3}{6}V_1 \Rightarrow S_{30} = 5{,}7924\ \ kNm^3. \qquad (7.46)$$

Înlocuind valorile în relația (7.46) şi $E = 2{,}1\cdot 10^6\,MPa,\ I_y = 10\,080\,328\ mm^4$ se obțin valorile săgeții (în *mm*) şi rotirii (în *radiani*) ale secțiunii (3):

$$w_3 = 4{,}163\ mm \qquad \varphi_3 = -0{,}794\cdot 10^{-3}\,rad \qquad (7.47)$$

7.2.2. Metoda funcției de încărcare Ψ

Metoda funcției de încărcare este o metodă analitică nouă[1] care utilizează *funcția de încărcare Ψ* având o expresie analitică particulară ce rezultă din integrarea de două ori a ecuației diferențiale (7.3). După prima integrare se obține *rotirea φ(x)* în funcție de derivata *funcției de încărcare Ψ'*:

$$\varphi(x) = \frac{dw}{dx} = \int_0^x -\frac{M_{iy}}{EI_y} ds = \varphi_0 + \frac{\Psi'(x)}{EI_y} \tag{7.48}$$

unde: φ_0 este rotirea secțiunii aflate la capătul din stânga al barei;

$\Psi'(x)$ este derivata *funcției de încărcare :*

$$\Psi'(x) = -\int_0^x M_{iy} ds \tag{7.49}$$

Integrând relația (7.28) se obține *săgeata* $w(x)$:

$$w(x) = w_0 + \varphi_0 x + \frac{\Psi(x)}{EI_y} \tag{7.50}$$

unde: w_0 este deplasarea secțiunii din capătul din stânga al barei;

$\Psi(x)$ este *funcția de încărcare:* $\Psi(x) = \int_0^x \Psi'(s) ds$ (7.51)

Constantele de integrare φ_0 și w_0 sunt parametrii din origine, în general necunoscuți. Pentru determinarea lor sunt suficiente două ecuații de deformații, cum ar fi de exemplu deplasările nule corespunzătoare ale secțiunilor din reazeme, etc.

Expresiile analitice ale funcției de încărcare $\Psi(x)$ și derivatei $\Psi'(x)$ pentru o bară dreaptă având rigiditatea la încovoiere EI_y constantă, se scriu pentru cele patru tipuri de sarcini exterioare din figura 7.11:

- un cuplu concentrat N la distanța a de capătul barei;
- forță concentrată P la distanța b de capătul barei;
- sarcină uniform distribuită q_0 ce acționează pe un tronson delimitat de distanțele e și f de capătul barei;
- sarcină liniar distribuită de valori (0 - q_1) ce acționează pe un tronson de bară delimitat de distanțele g și h de capătul barei.

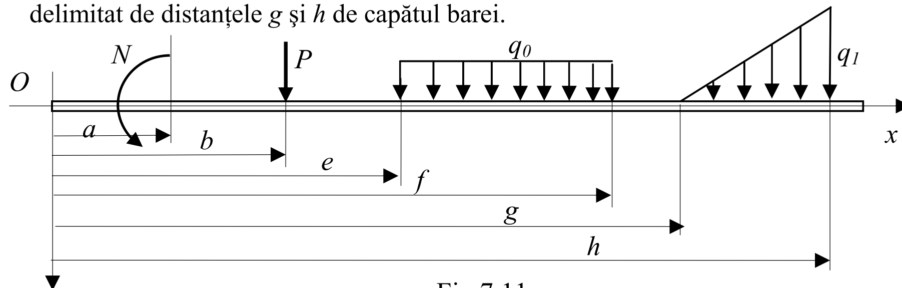


Fig 7.11

[1] Mihail C. ATANASIU, Gabriel G. JIGA - *Metode analitice noi în Rezistența materialelor, 1. Metoda funcției de încărcare,* Ed. U.P.București 1994.

Expresiile efortului încovoietor pentru cele patru tipuri de sarcini sunt:

- pentru cuplul concentrat *N*:

$$-M_i(x)=\frac{N}{2(x-a)}\left(|x-a|+x-a\right)=\begin{cases}0 & pentru\ \ x<a\\ N & pentru\ \ x>a\end{cases} \tag{7.52}$$

- pentru sarcina concentrată *P*:

$$-M_i(x)=\frac{P}{2}\left(|x-b|+x-b\right)=\begin{cases}0 & pentru\ \ x\le b\\ P(x-b) & pentru\ \ x>b\end{cases} \tag{7.53}$$

- pentru sarcina uniform distribuită q_0 care este echivalentă cu două sarcini distribuite ca în figura 7.12.a:

$$-M_i(x)=\frac{q_0(x-c)}{4}\left(|x-c|+x-c\right)-\frac{q_0(x-d)}{4}\left(|x-d|+x-d\right) \tag{7.54}$$

- pentru sarcina liniar distribuită (0 - q_1) care este echivalentă cu două sarcini liniar distribuite ca în figura 7.12.b, se scrie:

$$-M_i(x)=\frac{q_1(x-g)}{12(h-g)}\left(|x-g|+x-g\right)^2-\frac{q_1(x-h)}{12(h-g)}\left(|x-h|+x-h\right)^2-\frac{q_1(x-h)}{4}\left(|x-h|+x-h\right) \tag{7.55}$$

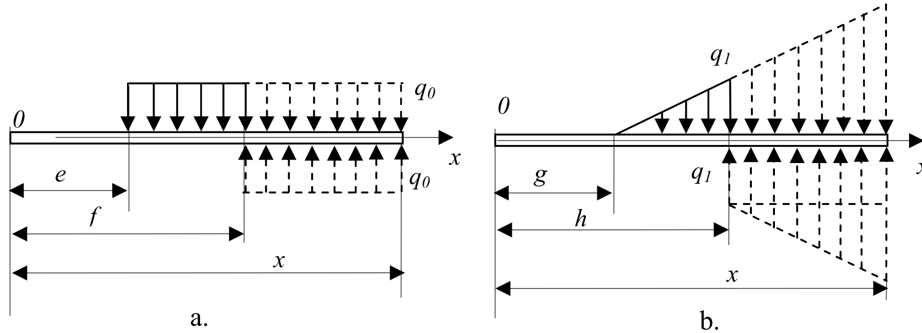


Fig.7.12

Efectuând integrala $-\int_0^x M_{iy}ds$ pentru cele patru tipuri de sarcini se obține următoarea expresie generală pentru derivata funcției de încărcare :

$$\begin{aligned}\Psi'(x)=&\frac{N}{2}\left(|x-a|+x-a\right)+\frac{P(x-b)}{2\cdot 2!}\left(|x-b|+x-b\right)+\\ &+\frac{q_0(x-c)^2}{2\cdot 3!}\left(|x-c|+x-c\right)-\frac{q_0(x-d)^2}{2\cdot 3!}\left(|x-d|+x-d\right)+\\ &+\frac{q_1}{h-g}\left[\frac{(x-g)^3}{2\cdot 4!}\left(|x-g|+x-g\right)-\frac{(x-h)^3}{2\cdot 4!}\left(|x-h|+x-h\right)\right]-\frac{q_1(x-h)^2}{2\cdot 3!}\left(|x-h|+x-h\right)\end{aligned} \tag{7.56}$$

Efectuând integrala *derivatei funcției de încărcare* $\Psi'(x)$ (7.56) se obține expresia generală a *funcției de încărcare* $\Psi(x)$:

$$\Psi(x)=\frac{N(x-a)}{2\cdot 2!}\left(|x-a|+x-a\right)+\frac{P(x-b)^2}{2\cdot 3!}\left(|x-b|+x-b\right)+$$
$$+\frac{q_0(x-c)^3}{2\cdot 4!}\left(|x-c|+x-c\right)-\frac{q_0(x-d)^3}{2\cdot 4!}\left(|x-d|+x-d\right)+ \qquad (7.57)$$
$$+\frac{q_1}{h-g}\left[\frac{(x-g)^4}{2\cdot 5!}\left(|x-g|+x-g\right)-\frac{(x-h)^4}{2\cdot 5!}\left(|x-h|+x-h\right)\right]-\frac{q_1(x-h)^3}{2\cdot 4!}\left(|x-h|+x-h\right)$$

Tabelul 7.2

Tipul de sarcină aplicată	Ψ_k	Ψ'_k
N, k, r_N	$\Psi_k=\frac{N\cdot r_N^2}{2}$	$\Psi'_k=\frac{N\cdot r_N}{1}$
P, k, r_P	$\Psi_k=\frac{P\cdot r_P^3}{6}$	$\Psi'_k=\frac{P\cdot r_P^2}{2}$
q_0, k, r, R	$\Psi_k=\frac{q_0(R^4-r^4)}{24}$	$\Psi'_k=\frac{q_0(R^3-r^3)}{6}$
q_1, k, r, R	$\Psi_k=\frac{q_1}{R-r}\left(\frac{R^5-r^5}{120}\right)-q_1\frac{r^4}{24}$	$\Psi'_k=\frac{q_1}{R-r}\left(\frac{R^4-r^4}{24}\right)-q_1\frac{r^3}{6}$

Aplicația 7.2

Folosind metoda funcției de încărcare Ψ să se determine rotirile şi săgețile secțiunii corespunzătoare capătului din stânga al barei (0) şi mijlocului distanței între reazeme (3) pentru bara având rezemarea şi încărcarea din figura 7.13. Bara este încărcată cu următoarele sarcini: P=9,6 kN la jumătatea distanței între reazeme, q_0=6,4kN/m pe toată lungimea consolei şi un cuplu $N=24kNm$ în reazemul din stânga (fig.7.13). Se cunosc: $E=2{,}1\cdot 10^5\,MPa$, $I_y=10\,080\,328\ mm^4$, $c_1=1{,}5m$; $b=2{,}4m$.

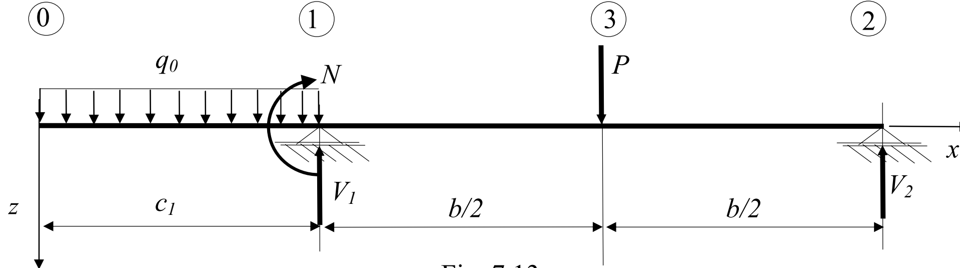


Fig. 7.13

Rezolvare:

Relațiile de calcul ale rotirii şi săgeții folosind funcția de încărcare Ψ sunt:

$$\begin{cases} EI_y\varphi(x) = EI_y \cdot \varphi_0 + \Psi'(x) \\ EI_y w(x) = EI_y \cdot w_0 + EI_y \cdot \varphi_0 \cdot x + \Psi(x) \end{cases} \tag{7.58}$$

Pentru a obține expresiile parametrilor din origine w_0 şi φ_0 se introduc în ecuația săgeților (7.58) condițiile de săgeți nule din reazemele (1) şi (2):

$$\begin{cases} EI_y \cdot w_0 + EI_y \cdot \varphi_0 \cdot c_1 + \Psi(c_1) = 0 \\ EI_y \cdot w_0 + EI_y \cdot \varphi_0 \cdot (c_1 + b) + \Psi(c_1 + b) = 0 \end{cases} \tag{7.59}$$

Rezolvând sistemul (7.59) se obțin expresiile parametrilor din origine:

$$\begin{cases} EI_y \cdot \varphi_0 = \dfrac{\Psi(c_1) - \Psi(c_1 + b)}{b} \\ EI_y \cdot w_0 = \dfrac{c_1}{b} \cdot \Psi(c_1 + b) - \left(1 + \dfrac{c_1}{b}\right) \cdot \Psi(c_1) \end{cases} \tag{7.60}$$

Se calculează valorile funcției de încărcare în reazemele (1) şi (2) :

$$\begin{aligned} &\Psi(c_1) = \frac{c_1^4}{24} \cdot q_0 = 1{,}35\ kNm^3; \\ &\Psi(c_1 + b) = \frac{(c_1 + b)^4 - b^4}{24} \cdot q_0 - \frac{b^2}{2} N - \frac{b^3}{6} V_1 + \frac{(b/2)^3}{6} P = -30{,}5604\ kNm^3; \end{aligned} \tag{7.61}$$

Înlocuind valorile funcției de încărcare în relațiile (7.60) se obține:

$$\begin{cases} EI_y \cdot \varphi_0 = \dfrac{\Psi(c_1) - \Psi(c_1 + b)}{b} = 13{,}296\ kNm^2 \\ EI_y \cdot w_0 = \dfrac{c_1}{b} \cdot \Psi(c_1 + b) - \left(1 + \dfrac{c_1}{b}\right) \cdot \Psi(c_1) = -21{,}294\ kNm^3 \end{cases} \tag{7. 62}$$

Săgeata şi rotirea secțiunii (0) se obțin înlocuind valorile lui E şi I_y:

$$\begin{aligned} &w_0 = -10{,}059\ mm; \\ &\varphi_0 = 6{,}28 \cdot 10^{-3}\ rad. \end{aligned} \tag{7.63}$$

Pentru a determina săgeata şi rotirea secțiunii corespunzătoare mijlocului distanței între reazeme (3) se scriu ecuațiile de săgeți şi rotiri (7.58) :

$$\begin{cases} EI_y\varphi_3 = EI_y \cdot \varphi_0 + \Psi'\left(c_1 + \dfrac{b}{2}\right) \\ EI_y w_3 = EI_y \cdot w_0 + EI_y \cdot \varphi_0 \cdot \left(c_1 + \dfrac{b}{2}\right) + \Psi\left(c_1 + \dfrac{b}{2}\right) \end{cases} \tag{7.64}$$

în care:

$$\begin{aligned} \Psi'\left(c_1 + \frac{b}{2}\right) &= \frac{(c_1 + b/2)^3 - (b/2)^3}{6} \cdot q_0 - \frac{(b/2)}{1} N - \frac{(b/2)^2}{2} V_1 = -14{,}976\, kNm^3; \\ \Psi\left(c_1 + \frac{b}{2}\right) &= \frac{(c_1 + b/2)^4 - (b/2)^4}{24} \cdot q_0 - \frac{(b/2)^2}{2} N - \frac{(b/2)^3}{6} V_1 = -5{,}7924\, kNm^3; \end{aligned} \tag{7.65}$$

Înlocuind valorile date de relațiile (7.65) în relația (7.64) se obține:

$$\begin{cases} EI_y\varphi_3 = 13{,}296 - 14{,}976 = -1{,}68 \;\; kNm^2 \\ EI_y w_3 = -21{,}294 + 13{,}296 \cdot 2{,}7 - 5{,}7924 = 8{,}8128\, kNm^3 \end{cases} \tag{7.66}$$

Săgeata şi rotirea secțiunii (3) se obțin înlocuind valorile lui E şi I_y:

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= -0{,}794 \cdot 10^{-3}\, rad \\ w_3 &= 4{,}163 \;\; mm \end{aligned} \tag{7.67}$$

Se observă că s-au obținut aceleaşi valori pentru rotiri şi săgeți ca cele obținute folosind metoda grafo-analitică a lui *MOHR*.

7.2.3. Metoda funcției treaptă Φ

Metoda funcției treaptă este o metodă analitică ce utilizează funcția treaptă din MATCAD *Φ(x-a)*. Dacă se se integrează ecuația diferențială (7.3) şi se scrie expresia momentului *M(x)* cu ajutorul funcției treaptă *Φ(x-a),* se obține:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{dw}{dx} = \varphi_0 - \int_0^x \frac{M_{iy}}{EI_y} ds \\ w(x) &= w_0 + \varphi_0 x - \int_0^x \int_0^r \left(\frac{M_{iy}}{EI_y} ds \right) dr \end{aligned} \tag{7.68}$$

Pentru fiecare din cele patru tipuri de sarcini care acționează asupra barei se scriu expresiile momentului $M_i(x)$ cu ajutorul funcției treaptă *Φ(x-a),* apoi prin integrare se obțin expresiile rotirii şi săgeții secțiunii situată la distanța x :

- pentru un cuplu de forțe N care acționează la distanța a față de capătul barei (fig. 7.14), efortul încovoietor $M_i(x)$ are expresia:

$$M_i(x) = -N \cdot \Phi(x - a) \tag{7.69}$$

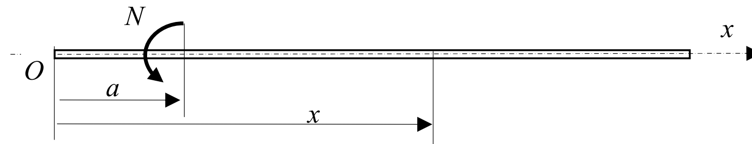


Fig. 7.14

Integrând se obține expresia rotirii și săgeții:

$$\varphi(x)=\varphi_0+\frac{1}{EI}\left[N\cdot\Phi(x-a)\cdot(x-a)\right]$$
$$w(x)=w_0+\varphi_0\cdot x+\frac{1}{EI}\left[\frac{N}{2}\cdot\Phi(x-a)\cdot(x-a)^2\right] \qquad (7.70)$$

- În cazul unei forțe concentrate P care acționează la distanța b față de capătul din stânga al barei (fig.7.15), efortul încovoietor $M_i(x)$ are expresia:

$$M_i(x)=-P\cdot\Phi(x-b)\cdot(x-b) \qquad (7.71)$$

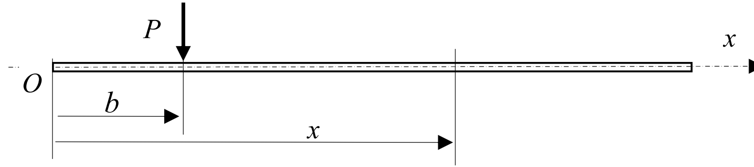


Fig. 7.15

Integrând se obține expresia rotirii și săgeții:

$$\varphi(x)=\varphi_0+\frac{1}{EI}\left[\frac{P}{2}\cdot\Phi(x-b)\cdot(x-b)^2\right]$$
$$w(x)=w_0+\varphi_0\cdot x+\frac{1}{EI}\left[\frac{P}{6}\cdot\Phi(x-b)\cdot(x-b)^3\right] \qquad (7.72)$$

- În cazul unei sarcini uniform distribuite q_0 care acționează pe un tronson de bară delimitat de distanțele: e de început și f de sfârșit față de capătul din stânga al barei, se adaugă și se scade pentru tronsonul de capăt sarcina q_0 (fig.7.16).

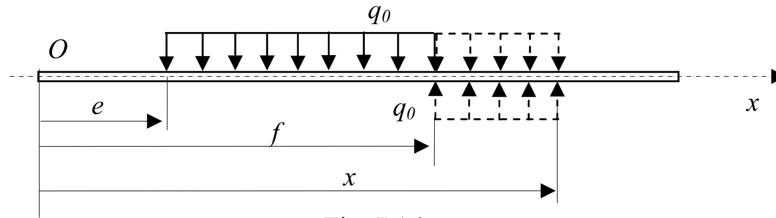


Fig. 7.16

Expresia analitică a efortului $M_i(x)$ este:

$$M_i(x)=-\frac{q_0}{2}\cdot\Phi(x-e)\cdot(x-e)^2+\frac{q_0}{2}\cdot\Phi(x-f)\cdot(x-f)^2 \qquad (7.73)$$

Integrând se obține expresia rotirii și săgeții:

$$\varphi(x)=\varphi_0+\frac{1}{EI}\left[\frac{q_0}{6}\cdot\Phi(x-e)\cdot(x-e)^3-\frac{q_0}{6}\cdot\Phi(x-f)\cdot(x-f)^3\right]$$
$$w(x)=w_0+\varphi_0\cdot x+\frac{1}{EI}\left[\frac{q_0}{24}\cdot\Phi(x-e)\cdot(x-e)^4-\frac{q_0}{24}\cdot\Phi(x-f)\cdot(x-f)^4\right] \qquad (7.74)$$

- în cazul în care bara este încărcată cu o sarcină distribuită liniar care acţionează pe tronsonul delimitat de distanţele g şi h faţă de capătul din stânga al barei: $q(x) = q_1 \frac{x-g}{h-g}, \quad x \in [g,h]$ se adaugă şi se scade sarcina distribuită liniar $q(x) = q_1 + q_1 \frac{x-h}{h-g}$ (fig.7.17).

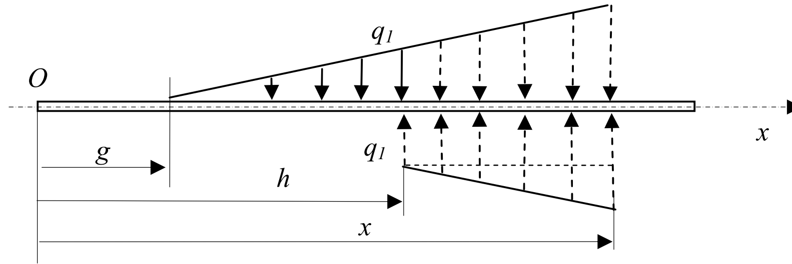


Fig. 7.17

Expresia analitică a efortului $M_i(x)$ se scrie:

$$M_i(x) = -\frac{q_1}{6(h-g)} \cdot \Phi(x-g) \cdot (x-g)^3 + \frac{q_1}{2} \cdot \Phi(x-h) \cdot (x-h)^2 + \frac{q_1}{6(h-g)} \cdot \Phi(x-h) \cdot (x-h)^3; \quad (7.75)$$

Integrând se obţine expresia rotirii şi săgeţii:

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \frac{1}{EI}\left[\frac{q_1}{24}\frac{\Phi(x-g)}{h-g}\cdot(x-g)^4 - \frac{q_1}{24}\frac{\Phi(x-h)}{h-g}\cdot(x-h)^4\right] - \frac{1}{EI}\frac{q_1}{6}\left[\Phi(x-h)\cdot(x-h)^3\right]$$

$$w(x) = w_0 + \varphi_0 \cdot x + \frac{1}{EI}\left[\frac{q_1}{120}\frac{\Phi(x-g)}{h-g}\cdot(x-g)^5 - \frac{q_1}{120}\frac{\Phi(x-h)}{h-g}\cdot(x-h)^5\right] - \frac{1}{EI}\frac{q_1}{24}\left[\Phi(x-h)\cdot(x-h)^4\right] \quad (7.76)$$

Pentru cazul general când asupra barei acţionează mai multe sarcini de acelaşi fel sau diferite tipuri de sarcini din cele prezentate mai sus, se folosesc expresiile analitice corespunzătoare şi se aplică *principiul suprapunerii efectelor* .

Aplicația 7.3

Să se determine folosind metoda funcției treaptă *Φ(x-a)* rotirile şi săgețile secțiunii corespunzătoare capătului din stânga al barei şi mijlocului distanței între reazeme pentru bara de la aplicația 7.1 (fig.7.18).

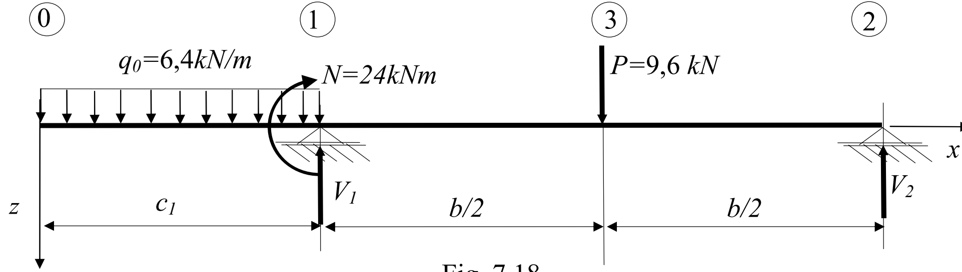


Fig. 7.18

Rezolvare:

Expresiile analitice ale rotirii şi săgeții folosind funcția treaptă *Φ(x-a)* sunt:

$$EI_y\varphi(x) = EI_y\varphi_0 + D(x)$$

$$\begin{aligned} D(x) = {} & \frac{q_0}{6}\cdot\Phi(x)\cdot x^3 - \frac{q_0}{6}\cdot\Phi(x-c_1)\cdot(x-c_1)^3 - N\cdot\Phi(x-c_1)(x-c_1) - \\ & -\frac{V_1}{2}\cdot\Phi(x-c_1)(x-c_1)^2 + \frac{P}{2}\cdot\Phi(x-c_1-b/2)(x-c_1-b/2)^2 \\ & -\frac{V_2}{2}\cdot\Phi(x-c_1-b)(x-c_1-b)^2. \end{aligned} \tag{7.77}$$

$$EI_y w(x) = EI_y w_0 + EI_y\varphi_0\cdot x + W(x)$$

$$\begin{aligned} W(x) = {} & \frac{q_0}{24}\cdot\Phi(x)\cdot x^4 - \frac{q_0}{24}\cdot\Phi(x-c_1)\cdot(x-c_1)^4 - \\ & -\frac{N}{2}\cdot\Phi(x-c_1)(x-c_1)^2 - \frac{V_1}{6}\cdot\Phi(x-c_1)(x-c_1)^3 + \\ & +\frac{P}{6}\cdot\Phi(x-c_1-b/2)(x-c_1-b/2)^3 - \frac{V_2}{6}\cdot\Phi(x-c_1-b)(x-c_1-b)^3. \end{aligned} \tag{7.78}$$

Pentru a obține parametrii din origine w_0 şi φ_0 se introduc condițiile de deplasări nule în reazemele (1) şi (2) :

$$\begin{cases} w(c_1) = 0 \\ w(c_1 + b) = 0 \end{cases} \tag{7.79}$$

Se obține:

$$\begin{cases} EI_y w_0 + EI_y\varphi_0\cdot c_1 = W(c_1) = 1{,}35 \quad kNm^3 \\ EI_y w_0 + EI_y\varphi_0\cdot(c_1 + b) = W(c_1 + b) = -30{,}5604 \ kNm^3 \end{cases} \tag{7.80}$$

Rezolvând sistemul se obține:

$$\begin{cases} EI_y \cdot \varphi_0 = \dfrac{W(c_1) - W(c_1+b)}{b} = 13{,}296\ kNm^2 \\ EI_y \cdot w_0 = \dfrac{c_1}{b} \cdot W(c_1+b) - \left(1 + \dfrac{c_1}{b}\right) \cdot W(c_1) = -21{,}294\ kNm^3 \end{cases} \tag{7.81}$$

Deplasarea şi rotirea secţiunii de capăt se obţin înlocuind valorile lui E şi I_y:

$$w_0 = -10{,}059\ \ mm; \qquad \varphi_0 = 6{,}28 \cdot 10^{-3}\ \ rad. \tag{7.82}$$

Înlocuind relaţiile (7.81) pentru $EI\varphi_0$ şi EIw_0 în (7.77) şi (7.78) se obţin expresiile analitice ale funcţiilor rotire $EI\varphi(x)$ şi deplasare $EIw(x)$:

$$\begin{aligned} EI_y\varphi(x) &= \frac{W(c_1) - W(c_1+b)}{b} + D(x) \\ EI_y w(x) &= \frac{c_1}{b} W(c_1+b) - \left(1 + \frac{c_1}{b}\right) W(c_1) + \frac{W(c_1) - W(c_1+b)}{b} \cdot x + W(x) \end{aligned} \tag{7.83}$$

Rotirea şi deplasarea secţiunii de la mijlocului distanţei între reazeme (secţiunea 3) se determină înlocuind în expresiile (7.83) $x = c_1 + b/2$:

$$\begin{aligned} EI_y\varphi_3 &= \frac{W(c_1) - W(c_1+b)}{b} + D(c_1 + b/2) = -1{,}68\,kNm^2 \\ EI_y w_3 &= \frac{c_1}{b} W(c_1+b) - \left(1 + \frac{c_1}{b}\right) W(c_1) + \frac{W(c_1) - W(c_1+b)}{b} \cdot x + W(c_1 + b/2) = 8{,}813\,kNm^3 \end{aligned} \tag{7.84}$$

Valorile numerice ale deplasării şi rotirii secţiunii (3) se obţin introducând valorile pentru $c_1 = 1{,}5m;\ b = 2{,}4m;\ E = 2{,}1 \cdot 10^6\,MPa,\ \ I_y = 10\,080\,328\ mm^4$ **:**

$$\varphi_3 = -0{,}794 \cdot 10^{-3}\,rad \qquad w_3 = 4{,}163\ mm \tag{7.85}$$

Diagramele de variaţie a funcţiilor rotire $EI\varphi(x)$ şi deplasare $EIw(x)$ sunt prezentate în figura 7.19.

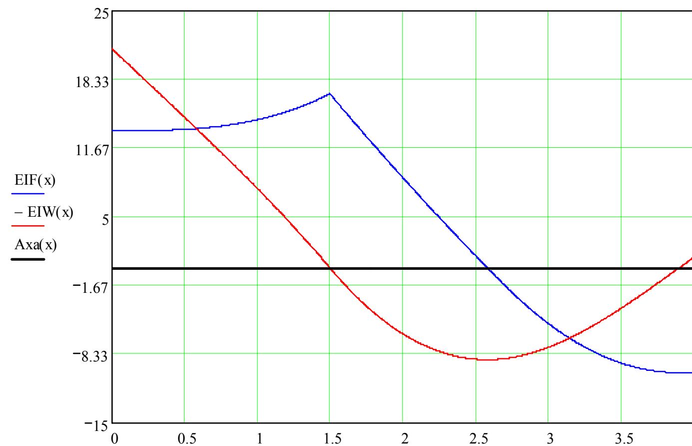


Fig. 7.19. Diagramele de variaţie ale funcţiilor rotire $EIw(x)$ şi săgeată $EI\varphi(x)$

Aplicația 7.4

Folosind metoda funcției treaptă Φ să se traseze variația rotirilor și săgeților pentru grinda în consolă de la aplicația 2.3 (fig.7.20).

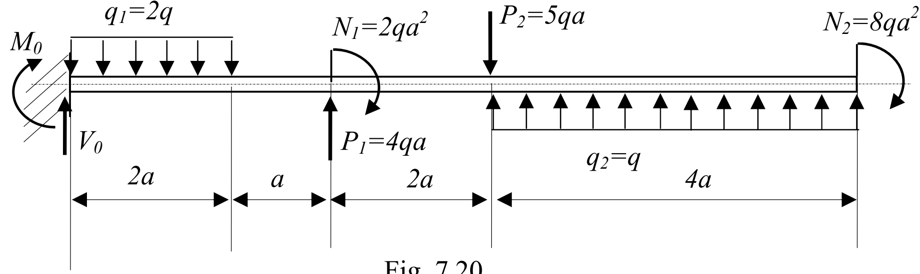


Fig. 7.20

Rezolvare:

Folosind funcția treaptă Φ se scriu expresiile analitice ale rotirii:

$$EI_y\varphi(x) = EI_y\varphi_0 + D(x)$$

$$\begin{aligned} D(x) = &-M_0\cdot\Phi(x)\cdot x - V_0\cdot\Phi(x)\cdot\frac{x^2}{2} + q_1\cdot\Phi(x)\cdot\frac{x^4}{24} - q_1\cdot\Phi(x-2a)\cdot\frac{(x-2a)^4}{24} - \\ &- N_1\cdot\Phi(x-3a)\cdot(x-3a) - P_1\cdot\Phi(x-3a)\cdot\frac{(x-3a)^3}{6} + P_2\cdot\Phi(x-5a)\cdot\frac{(x-5a)^3}{6} + \\ &- q_2\cdot\Phi(x-5a)\cdot\frac{(x-5a)^4}{24} + q_2\cdot\Phi(x-9a)\cdot\frac{(x-9a)^4}{24} - N_2\cdot\Phi(x-9a)\cdot(x-9a); \end{aligned} \tag{7.86}$$

Folosind funcția treaptă Φ se scriu expresiile analitice ale săgeții:

$$EI_yw(x) = EI_yw_0 + EI_y\varphi_0\cdot x + W(x)$$

$$\begin{aligned} W(x) = &-M_0\cdot\Phi(x)\cdot\frac{x^2}{2} - V_0\cdot\Phi(x)\cdot\frac{x^3}{6} + q_1\cdot\Phi(x)\cdot\frac{x^5}{120} - q_1\cdot\Phi(x-2a)\cdot\frac{(x-2a)^5}{120} - \\ &- N_1\cdot\Phi(x-3a)\cdot\frac{(x-3a)^2}{2} - P_1\cdot\Phi(x-3a)\cdot\frac{(x-3a)^4}{24} + P_2\cdot\Phi(x-5a)\cdot\frac{(x-5a)^4}{24} + \\ &- q_2\cdot\Phi(x-5a)\cdot\frac{(x-5a)^5}{120} + q_2\cdot\Phi(x-9a)\cdot\frac{(x-9a)^5}{120} - N_2\cdot\Phi(x-9a)\cdot\frac{(x-9a)^2}{2}; \end{aligned} \tag{7.87}$$

Parametrii din origine w_0 și φ_0 sunt nuli întrucât bara este încastrată.

Deplasarea și rotirea capătului din dreapta al barei se determină înlocuind $x=9a$, în expresiile de mai sus:

$$\begin{aligned} &EI_y\varphi(9a) = EI_y\varphi_0 + D(9a) = 24{,}5\ qa^3 \\ &EI_yw(9a) = EI_y\varphi_0 + EI_y\varphi_0\cdot 9a + W(9a) = 47{,}333\ qa^4 \end{aligned} \tag{7.88}$$

În figura 7.21 s-au reprezentat funcțiile rotire $EIw(x)$ și săgeată $EI\varphi(x)$, unde: $a=1m$, $q=1kN/m$.

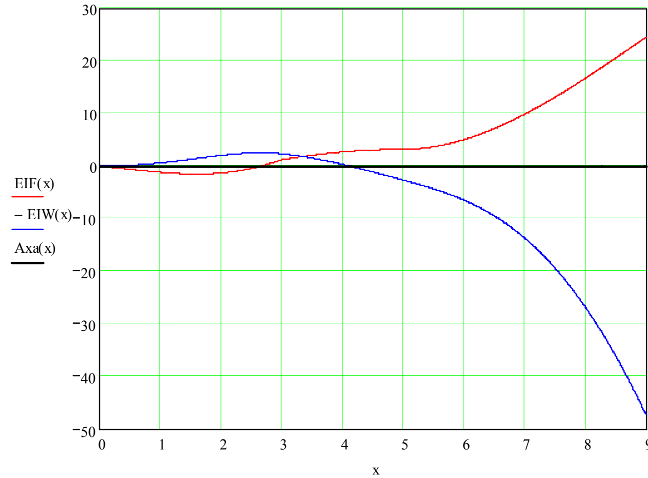


Fig. 7.21. Diagramele de variație ale funcțiilor rotire *EIw(x)* şi săgeată *EIφ(x)*

Aplicația 7.5

Să se traseze variația rotirilor şi săgeților pe lungimea barei folosind metoda funcției treaptă *Φ* pentru grinda pe două reazeme de la aplicația 2.4 (fig.7.22).

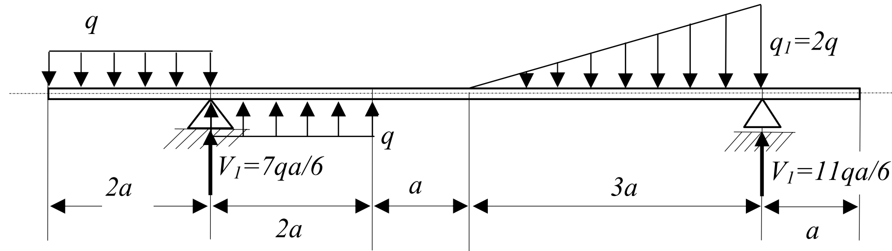


Fig. 7.22

Rezolvare:

Folosind funcția treaptă *Φ* se scriu expresiile analitice ale rotirii:

$$EI_y\varphi(x) = EI_y\varphi_0 + D(x)$$

$$\begin{aligned}D(x) &= -V_1 \cdot \Phi(x-2a)\frac{(x-2a)^2}{2} - V_2 \cdot \Phi(x-8a)\frac{(x-8a)^2}{2} + q \cdot \Phi(x) \cdot \frac{x^3}{6} + \\ &-q \cdot \Phi(x-2a) \cdot \frac{(x-2a)^3}{6} - q \cdot \Phi(x-2a) \cdot \frac{(x-2a)^3}{6} + q \cdot \Phi(x-4a) \cdot \frac{(x-4a)^3}{6} + \\ &+\frac{q_1}{3a} \cdot \Phi(x-5a) \cdot \frac{(x-5a)^4}{24} - \frac{q_1}{3a} \cdot \Phi(x-8a) \cdot \frac{(x-8a)^4}{24} - q_1 \cdot \Phi(x-8a) \cdot \frac{(x-8a)^3}{6}\end{aligned} \qquad (7.89)$$

Folosind funcția treaptă Φ se scriu expresiile analitice ale săgeții:

$$EI_y w(x) = EI_y w_0 + EI_y \varphi_0 \cdot x + W(x)$$

$$\begin{aligned} W(x) = & -V_1 \cdot \Phi(x-2a)\frac{(x-2a)^3}{6} - V_2 \cdot \Phi(x-8a)\frac{(x-8a)^3}{6} + q\cdot\Phi(x)\cdot\frac{x^4}{24} + \\ & -q\cdot\Phi(x-2a)\cdot\frac{(x-2a)^4}{24} - q\cdot\Phi(x-2a)\cdot\frac{(x-2a)^4}{24} + q\cdot\Phi(x-4a)\cdot\frac{(x-4a)^4}{24} + \\ & +\frac{q_1}{3a}\cdot\Phi(x-5a)\cdot\frac{(x-5a)^5}{120} - \frac{q_1}{3a}\cdot\Phi(x-8a)\cdot\frac{(x-8a)^5}{120} - q_1\cdot\Phi(x-8a)\cdot\frac{(x-8a)^4}{24} \end{aligned} \quad (7.90)$$

În figura 7.23 s-au reprezentat funcțiile rotire *EIw(x)* şi săgeată *EIφ(x)* în care s-a considerat *a=1m, q=1kN/m.*

Deplasarea şi rotirea secțiunii corespunzătoare mijlocului barei se determină înlocuind *x=5a,* în expresiile de mai sus:

$$\begin{aligned} EI_y\varphi(5a) &= EI_y\varphi_0 + D(5a) = 1{,}414\, qa^3 \\ EI_y w(5a) &= EI_y\varphi_0 + EI_y\varphi_0\cdot 5a + W(5a) = -2{,}592 qa^4 \end{aligned} \quad (7.91)$$

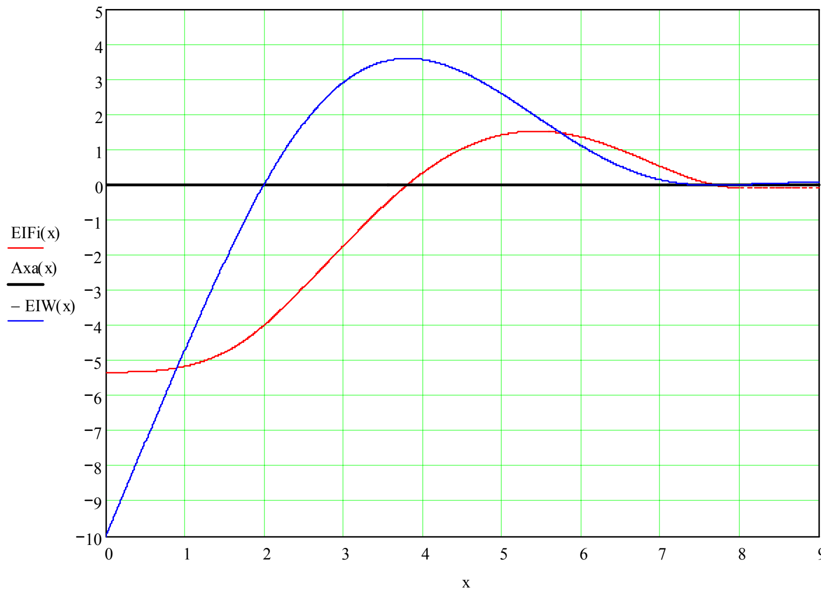


Fig. 7.23. Diagramele de variație ale rotirii *EIw(x)* şi săgeții *EIφ(x)*

7.3. Influența forfecării asupra deformațiilor barei supusă la încovoiere simplă

Pentru studiul deformațiilor la încovoiere pură a barelor drepte s-a utilizat *ipoteza secțiunii plane a lui BERNOULLI*. Folosind *ipoteza secțiunii plane modificate a lui TIMOSHENKO* se poate studia influența forfecării asupra deformațiilor barei la încovoierea simplă. Pe baza acestei ipoteze s-a introdus la paragraful 5.10 lunecarea specifică medie γ_{med}, constantă pe înălțimea secțiunii, ce corespunde unei tensiuni de forfecare medii τ_{med} care acționează pe aria de forfecare $A_f=k_f \cdot A$ (fig.7.24).

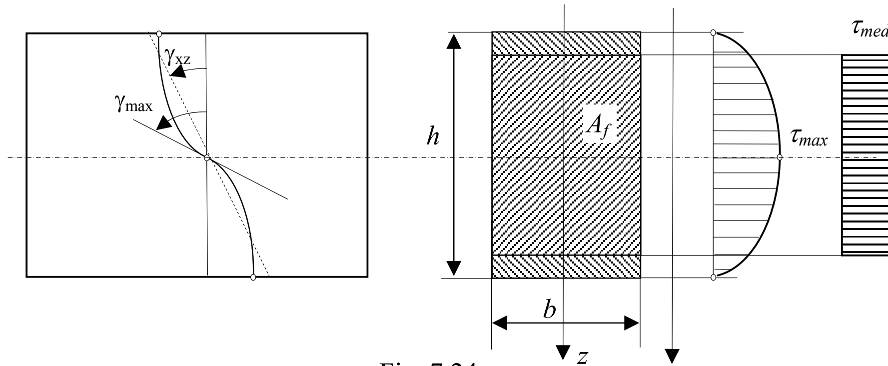


Fig. 7.24

Sub acțiunea eforturilor T_z și M_{iy} se produc rotirile γ_{xz} respectiv $-\varphi_y$. Suma celor două unghiuri reprezintă panta la linia elastică a barei (vezi figura 7.25.a):

$$\frac{dw}{dx} = \gamma_{xz} - \varphi_y \tag{7.92}$$

În cazul în care se neglijează efectul forfecării se obține relația: $\varphi_y = -\frac{dw}{dx}$.

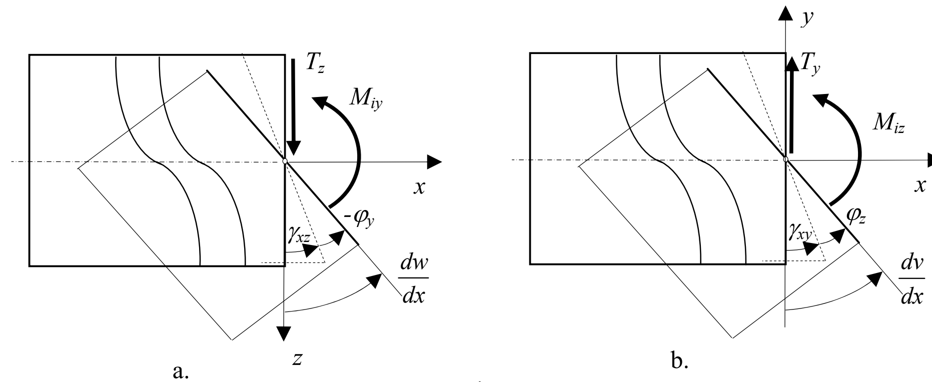


Fig. 7.25

În mod analog, sub acțiunea eforturilor T_y şi M_{iz} se produc rotirile γ_{xy} respectiv φ_z. Suma celor două unghiuri reprezintă panta la linia elastică a barei, aşa cum rezultă din figura 7.25.b:

$$\frac{dv}{dx} = \gamma_{xy} + \varphi_z \tag{7.93}$$

În cazul în care se neglijează efectul forfecării se obține relația: $\varphi_z = \frac{dv}{dx}$.

Pentru a găsi ecuațiile diferențiale ale săgeții şi rotirii în primul caz se exprimă efortul tăietor T_z şi încovoietor M_{iy} în funcție de rotirile γ_{xz} şi respectiv φ_y:

$$\begin{aligned} &\frac{M_{iy}}{EI_y} = \omega_y = \frac{d\varphi_y}{dx} \qquad \Rightarrow M_{iy} = EI_y \frac{d\varphi_y}{dx}; \\ &T_z = GA_f \cdot \gamma_{xz} \end{aligned} \tag{7.94}$$

Folosind relațiile diferențiale dintre eforturi şi sarcinile exterioare:

$$\frac{dM_{iy}}{dx} = T_z; \qquad \frac{dT_z}{dx} = -p_z \tag{7.95}$$

şi eliminând lunecarea specifică dată de relația (7.92) : $\gamma_{xz} = \frac{dw}{dx} + \varphi_y$ se obțin ecuațiile diferențiale ale ale săgeții şi rotirii:

$$\begin{aligned} &EI_y \frac{d^2\varphi_y}{dx^2} - GA_f\left(\frac{dw}{dx} + \varphi_y\right) = 0; \\ &GA_f\left(\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d\varphi_y}{dx}\right) + p_z = 0 \end{aligned} \tag{7.96}$$

În mod asemănător se deduc şi ecuațiile diferențiale ale săgeții şi rotirii în al doilea caz când avem efortul tăietor T_y şi încovoietor M_{iz}

$$\begin{aligned} &EI_z \frac{d^2\varphi_z}{dx^2} + GA_f\left(\frac{dv}{dx} - \varphi_z\right) = 0; \\ &GA_f\left(\frac{d^2v}{dx^2} - \frac{d\varphi_z}{dx}\right) + p_y = 0 \end{aligned} \tag{7.97}$$

În cazul în care se neglijează efectul forfecării se obține relațiile cunoscute:

$$\begin{aligned} &\frac{dw}{dx} = -\varphi_y \quad \Rightarrow \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{d\varphi_y}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M_{iy}}{EI_y}; \\ &\frac{dv}{dx} = \varphi_z \quad \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d\varphi_z}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M_{iz}}{EI_z}. \end{aligned} \tag{7.98}$$

Se observă că cele două perechi de funcții *w,* φ_y şi respectiv *v*, φ_y sunt cinematic independente.

7.4. Probleme propuse

7.4.1. Se dă grinda cu încărcarea şi rezemarea din figura 7.26.a, unde $a=1m$ şi $q=20kN/m$. Secţiunea barei are forma din figura 7.26.b, unde $t=12\ mm$. *Se cere* să se determine săgeata şi rotirea secţiunii (3) situate la mijlocul distanţei între reazeme. Modulul de elasticitate este $E=2,1\cdot10^5\ MPa$ *(Concursul de Rezistenţa Materialelor, Ploieşti 1988).*

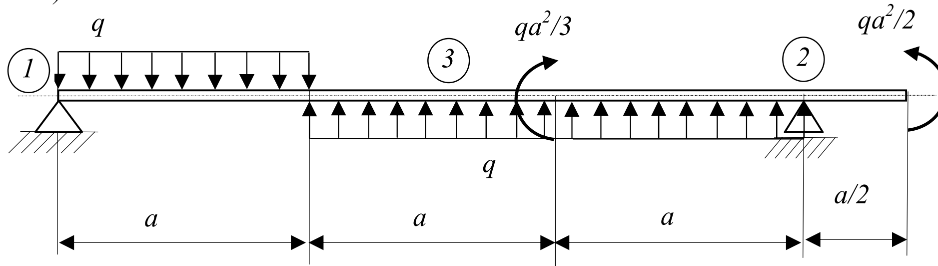


Fig. 7.26.a

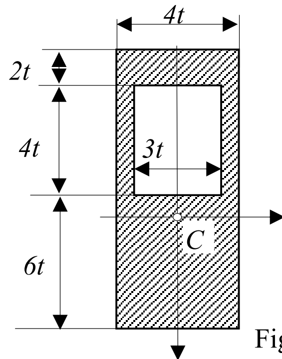


Fig. 7.26.b

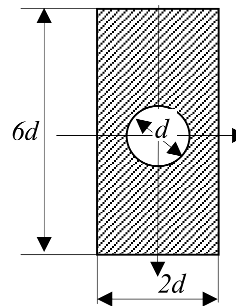


Fig.7.27.b

7.4.2. Se dă grinda din oţel, cu secţiunea constantă ca în figura 7.27.b, rezemată în (1), (2) şi (4), articulată în (3) şi încărcată ca în figura 7.27.a, unde $a=0,5m$, $p=14,64\ kN/m$ şi $d=20mm$. *Se cere* să se determine săgeata şi rotirile secţiunii corespunzătoare articulaţiei (3). Modulul de elasticitate este $E=2,1\cdot10^5\ MPa$ *(Concurs de Rezistenţa Materialelor, Petroşani 1989).*

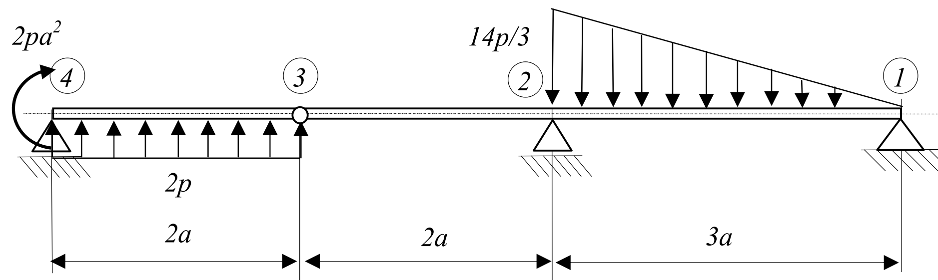


Fig.7.27.a

7.4.3. Se dă grinda metalică, cu secțiunea constantă, rezemată în (1), (2) și (4), articulată în (3) și încărcată ca în figura 7.28.a, unde $a=1m$ și $q=20\ kN/m$. Bara are secțiunea din figura 7.28.b unde $t=60\ mm$. Modulul de elasticitate este $E=2,1\cdot10^5\ MPa$. Se cere să se determine săgeata și rotirile secțiunii corespunzătoare articulației (3). *(Concursul de Rezistența Materialelor, Cluj-Napoca 1988).*

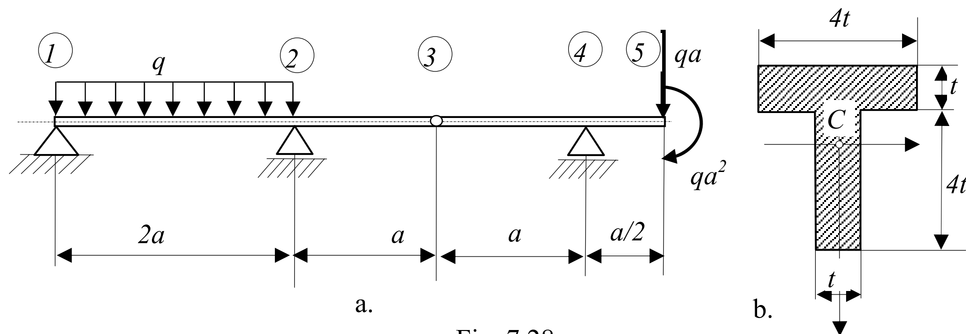


Fig. 7.28

7.4.4. Se dă grinda metalică articulată în (3), rezemată în (1), (2) și (4) și încărcată ca în figura 7.29.a, unde $a=1m$; $c=0,5m$; $q_1=10kN/m$, $q_2=20kN/m$ și $M_0=20kNm$. Bara are secțiunea din figura 7.29.b, unde $t=14\ mm$. Modulul de elasticitate este $E=2,1\cdot10^5$ MPa. *Se cere* să se determine săgeata și rotirile corespunzătoare articulației (3) *(Concursul de Rezistența Materialelor, Cluj-Napoca, 1990)*

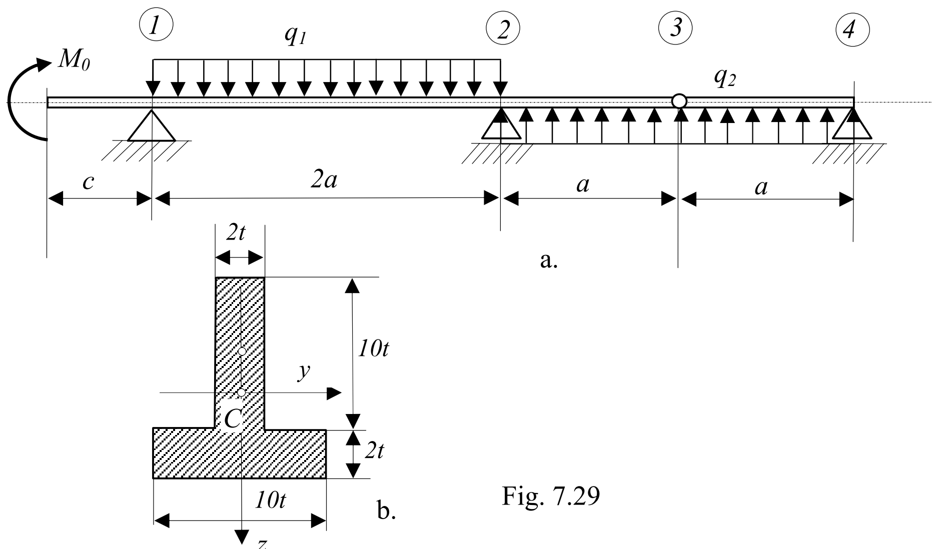


Fig. 7.29

7.4.5. Se dă grinda metalică încastrată în (0), având încărcarea din figura 7.30.a , unde $a=1m$, $q=10kN/m$. Bara are secțiunea din figura 7.30.b, unde $t=10$ mm. Modulul de elasticitate este $E=2,1\cdot10^5$ MPa. *Se cere* să se determine săgețile şi rotirile secțiunii din capătul liber al barei .

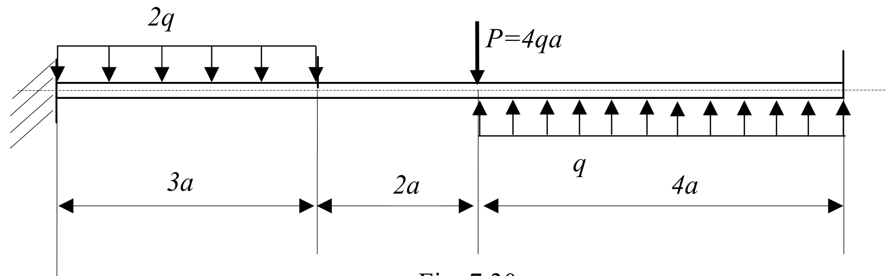


Fig. 7.30.a

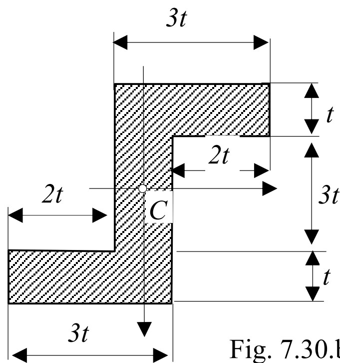


Fig. 7.30.b

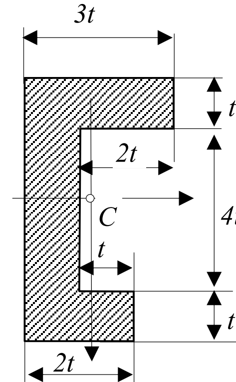


Fig. 7.31.b

7.4.6. Se dă grinda din oțel, cu secțiunea constantă din figura 7.31.b cu $t=10mm$, rezemată la capete şi încărcată ca în figura 7.31.a, unde $a=0,5m$ şi $p=10kN/m$. Modulul de elasticitate este $E=2,1\cdot10^5$ MPa . *Se cere* să se determine săgețile şi rotirile secțiunii (3) de la mijlocul barei.

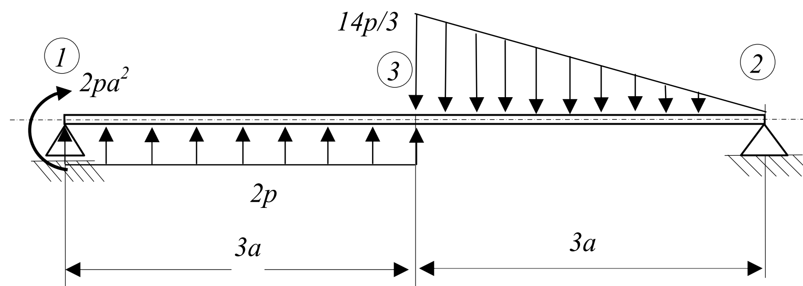


Fig.7.31.a

7.4.7. Se dă grinda metalică, cu secțiunea constantă, rezemată în *A* şi *B*, încărcată cu o forță uniform distribuită *q* în plan vertical şi o forță concentrată *P=2qa* în planul orizontal trecând prin centrul de încovoiere-torsiune *C*, ca în figura 7.32.a, unde *a=1m* şi *q=60 kN/m.* Bara are secțiunea din figura 7.32.b unde *t=10 mm*. Modulul de elasticitate este $E=2,1\cdot10^5$ *MPa. Se cer:*

1. să se traseze diagramele de eforturi;
2. să se verifice bara pentru $\sigma_{admisibil}=210$ *MPa;* în secțiunile ele mai solicitate se va trasa axa neutră şi diagrama tensiunilor normale σ cu valori;
3. să se calculeze deplasarea totală în punctul *D*.

(Concursul Profesional de Rezistența Materialelor C.C. TEODORESCU, Târgu-Mureş, mai 2005).

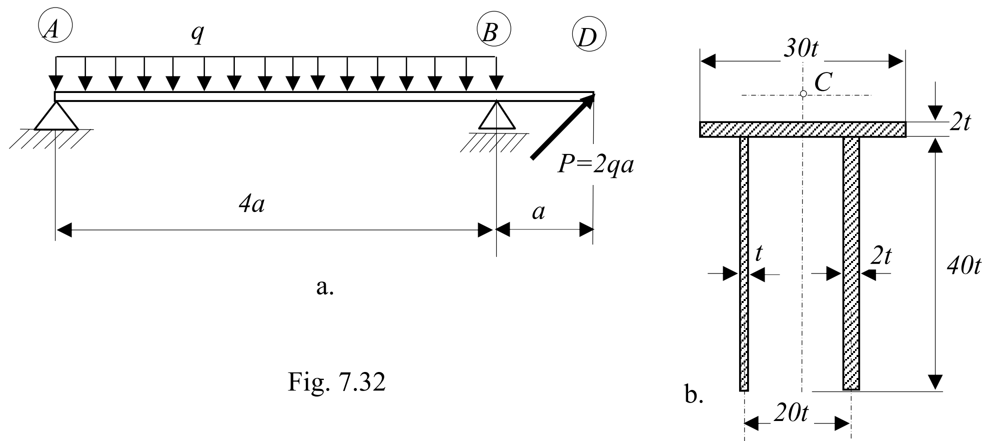


Fig. 7.32

7.4.8. Se dă bara *ABCD* articulată în A şi legată în *C* cu un tirant *CE* vertical, având secțiunea din figura 7.33.b şi încărcarea ca în figura 7.33.a. Grinda *ABCD* şi tirantul *CE* sunt din oțel. Se dau: $A_{tirant}=30cm^2$, *a=1m* şi $E=2,1\cdot10^5$ *MPa . Se cer:*

1. să se determine valoarea q_{cap} din condiția ca deplasarea verticală în secțiunea d a întregului ansamblu, să fie: $\delta=1$ *cm.*
2. să se calculeze σ_{max} din grindă şi din tirant;
3. să se reprezinte diagramele de tensiuni σ şi τ în secțiunea C^{dr}, precizând valorile caracteristice.

(Concursul Profesional de Rezistența Materialelor C.C. TEODORESCU, Timişoara, mai 2004).

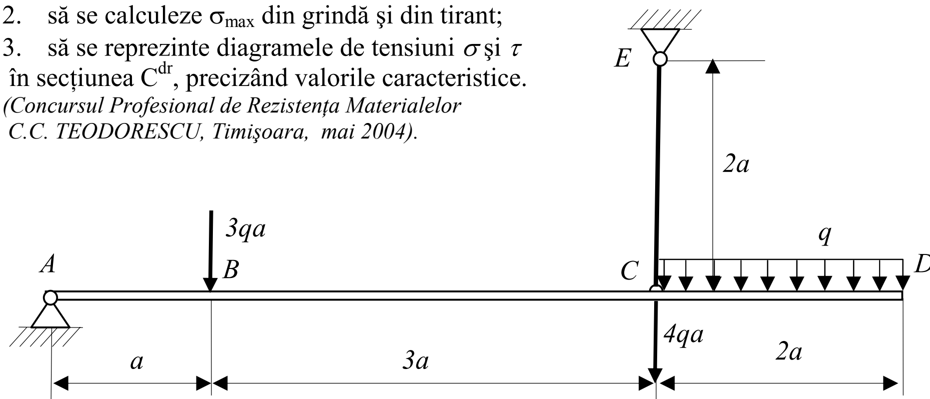


Fig. 7.33

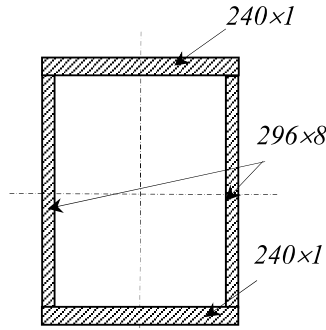


Fig. 7.33.b

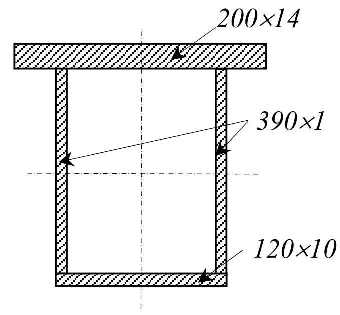


Fig. 7.34.b

7.4.9. Se dă bara rezemată în A şi *B,* având secţiunea transversală constantă din figura 7.34.b şi încărcarea din figura 7.34.a. *Se cer:*

1. considerând $\alpha=3;\ q=35kN/m;\ a=1,5m,$ să se verifice condiţia de rezistenţă: $\sigma_{max} \leq 220MPa$;
2. să se traseze diagramele de tensiuni σ şi τ în secţiunea A^{dr};
3. ce valoare trebuie să aibă parametrul α astfel încât rotirea secţiunii *B* să fie nulă?
4. Pentru secţiunea de mai sus să se calculeze raportul $\eta = \dfrac{M_{tcap1}}{M_{tcap2}}$ în care:

M_{tcap1} reprezintă momentul de torsiune liberă al secţiunii iar M_{tcap2} reprezintă momentul de torsiune liberă al secţiunii în cazul în care una dintre suduri a fisurat. *(Concursul Profesional de Rezistenţa Materialelor C.C. TEODORESCU, aprilie, 2001).*

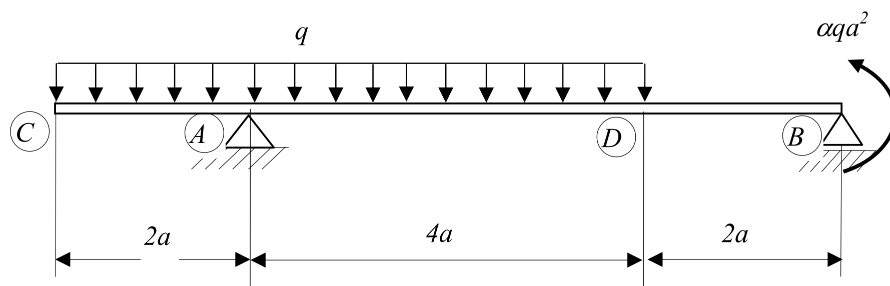
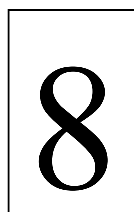


Fig. 7.34.a



METODE ENERGETICE PENTRU CALCULUL DEPLASĂRILOR

8.1. Introducere

Forțele şi cuplurile exterioare care produc deformații elastice asupra unei bare drepte efectuează un lucru mecanic care se acumulează sub formă de *energie potențială de deformație elastică.*

Metodele energetice se bazează pe principiul lucrului mecanic virtual şi a minimului energiei potențiale totale a unui corp deformabil. Acestea sunt :

1. *Metoda RAYLEIGH-RITZ*
2. *Metoda MOHR- MAXWELL*
3. *Metoda CASTIGLIANO*

Expresiile *energiei potențiale de deformație elastică* în cazul unor solicitări simple ale barei drepte sunt:

a. pentru o solicitare de *întindere-compresiune,* în funcție de efortul *N:*

$$U = \int_L \frac{N^2}{2EA} dx \qquad (8.1)$$

iar în funcție de tensiuni, deformații specifice şi deplasări acestea sunt:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2}\int_V E\,\varepsilon_x^2 dV; \quad U = \frac{1}{2}\int_L EA\left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \qquad (8.2)$$

b. pentru o solicitare de *încovoiere pură după Oy* în funcție de efortul M_{iy}:

$$U = \int_L \frac{M_{iy}^2 dx}{2EI} \qquad (8.3)$$

iar în funcție de rotiri şi deplasări expresiile energiei potențiale sunt:

$$U = \frac{1}{2}\int_L EI_y\left(\frac{d\varphi_y}{dx}\right)^2 dx; \quad U = \frac{1}{2}\int_L EI_y\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 dx \qquad (8.4)$$

c. pentru o solicitare de *încovoiere simplă* la care se ține seama şi de efectul *forfecării,* expresia energiei în funcție de eforturile M_{iy} *şi* T_z este :

$$U = \int_L \frac{M_{iy}^2 dx}{2EI} + \int_L \frac{T_z^2}{2GA_f} dx \qquad (8.5)$$

iar în funcție de rotiri şi deplasări expresia energiei potențiale devine:

$$U = \frac{1}{2}\int_L \frac{1}{2} EI_y\left(\frac{d\varphi_y}{dx}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\int_L GA_f\left(\frac{dw}{dx} + \varphi_y\right)^2 dx \qquad (8.6)$$

d. pentru solicitarea *de torsiune* în funcție de efortul M_{tx}:

$$U = \int_L \frac{M_{tx}^2}{2GI_p} dx \qquad (8.7)$$

iar în funcție de tensiuni, deformații specifice şi rotiri, expresiile energiei potențiale sunt:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \tau\gamma\, dV = \frac{1}{2}\int_V G\gamma^2 dV = \frac{1}{2}\int_L GI_p\left(\frac{d\varphi_x}{dx}\right)^2 dx \qquad (8.8)$$

8.2. Principiul lucrului mecanic virtual în cazul corpurilor deformabile

În conformitate cu principiul lucrului mecanic virtual al forțelor exterioare şi interioare în cazul corpurilor deformabile, *condiția necesară şi suficientă ca un corp deformabil să rămână în echilibru static sub acțiunea sarcinilor exterioare şi a forțelor interioare, este ca lucrul mecanic virtual al forțelor exterioare să fie egal cu lucrul mecanic virtual al forțelor interioare pentru orice deplasări virtuale compatibile cu legăturile corpului:*

$$\delta L_{ext} = \delta L_{int} \tag{8.8}$$

în care: $\delta L_{ext} = \sum F_i \delta u_i$ este lucrul mecanic virtual al forțelor exterioare,

δu_i reprezintă deplasările virtuale compatibile cu legăturile corpului,

δL_{int} este lucrul mecanic virtual al forțelor interioare.

Acest principiu pare să fie în contradicție cu principiul lucrului mecanic virtual din cazul corpurilor *nedeformabile* (*BERNOULLI*).

Dacă se consideră corpul deformabil format dintr-un sistem de puncte materiale legate între ele prin elemente elastice, conform *principiului lucrului mecanic virtual pentru corpuri nedeformabile condiția necesară şi suficientă ca un solid nedeformabil să rămână în echilibru static sub acțiunea sarcinilor exterioare şi a forțelor interioare este ca lucrul mecanic virtual al forțelor exterioare şi interioare ce acționează asupra sistemului de puncte materiale să fie nul*:

$$\delta L = \delta L_{ext} + \delta L'_{int} = 0 \tag{8.9}$$

În acest caz $\delta L'_{int}$ este lucrul mecanic virtual al forțelor interioare care acționează asupra sistemului nedeformabil de punctelor materiale şi care sunt egale şi opuse forțelor care acționează asupra elementelor elastice din primul caz, conform principiului acțiunii şi reacțiunii. În consecință este valabilă relația :

$$\delta L_{int} = -\delta L'_{int} \tag{8.10}$$

Variația virtuală a energiei potențiale de deformație elastică δU este egală cu lucrul mecanic virtual al forțelor interioare cu semn schimbat (KIRKHOFF) :

$$\delta U = -\delta L'_{int} \quad \Rightarrow \quad \delta U = \delta L_{ext} \tag{8.11}$$

8.3. Principiul minimului energiei potențiale totale

Se defineşte energia potențială totală a unui corp deformabil ca fiind suma dintre energia potențială de deformație elastică U şi potențialul forțelor exterioare U_p :

$$\Pi = U + U_p \tag{8.12}$$

Ca şi energia potențială de deformație elastică, potențialul forțelor exterioare U_p reprezintă lucrul mecanic al forțelor exterioare luat cu semn schimbat, întrucât forțele exterioare care acționează asupra corpului deformabil îşi pierd din capacitatea lor dea efectua lucru mecanic atunci când punctul lor de aplicație se deplasează:

$$U_p = -L_{ext} \tag{8.13}$$

Deci energia potențială totală a unui corp elastic este diferența dintre energia potențială de deformație elastică U şi lucrul mecanic al forțelor exterioare L_{ext} :

$$\Pi = U - L_{ext} \tag{8.14}$$

Conform relației (8.11) variația virtuală a energiei potențiale totale este nulă:

$$\delta\Pi = \delta U - \delta L_{ext} = 0 \tag{8.15}$$

Relația (8.15) reprezintă expresia matematică a *principiului minimului energiei potențiale totale* : *variația energiei potențiale totale a unui corp deformabil este nulă la atingerea echilibrului static* sau *energia potențială totală a unui corp deformabil este minimă în cazul echilibrului static sub acțiunea forțelor exterioare și a reacțiunilor*.

Reciproca este de asemenea adevărată: *dacă energia potențială totală a unui corp deformabil este minimă sub acțiunea forțelor exterioare și a reacțiunilor, atunci s-a atins starea de echilibru static.*

O altă formulare echivalentă a principiului minimului energiei potențiale totale pentru o configurație de echilibru stabil este următoarea: *deplasările virtuale care satisfac condițiile de echilibru sunt acele deplasări cinematic admisibile care minimizează energia potențială totală* .

8.4. Metoda RAYLEIGH-RITZ

Metoda *RAYLEIGH-RITZ* aproximează funcția liniei elastice a unei bare cu ajutorul unei dezvoltări în serie finită cu ajutorul unui set de funcții de aproximare independente $\varphi_i(x)$ care satisfac condițiile la limită geometrice şi cinematice impuse soluției exacte *w(x) şi w'(x):*

$$w(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x) \tag{8.16}$$

în care: a_i sunt coeficienții RITZ sau *coordonatele generalizate*, care se determină din condiția de minimizare a energiei potențiale totale $\delta\Pi=0$.

Întrucât a_i sunt coordonate generalizate independente, variabilele energiei potențiale totale Π, condiția de minimum a energiei potențiale totale (8.15) $\delta\Pi=0$ se mai scrie :

$$\delta\Pi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Pi}{\partial a_i}\delta a_i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0 \tag{8.17}$$

Astfel pentru o bară supusă la încovoiere după axa *Oy* sub acțiunea unor sarcini exterioare *q*, P_i şi N_j expresia energiei potențiale totale Π , în cazul în care se neglijează efectul forfecării, ținând seama de relația (8.4) se scrie astfel:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_L EI_y \left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 dx - \int_\ell q(x)\cdot w(x)\cdot dx - P_i w(x_i) - N_j \varphi_y(x_j) \tag{8.18}$$

în care: $U = \frac{1}{2}\int_L EI_y \left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 dx$ este energia potențială de deformație elastică,

$L_{ext} = \int_\ell q(x)\cdot w(x)\cdot dx + P_i \cdot w(x_i) + N_j \cdot \varphi_y(x_j)$ este lucrul mecanic al sarcinilor exterioare care acționează asupra barei.

8.5. Metoda MOHR-MAXWELL

8.5.1. Lucrul mecanic al forțelor exterioare pentru o bară dreaptă

a. Solicitarea de întindere sau compresiune

Se consideră o bară dreaptă fixată la un capăt şi acționată la celălalt cu o forță axială de întindere F care creşte progresiv până la valoarea maximă P (fig.8.1). Lucrul mecanic al forței F pe deplasările proprii se scrie:

$$L = \int_0^{\Delta\ell} F du = \int_0^{\Delta\ell} \frac{P}{\Delta\ell} \cdot u\ du = \frac{P}{\Delta\ell}\int_0^{\Delta\ell} u du = \frac{P\Delta\ell}{2} \tag{8.19}$$

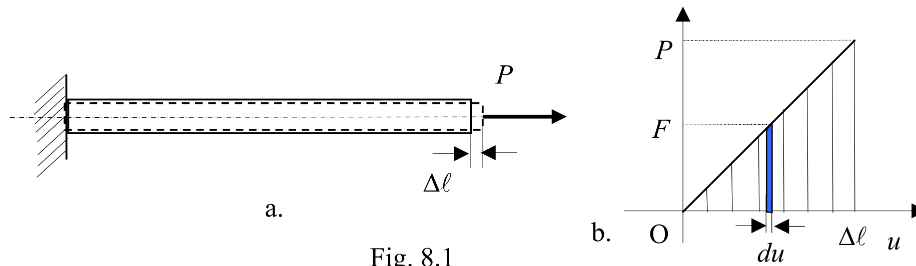


Fig. 8.1

b. Solicitarea de încovoiere pură

Se consideră o bară dreaptă situată pe două rezeme punctuale rigide acționată la capete de două momente încovoietoare M_i care cresc progresiv de la zero la valoarea maximă M_{i0}. Lucrul mecanic al momentelor încovoietoare M_i pe deplasarea unghiulară proprie $\Delta\varphi$ se scrie:

$$L = \frac{M_{i0}\Delta\varphi}{2} \tag{8.20}$$

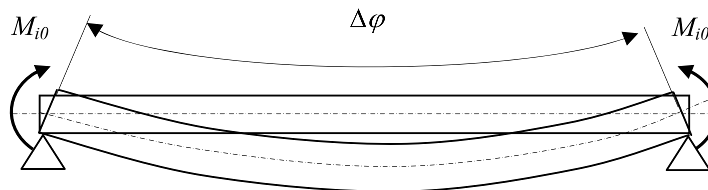


Fig. 8.2

c. Solicitarea de torsiune

Dacă la capătul unei bare drepte având secțiunea circulară sau inelară fixată la un capăt, acționează un moment de torsiune M_t care creşte progresiv de la zero la valoarea maximă M_{t0}, lucrul mecanic al acestui moment pe deplasarea unghiulară proprie $\Delta\psi$ se scrie :

$$L = 0{,}5 \cdot M_{t0}\Delta\psi \tag{8.21}$$

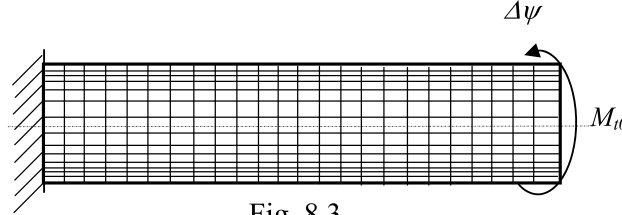


Fig. 8.3

Dacă asupra barei acționează o sarcină exterioară (sau un sistem de sarcini) şi se aplică o altă sarcină, independentă de prima, atunci prima sarcină produce un lucru mecanic datorită deformațiilor barei produse de ce de-a doua sarcină. Acesta se numeşte *lucru mecanic reciproc*.

Se admite că deformațiile produse de cea de-a doua sarcină au valorile: $\Delta\ell$ pentru solicitarea de întindere-compresiune, $\Delta\varphi$ solicitarea de pentru încovoiere şi $\Delta\psi$ solicitarea de pentru răsucire. Lucrul mecanic reciproc va avea expresiile:

- $L_{12} = P \cdot \Delta\ell$ la întindere (8.22)
- $L_{12} = M_0 \Delta\varphi$ la încovoiere (8.23)
- $L_{12} = M_{t0} \Delta\psi$ la răsucire (8.24)

8.5.2. Teorema lucrului mecanic reciproc (*BETTI*)

Se consideră o bară dreaptă pe două rezeme punctuale rigide (fig.8.4) asupra căreia se aplică două stări de încărcare formate din câte o forță transversală :

1. forța F_1 aplicată în secțiunea A

2. forța F_2 aplicată în secțiunea B.

Lucrul mecanic total produs de cele două stări de încărcare este independent de ordinea aplicării celor două forțe. Se consideră cele două succesiuni de forțe:

1. forța F_1 aplicată în secțiunea A urmată de forța F_2 aplicată în secțiunea B. (fig. 8.4.a). Lucrul mecanic total este: $L_{1-2} = L_{11} + L_{12} + L_{22}$ (8.25)

în care: L_{11} - lucrul mecanic produs de forța F_1 pe deplasările proprii:

$$L_{11} = 0{,}5 \cdot F_1 w_{A1}\,; \tag{8.26}$$

L_{12} - lucrul mecanic reciproc produs de forța F_1 pe deplasările produse de forța F_2 : $L_{12} = F_1 w_{A2}\,;$ (8.27)

L_{22} - lucrul mecanic produs de forța F_1 pe deplasările proprii:

$$L_{22} = 0{,}5 \cdot F_2 w_{B2}\,; \tag{8.28}$$

2. forța F_2 aplicată în secțiunea B urmată de forța F_1 aplicată în secțiunea A. (fig. 8.4.b). Lucrul mecanic total în acest caz este:

$$L_{1-2} = L_{11} + L_{12} + L_{22} \tag{8.29}$$

în care: L_{22} , L_{11} au aceeaşi semnificație ;

L_{21} - lucrul mecanic reciproc produs de forța F_2 pe deplasările produse de forța F_1 : $L_{21} = F_2 w_{B1}\,;$ (8.30)

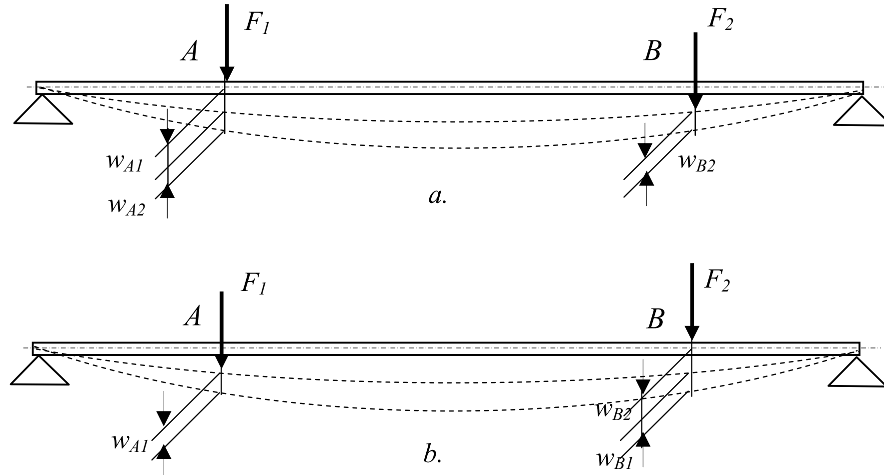


Fig. 8.4

Este evident faptul că energia potenţială nu depinde de succesiunea aplicării celor două forţe şi se poate scrie:

$$L_{1-2} = L_{2-1} \quad \Rightarrow \quad L_{12} = L_{21} \tag{8.31}$$

Relaţia (8.31) este expresia matematică a *teoremei lucrului mecanic reciproc* (*BETTI*): *dacă asupra unui corp elastic se aplică două stări succesive de încărcare, lucrul mecanic efectuat de forţele din prima stare pe deplasările produse de cea de-a doua stare de încărcare, este egal cu lucrul mecanic efectuat de forţele din a doua stare pe deplasările produse de prima stare de încărcare* sau *lucrul mecanic reciproc nu depinde de ordinea aplicării sarcinilor.*

8.5.3. Teorema deplasărilor reciproce (*MAXWELL*)

În cazul în care cele două forţe *(F_1)* şi *(F_2)* corespunzătoare celor două stări de încărcare din figura 8.4 sunt egale ca intensitate ($F_1=F_2=P$) atunci teorema lucrului mecanic reciproc devine:

$$L_{12} = L_{21} \quad \Rightarrow \quad w_{A2} = w_{B1} \tag{8.32}$$

deoarece: lucrul mecanic reciproc pentru prima succesiune de încărcare este:

$$L_{12} = Pw_{A2} \tag{8.33}$$

iar lucrul mecanic reciproc pentru a doua succesiune de încărcare este:

$$L_{21} = Pw_{B1} \tag{8.34}$$

Relaţia (8.32) este expresia matematică a *teoremei deplasărilor reciproce (MAXWELL)*: *deplasarea dintr-o secţiune A a unei bare produsă o forţă ce se aplică într-o secţiune B este egală cu deplasarea secţiunii B când aceeaşi forţă se aplică în secţiunea A , cele două deplasări se măsoară pe direcţia forţei.*

8.5.4. Metoda MOHR-MAXWELL pentru solicitarea de întindere compresiune a barelor drepte

Se consideră o bară dreaptă de lungime L supusă la două stări succesive de încărcare: prima este starea reală de încărcare axială a barei (fig.8.5.a) iar cea de-a doua este o forță axială unitară f aplicată în secțiunea în care se dorește calculul deplasării (de exemplu în capătului barei, figura 8.5.b).

Teorema lucrului mecanic reciproc se scrie: $L_{12}=L_{21}$, în care :

- L_{12} - lucrul mecanic al forțelor din prima stare pe deplasările produse de cea de-a doua stare de încărcare se scrie:

$$dL_{12} = N \cdot \Delta(dx) = \frac{Nndx}{EA} \quad \Rightarrow \quad L_{12} = \int_L \frac{Nndx}{EA} \qquad (8.35)$$

unde $\Delta(dx)$ este deformația elementului dx sub acțiunea forțelor din a doua stare de încărcare: $$\Delta(dx) = \frac{ndx}{EA} \qquad (8.36)$$

- L_{21} - lucrul mecanic al forțelor din a doua stare pe deplasările produse de prima stare se scrie: $$L_{21} = 1 \cdot \delta_A \qquad (8.37)$$

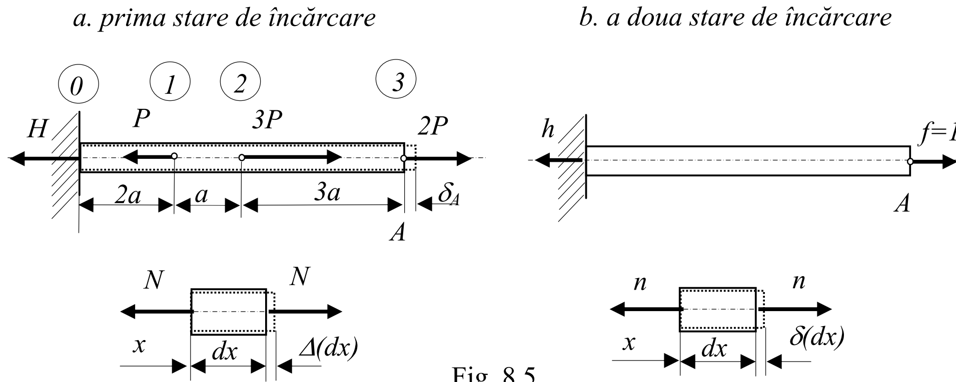


Fig. 8.5

Se obține relația pentru calculul deplasării secțiunii A:

$$\delta_A = \int_0^{x_A} \frac{Nn}{EA} dx \qquad (8.38)$$

Relația (8.38) este expresia matematică a *metodei MOHR MAXWELL* pentru calculul deplasărilor la solicitarea de întindere-compresiune.

Pentru bara din figura 8.5.a. eforturile axiale $N(x)$ și $n(x)$ pentru fiecare tronson au următoarele valori: $H = 4P;$ $n = 1$; $N_{01} = 4P;$ $N_{12} = 5P;$ $N_{23} = 2P.$ și se obține :

$$\delta_A = \int_0^{x_A} \frac{Nn}{EA} dx = \int_0^{2a} \frac{N_{01} n}{EA} dx + \int_0^{2a} \frac{N_{01} n}{EA} dx + \int_0^{2a} \frac{N_{01} n}{EA} dx = \frac{19Pa}{EA} \qquad (8.39)$$

8.5.5. Metoda MOHR-MAXWELL pentru solicitarea de încovoiere pură simetrică a barelor drepte

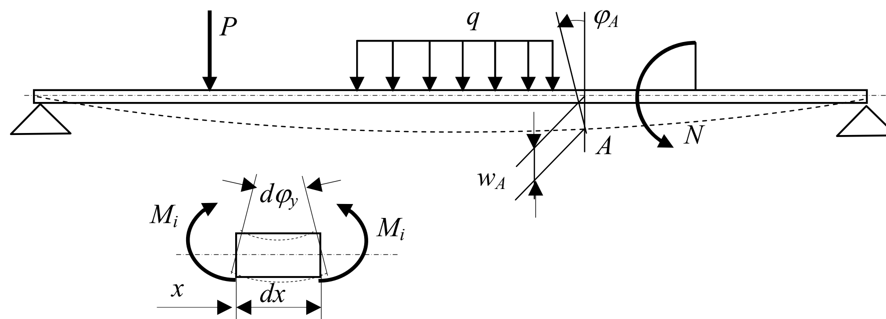
În cazul solicitării de încovoiere pură a unei bare drepte cu secțiunea simetrică, cele două stări de încărcare sunt:

1. starea reală de încărcare a barei (fig.8.6.a);

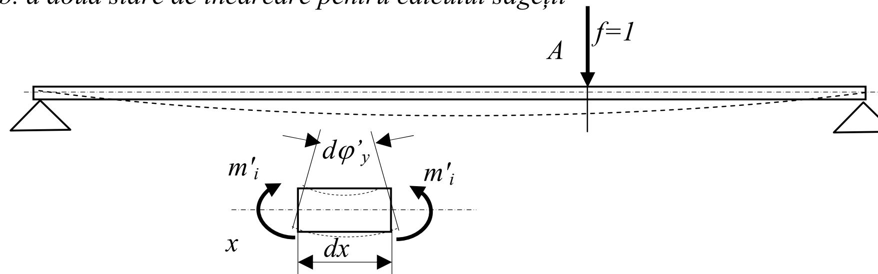
2. a doua stare de încărcare este:

- pentru calculul săgeții w_A - o forță unitară $f=1$ aplicată după axa Oz în secțiunea A (fig.8.6.b)
- pentru calculul rotirii φ_A - un moment unitar $m=1$ aplicat după axa Oy în secțiunea A (fig. 8.6.c)

a. prima stare de încărcare



b. a doua stare de încărcare pentru calculul săgeții



c. a doua stare de încărcare pentru calculul rotirii

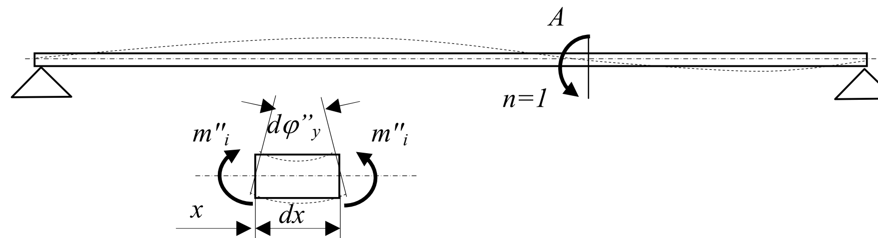


Fig. 8.6

a. Calculul săgeții

Teorema lucrului mecanic reciproc se scrie în acest caz : $L_{12}=L_{21}$, în care :

- L_{12} - lucrul mecanic al forțelor din prima stare pe deplasările produse de a doua stare de încărcare se scrie:

$$dL_{12} = M_i \cdot d\varphi_y' = M \frac{m_i' dx}{EI} \Rightarrow L_{12} = \int \frac{M_i m_i' dx}{EI} \qquad (8.40)$$

unde: $d\varphi_y' = \dfrac{m_i' dx}{EI}$ este rotirea fețelor elementului dx sub acțiunea forțelor din a doua stare (fig.8.6.b).

- L_{21} - lucrul mecanic al forțelor din a doua stare de încărcare pe deplasările produse de prima stare se scrie:

$$L_{21} = 1 \cdot w_A \qquad (8.41)$$

Egalând cele două expresii ale lucrului mecanic reciproc corespunzătoare celor două succesiuni a aplicării forțelor (8.40) și (8.41) se obține:

$$w_A = \int_0^{x_A} \frac{M_i m_i' dx}{EI} \qquad (8.42)$$

Relația (8.42) reprezintă *relația MOHR MAXWELL* pentru calculul *săgeților* la solicitarea de încovoiere pură simetrică.

b. Calculul rotirii

Teorema lucrului mecanic reciproc se scrie în acest caz : $L_{12}=L_{21}$, în care :

- L_{12} - lucrul mecanic al forțelor și cuplurilor din prima stare pe deplasările produse cuplul $n=1$ din a doua stare de încărcare are expresia:

$$dL_{12} = M_i \cdot d\varphi_y'' = M \frac{m_i'' dx}{EI} \Rightarrow L_{12} = \int_0^{x_A} \frac{M_i m_i'' dx}{EI} \qquad (8.43)$$

unde $d\psi$ este rotirea fețelor elementului dx sub acțiunea cuplului $n=1$ din a doua stare:

$$d\varphi_y'' = \frac{m_i'' dx}{EI} \qquad (8.44)$$

- L_{21} - lucrul mecanic al cuplului $n=1$ din a doua stare pe deplasările produse de prima stare are expresia:

$$L_{21} = 1 \cdot \varphi_A \qquad (8.45)$$

Egalând cele două expresii ale lucrului mecanic reciproc corespunzătoare celor două succesiuni a aplicării cuplurilor (8.25) și (8.27) se obține:

$$\varphi_A = \int_0^{x_A} \frac{M_i m_i'' dx}{EI} \qquad (8.46)$$

Relația (8.46) reprezintă *relația MOHR MAXWELL* pentru calculul *rotirilor* la solicitarea de încovoiere pură.

8.5.6. Metoda MOHR-MAXWELL pentru solicitarea de încovoiere oblică a barelor drepte

Rotirile specifice pentru la încovoierea oblică a barelor drepte, având axele secţiunii transversale a barei *Oy* şi *Oz* oarecare şi eforturi încovoietoare după axa *Oy*, conform relaţiilor (7.7) au expresiile:

$$\omega_y = \frac{d\varphi_y}{dx} = \frac{I_z M_{iy}}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}; \quad \omega_z = \frac{d\varphi_z}{dx} = \frac{I_{yz} M_{iy}}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}. \tag{8.47}$$

Pentru calculul săgeţilor w_A şi v_A se aplică forţa unitară în secţiunea în care se doreşte să se calculeze săgeata, atât după axa *Oy* cât şi după *Oz*, cele două stări de încărcare fiind independente. Se obţine:

- *Când forţa unitară se aplică după direcţia Oy:*

L_{12} - lucrul mecanic al forţelor din prima stare pe deplasările produse forţa unitară când aceasta se aplică după *Oy*:

$$dL_{12} = M_{iy} \cdot d\varphi_y' = \frac{I_z \cdot M_{iy} m_{iy}'}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)} \Rightarrow L_{12} = \int_\ell \frac{I_z \cdot M_{iy} m_{iy}' dx}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)} \tag{8.48}$$

unde: $d\varphi_y' = \frac{I_z \cdot m_{iy}'}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)} dx$ este rotirea feţelor elementului *dx* după axa *Oy* sub acţiunea forţei unitare (fig.8.6.b).

Înlocuind în relaţia $L_{12}=L_{21}$ se obţine deplasarea după *Oz*:

$$w_A = \frac{I_z \delta_y}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}, \qquad \delta_y = \int_\ell M_{iy} m_{iy}' dx \tag{8.49}$$

- *Când forţa unitară se aplică după direcţia Oz:*

L_{12} - lucrul mecanic al forţelor din prima stare pe deplasările produse forţa unitară când se aplică după *Oz* este:

$$dL_{12} = -M_{iy} \cdot d\varphi_z' = -\frac{I_{yz} \cdot M_{iy} m_{iy}'}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)} \Rightarrow L_{12} = -\int_\ell \frac{I_{yz} \cdot M_{iy} m_{iy}' dx}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)} \tag{8.50}$$

Înlocuind în relaţia $L_{12}=L_{21}$ se obţine deplasarea după *Oz*:

$$v_A = -\frac{I_{yz} \delta_y}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}, \qquad \delta_y = \int_\ell M_{iy} m_{iy}' dx \tag{8.51}$$

În cazul încovoierii oblice după axa *Oz*, rotirile specifice conform relaţiilor (7.19) au expresiile:

$$w_A = \frac{I_{yz} \delta_z}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}, \quad v_A = -\frac{I_y \delta_z}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}, \quad \delta_z = \int_\ell M_{iz} m_{iz}' dx \tag{8.52}$$

Pentru cazul general al încovoierii spaţiale cu momente după *Oy* şi *Oz* aplicând principiul suprapunerii efectelor se obţine:

$$w_A = \frac{I_z \delta_y + I_{yz} \delta_z}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}, \qquad v_A = -\frac{I_{yz} \delta_y + I_y \delta_z}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)} \tag{8.53}$$

Aplicația 8.1

Folosind metoda *MOHR MAXWELL* să se determine săgeata şi rotirea secțiunii (4) unei bare cu secțiunea simetrică situată pe două reazeme punctuale rigide, încărcată cu o forță P la jumătatea distanței între reazeme, ca în figura 8.7. Bara are lungimea *1,5 a* şi rigiditatea la încovoiere constantă EI_y .

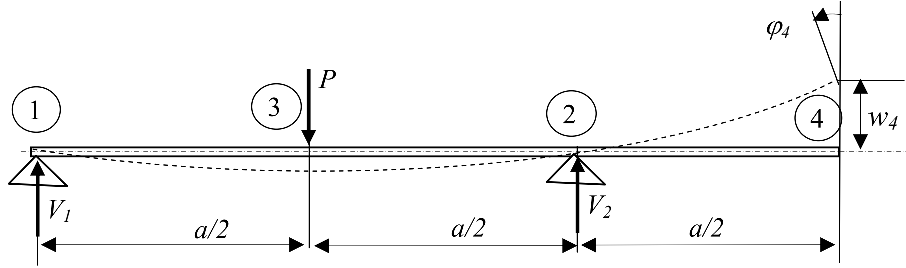


Fig. 8.7

a. Calculul săgeții

Pentru a calcula săgeata w_4 folosind metoda *MOHR MAXWELL* se consideră pentru cea de-a doua stare de încărcare o forță unitară $f=1$ ce acționează în secțiunea 4 după direcția axei Oz (fig.8.8.b). Prima stare de încărcare este starea reală (fig.8.8.a).

Considerând originea la capătul fiecărui troson de bară, expresiile momentului $M_i(x)$ corespunzătoare primei stări de încărcare pentru fiecare din cele trei tronsoane ale barei sunt (fig. 8.8.a):

$$\begin{aligned} M_{13} &= \frac{P}{2}x; \quad x \in [0,\ a/2] \\ M_{32} &= \frac{P}{2}\left(\frac{a}{2}+x\right) - Px = \frac{P}{2}\left(\frac{a}{2}-x\right); \quad x \in [0,\ a/2] \\ M_{24} &= 0 \quad x \in [0,\ a/2] \end{aligned} \tag{8.54}$$

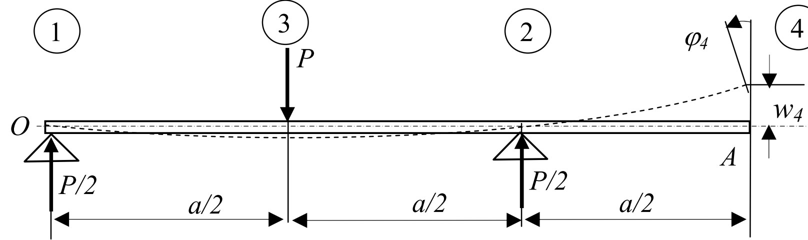
Expresiile momentului m_i' corespunzătoare celei de-a doua stări pentru fiecare din cele trei tronsoane ale barei sunt (fig. 8.8.b):

$$\begin{aligned} m_{13}' &= -\frac{1}{2}x; \quad x \in [0,\ a/2] \\ m_{32}' &= -\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+x\right); \quad x \in [0,\ a/2] \\ m_{24}' &= -\frac{1}{2}(a+x) + \frac{3}{2}x; \quad x \in [0,\ a/2] \end{aligned} \tag{8.55}$$

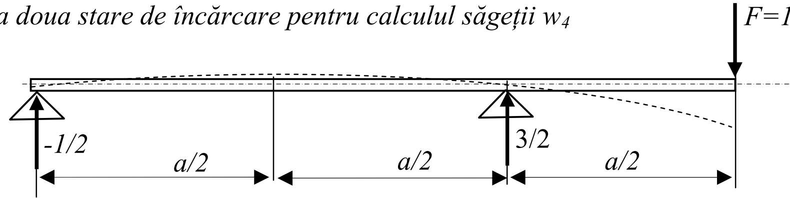
Înlocuind în relația (8.42) se obține săgeata:

$$w_4 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{a/2} \frac{P}{2}x \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right)dx + \int_0^{a/2} \frac{P}{2}\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{2}+x\right)dx\right] = -\frac{Pa^3}{32EI} \tag{8.56}$$

a. prima stare de încărcare: starea reală



b. a doua stare de încărcare pentru calculul săgeții w_4



c. a doua stare de încărcare pentru calculul rotirii φ_4

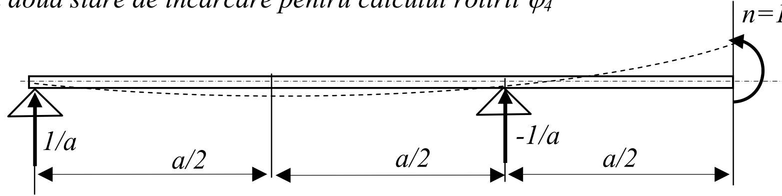


Fig. 8.8

b. Calculul rotirii

Pentru a calcula rotirea φ_4 folosind metoda *MOHR MAXWELL* se consideră pentru cea de-a doua stare de încărcare un cuplu unitar $n=1$ ce acționează în secțiunea (4) după direcția axei Oy (fig.8.8.b). Expresiile momentului m_i'' sunt (fig. 8.8.c):

$$m_{13}'' = \frac{x}{a}; \qquad x \in [0,\ a/2]$$

$$m_{32}'' = \frac{1}{a}\left(\frac{a}{2} + x\right); \qquad x \in [0,\ a/2] \tag{8.57}$$

$$m_{24}'' = \frac{1}{a}(a + x) - \frac{1}{a}a = 1; \qquad x \in [0,\ a/2]$$

Înlocuind în (8.46) se obține rotirea:

$$\varphi_4 = \frac{1}{EI}\left[\int_0^{a/2} \frac{P}{2}x \cdot \frac{x}{a}dx + \int_0^{a/2} \frac{P}{2}\left(\frac{a}{2} - x\right)\frac{1}{a}\left(\frac{a}{2} + x\right)dx\right] = \frac{Pa^2}{16EI} \tag{8.58}$$

8.5.7. Formula de integrare *VEREŞCEAGHIN*

Pentru calculul integralei $\int M_i m_i dx$ de la metoda *MOHR MAXWELL* se foloseşte formula de integrare grafo-analitică a lui *VEREŞCEAGHIN*. Funcția $m_i(x)$ este totdeauna o funcție liniară iar funcția $M_i(x)$ este liniară sau parabolică în funcție de sarcinile exterioare (pentru sarcini uniform distribuite este o funcție de gradul al II-lea iar pentru sarcini distribuite liniar este de gradul al III-lea). În figura 8.9.a este prezentată funcția $M_i(x)$ iar în figura 8.9.b funcția liniară $m_i(x)$.

Se observă că un elementul de arie corespunzător unei fâşii de lățime dx din diagrama $M(x)$, situat la distanța x de capătul barei are expresia:

$$dA = M_i(x) \cdot dx \tag{8.59}$$

Expresia momentului din diagrama $m_i(x)$ (fig 8.9.b) se poate scrie:

$$m_i(x) = x \cdot tg\alpha \tag{8.60}$$

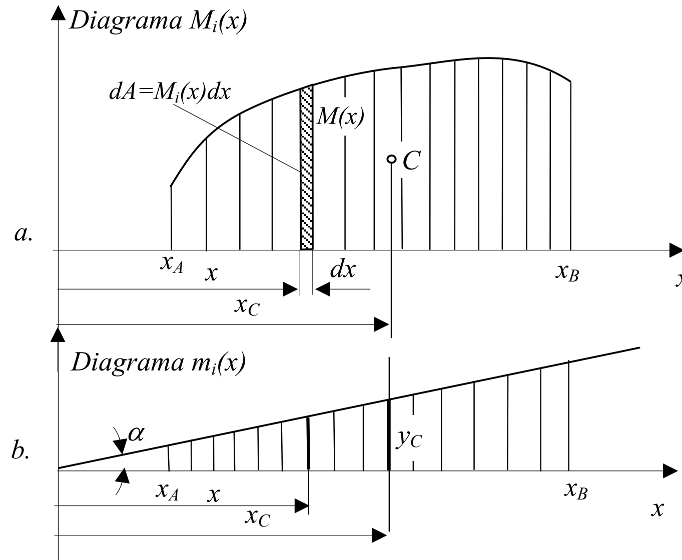


Fig. 8.9

Folosind relațiile (8.59) şi (8.60), integrala $\int M_i m_i dx$ se poate scrie:

$$\int_{x_A}^{x_B} M_i(x) m_i(x) dx = \int_{x_A}^{x_B} x \cdot tg\alpha \cdot dA = tg\alpha \int_{x_A}^{x_B} x dA = tg\alpha \cdot S_y = x_c \cdot tg\alpha \cdot A \tag{8.61}$$

unde : S_y este momentul static al diagramei $M_i(x)$ față de axa ordonatelor: $S_y = Ax_c$;

$y_c = x_c \cdot tg\alpha$ reprezintă valoarea din diagrama $m_i(x)$ corespunzătoare lui x_C sau abscisa centrului de greutate al suprafeței diagramei $M_i(x)$ (fig 8.9.b);

A este aria sub diagrama $M_i(x)$ cuprinsă între x_A şi x_B (fig 8.9.a).

Se obține *formula lui VEREŞCEAGHIN* pentru calculul integralei:

$$\int_{x_A}^{x_B} M_i(x) m_i(x) dx = A\, y_c \tag{8.62}$$

Formulele pentru calculul distanței până la centrul de greutate și a ariei în cazul unor suprafețe particulare de diagrame $M_i(x)$ sunt date în tabelul 8.2

Tabelul 8.2

y, C, h, x_C, a, x $x_C=a/2;\ A=ah$	y, h, C, x_C, a, x $x_C=2a/3;\ A=ah/2$
Parabola de gradul II : $M(x)=h\dfrac{x^2}{a^2}$ y, h, C, x_C, a, x $x_C=3a/4;\ A=ah/3$	Parabola de gradul II : $M(x)=h\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$ y, h, C, x_C, a, x $x_C=3a/8;\ A=2ah/3$
Parabola de gradul III : $M(x)=h\dfrac{x^3}{a^3}$ y, h, C, x_C, a, x $x_C=4a/5;\ A=ah/4$	Parabola de gradul III : $M(x)=h\left(1-\dfrac{x^3}{a^3}\right)$ y, h, C, x_C, a, x $x_C=2a/5;\ A=3ah/4$

Aplicația 8.2

Folosind metoda *MOHR-MAXWELL* şi formula lui *VEREŞCEAGHIN* să se determine săgeata şi rotirea secțiunii (4) pentru bara cu secțiune simetrică situată pe două reazeme punctuale rigide, încărcată cu o forță P la jumătatea distanței între reazeme a în figura 8.10. Bara are rigiditatea la încovoiere EI_y constantă pe toată lungimea ei.

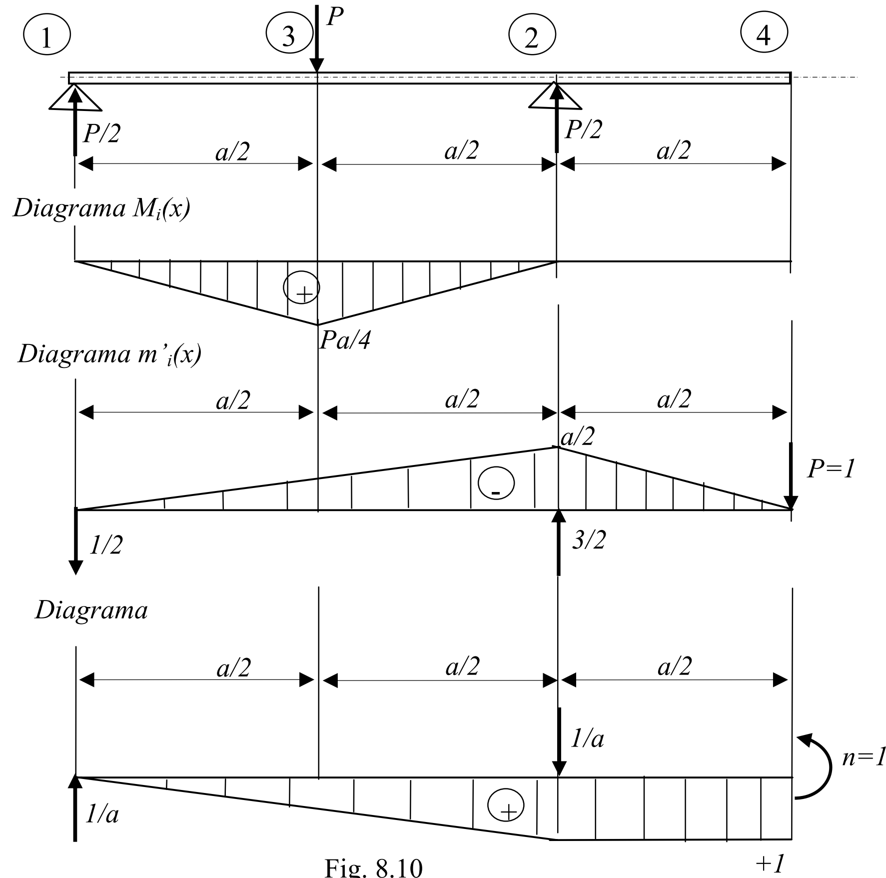


Fig. 8.10

Pentru calculul deplasării şi rotirii secțiunii (4) se aplică formula lui *VEREŞCEAGHIN* şi se obține:

$$w_4 = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{Pa}{4}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{3}\left(-\frac{a}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{Pa}{4}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)\right]=-\frac{Pa^3}{32EI}$$

$$\varphi_4 = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{Pa}{4}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{Pa}{4}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1\right]=\frac{Pa^2}{16EI} \qquad (8.63)$$

S-au obținut aceleaşi valori cu cele determinate anterior prin integrare directă.

8.5.8. Formula 1/3 *SIMPSON*

Pentru calculul integralelor de forma $\int M_i m_i dx$, în care *m(x)·Mi(x)* este o funcție de gradul al III-lea, se foloseşte metoda *cuadraturii NEWTON COTES* cu trei puncte de diviziune, cunoscută şi sub denumirea de *formula 1/3 SIMPSON:*

$$\int_{x_A}^{x_B} M_i(x) m_i(x) dx = \frac{a}{3}\left(h_0 k_0 + 4h_1 k_1 + h_2 k_2\right) \tag{8.64}$$

unde: $2a = x_B - x_A$ este lungimea intervalului de integrare;

h_0, h_1, h_2 ordonatele diagramei $M_i(x)$ corespunzătoare lui x_A, x_A+a, x_B;

k_0, k_1, k_2 ordonatele diagramei $m_i(x)$ pentru x_A, x_A+a, x_B (fig.8.11).

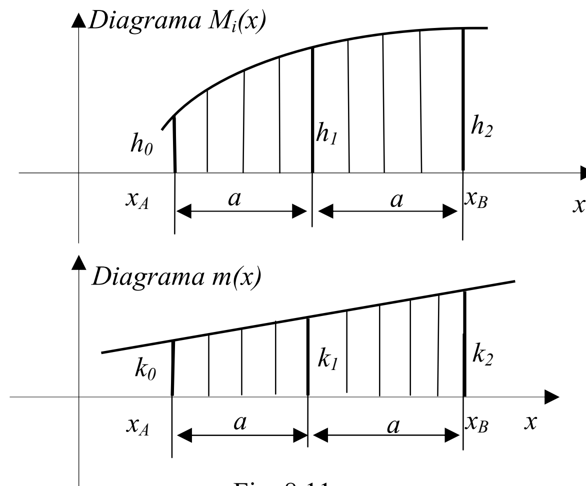


Fig. 8.11

Aplicația 8.3

Folosind metoda *MOHR MAXWELL* şi formula lui VEREŞCEAGHIN să se determine săgeata şi rotirea secțiunii (4) pentru bara cu secțiunea simetrică din figura 8.12 situată pe două reazeme punctuale rigide, încărcată cu o forță *P* la jumătatea distanței între reazeme. Bara are rigiditatea la încovoiere EI_y constantă .

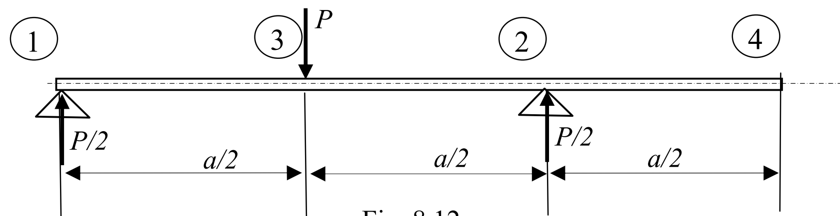


Fig. 8.12

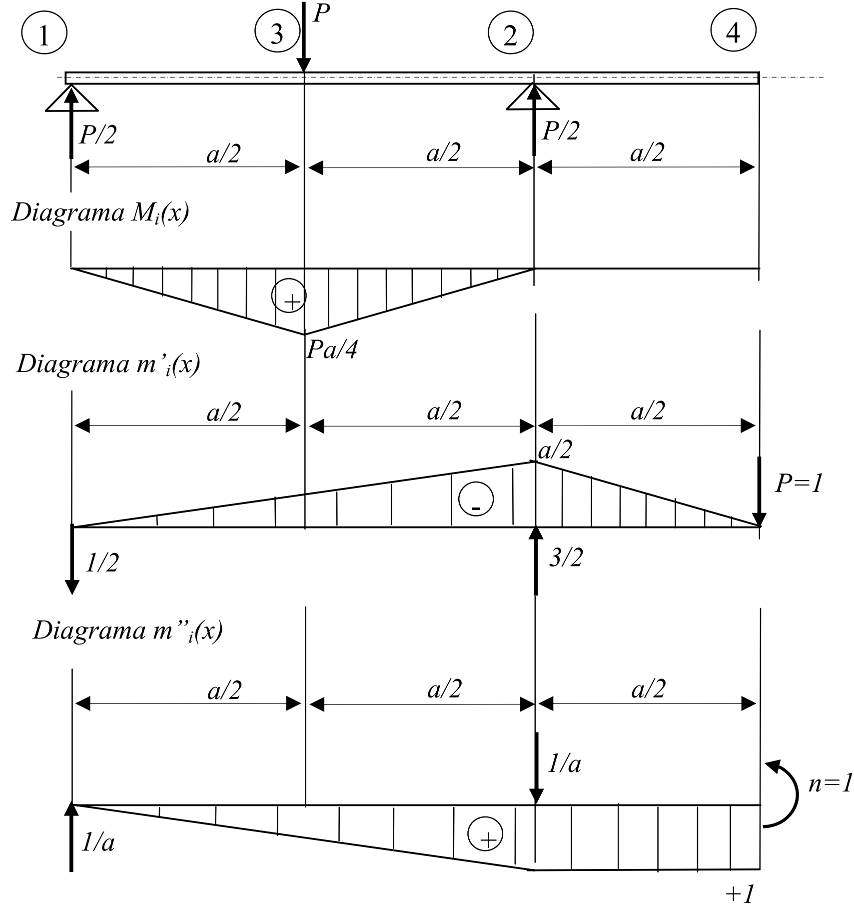


Fig. 8.13

Aplicând formula 1/3 *SIMPSON* se obțin aceleaşi rezultate cu cele determinate prin metoda integrării directe sau formula lui *VEREŞCEAGHIN*:

$$EIw_4 = \frac{a}{2\cdot 6}\left[0\cdot 0 + 4\cdot\frac{Pa}{8}\cdot\left(-\frac{a}{8}\right) + \frac{Pa}{4}\cdot\left(-\frac{a}{4}\right)\right] + \frac{a}{2\cdot 6}\left[\frac{Pa}{4}\cdot\left(-\frac{a}{4}\right) + 4\cdot\frac{Pa}{8}\cdot\left(-\frac{3a}{8}\right) + 0\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)\right]$$

$$w_4 = -\frac{Pa^3}{32EI}$$

$$EI\varphi_4 = \frac{a}{2\cdot 6}\left[0\cdot 0 + 4\cdot\frac{Pa}{8}\cdot\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{Pa}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\right] + \frac{a}{2\cdot 6}\left[\frac{Pa}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + 4\cdot\frac{Pa}{8}\cdot\left(\frac{3}{4}\right) + 0\cdot(1)\right] \quad (8.65)$$

$$\varphi_4 = \frac{Pa^2}{16EI}$$

Aplicația 8.4

Folosind metoda *MOHR MAXWELL* să se determine săgeata w_1 şi v_1 a secțiunii (4) pentru bara de secțiune constantă nesimetrică, încărcată cu forța *P* ca în figura 8.14.

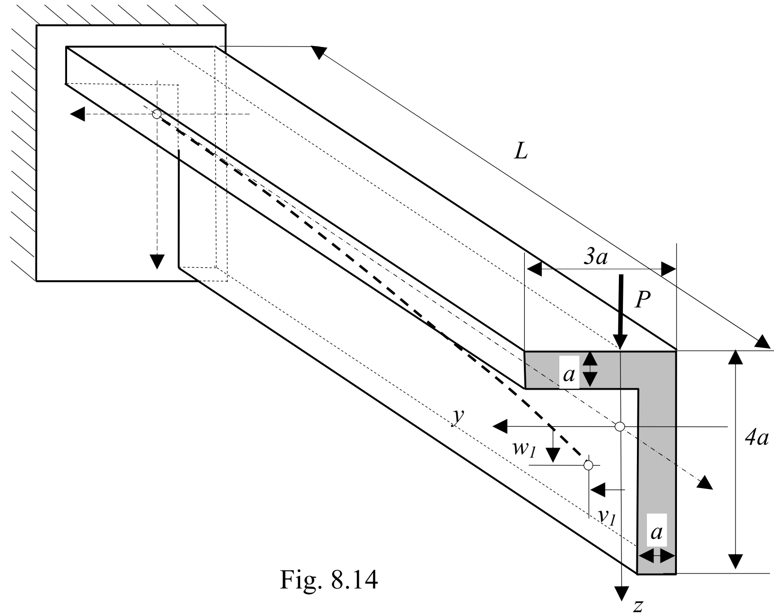


Fig. 8.14

Momentele de inerție axiale şi centrifugale față de axele *Oy* şi *Oz* ce trec prin centrul de greutate al secțiunii au fost calculate la aplicația 5.1:

$$I_y = 8{,}5a^4; \quad I_z = 4a^4; \quad I_{yz} = -3a^4 \tag{8.66}$$

Aplicând relațiile pentru calculul deplasărilor (8.49) şi (8.51) se obține:

$$w_1 = \frac{I_z \delta_y}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}, \quad v_1 = -\frac{I_{yz}\delta_y}{E\left(I_y I_z - I_{yz}^2\right)}, \quad \delta_y = \int_\ell M_{iy} m'_{iy} dx \tag{8.67}$$

Pentru a calcula δ_y se construiesc diagramele M_{iy} şi m_{iy} din figura 8.15 şi se foloseşte formula lui *VEREŞCEAGHIN:*

$$\delta_y = \frac{1}{2} L \cdot (-PL) \cdot \left(-\frac{2L}{3}\right) = \frac{PL^3}{3} \tag{8.68}$$

Înlocuind în relațiile (8.67) se obține:

$$w_1 = \frac{4}{75}\frac{PL^3}{Ea^4}; \quad v_1 = \frac{3}{75}\frac{PL^3}{Ea^4} \tag{8.69}$$

Se observă din relațiile (8.69) că ambele săgeți sunt pozitive.

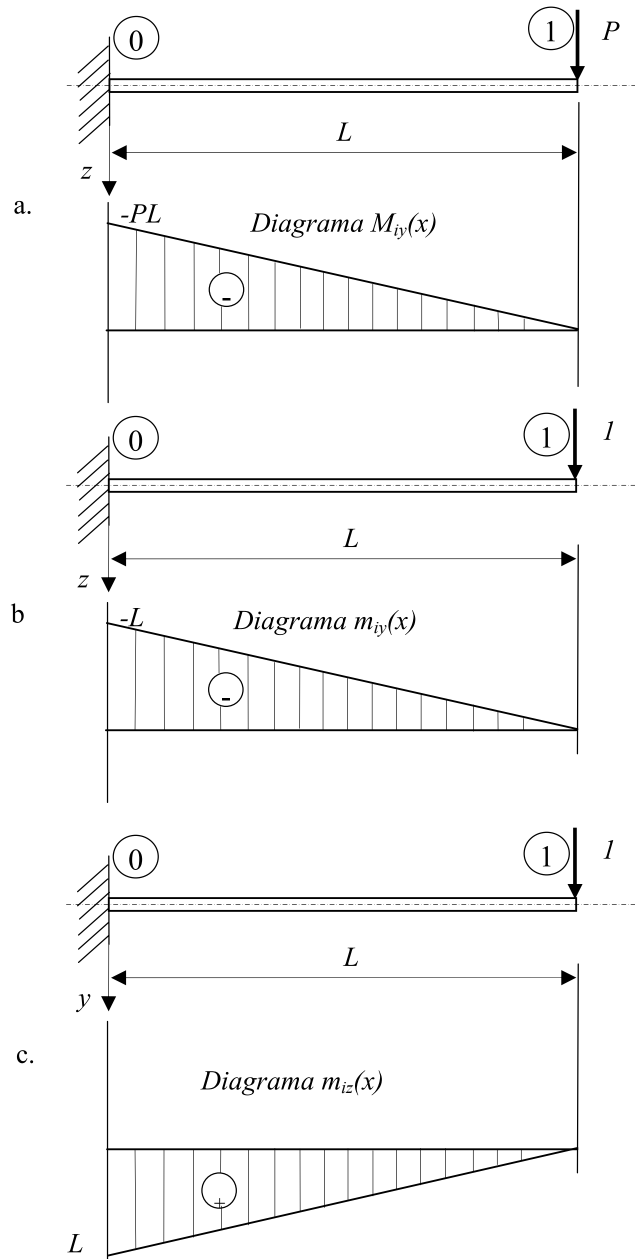

0
1
P
L
z
a.
-PL
Diagrama $M_{iy}(x)$
-
0
1
1
L
z
b
-L
Diagrama $m_{iy}(x)$
-
0
1
1
L
y
c.
Diagrama $m_{iz}(x)$
+
L

Fig. 8.15

8.6. Metoda CASTIGLIANO

8.6.1. Prima teoremă a lui *CASTIGLIANO*

Conform principiului lucrului mecanic virtual, variația energiei potențiale de deformație elastică a unui corp deformabil este egală cu lucrul mecanic virtual al forțelor exterioare, a cărui expresie se scrie:

$$\delta U = \delta L_{ext} = \sum_{i=1}^{n} P_i \delta u_i \tag{8.70}$$

Se poate exprima variația energiei potențiale de deformație elastică U în funcție de deplasările virtuale δu_i sub forma:

$$\delta U = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial u_i} \delta u_i \tag{8.71}$$

Prin identificarea celor două relații (8.70) şi (8.71) se obține :

$$P_i = \frac{\partial U}{\partial u_i} \tag{8.72}$$

S-a obținut *prima teoremă a lui* CASTIGLIANO: *o forță exterioară P_i ce acționează asupra unui corp deformabil este egală cu derivata parțială a energiei potențiale de deformație elastică a corpului în raport cu deplasarea virtuală u_i, această deplasare fiind măsurată pe direcția forței P_i.*

8.6.2. A doua teoremă a lui *CASTIGLIANO*

A doua teoremă a lui *CASTIGLIANO* permite calculul deplasărilor liniare şi/sau unghiulare sub acțiunea forțelor sau cuplurilor exterioare aplicate.

Se consideră un sistem de forțe independente $P_1, P_2 ..., P_n$ care acționează asupra corpului deformabil (fig.8.17). Acestea efectuează un lucru mecanic care se acumulează sub formă de energie potențială de deformație elastică U.

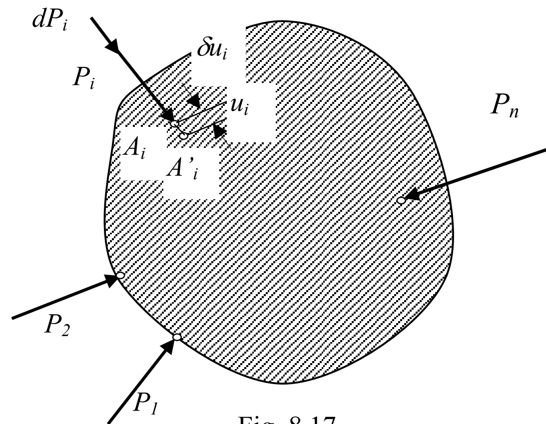


Fig. 8.17

Dacă se aplică apoi o forță elementară δP_i pe direcția forței P_i care acționează în punctul A_i , energia potențială de deformație elastică totală acumulată de corp sub acțiunea celor două stări de încărcare devine :

$$U + \delta U = U + \frac{\partial U}{\partial P_i}\delta P_i \tag{8.73}$$

Cele două sisteme de forțe exterioare acționează în ordine inversă: mai întâi se aplică forța elementară δP_i apoi sistemul de forțe $P_1, P_2, ... P_n$ și se notează:

δu_i - deplasarea punctului A_i sub acțiunea forței δP_i , pe direcția forței P_i;

u_i - deplasarea punctului A_i sub acțiunea sistemului de forțe $P_1, P_2,... P_n$ măsurată pe direcția forței P_i

Energia potențială de deformație elastică totală acumulată în acest caz va fi:

$$U + \delta U = U + L'(\delta P_i) + L''(\delta P_i) \tag{8.74}$$

în care: $L'(\delta P_i)$ este lucrul mecanic efectuat de forța δP_i pe deplasarea proprie δu_i :

$$L'(\delta P_i) = \frac{\delta P_i}{2}\cdot \delta u_i \tag{8.75}$$

$L''(\delta P_i)$, lucrul mecanic efectuat de forța δP_i pe deplasarea u_i :

$$L''(\delta P_i) = \delta P_i \cdot u_i \tag{8.76}$$

Înlocuind în expresia (8.74) se obține energia potențială de deformație elastică totală în acest caz:

$$U + \delta U = U + \frac{1}{2}\delta P_i \delta u_i + \delta P_i u_i \tag{8.77}$$

Întrucât energia potențială de deformație elastică totală nu depinde de succesiunea aplicării celor două stări de încărcare, este valabilă egalitatea:

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_i}\delta P_i = U + \frac{1}{2}\delta P_i \delta u_i + \delta P_i u_i \tag{8.78}$$

Dacă se neglijează în relația (8.78) infinitul de ordinul doi ($\delta P_i \delta u_i$) se obține:

$$u_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \tag{8.79}$$

Cea de-a doua *teoremă a lui CASTIGLIANO* are enunțul: *deplasarea liniară u_i pe direcția unei forțe exterioare P_i este egală cu derivata parțială a energiei potențiale elastice a corpului în raport cu forța P_i.*

Dacă în locul forței P_i acționează un moment M_k se obține *deplasarea unghiulară φ_k a planului în care acționează cuplul M_k :*

$$\varphi_k = \frac{\partial U}{\partial M_k} \tag{8.80}$$

Dacă însă în punctul în care se cere deplasarea nu acționează nici o forță, atunci se introduce în punctul respectiv, pe direcția deplasării o forță fictivă P_0 cu ajutorul căreia se se determină derivata parțială a energiei potențiale de deformație:

$$u_0 = \frac{\partial U}{\partial P_0} \tag{8.81}$$

Aplicația 8.5

Folosind a doua teoremă a lui *CASTIGLIANO* să se determine săgeata şi rotirea secțiunii de capăt (4) pentru bara de secțiune constantă încărcată cu forța *P* ca în figura 8.18.a.

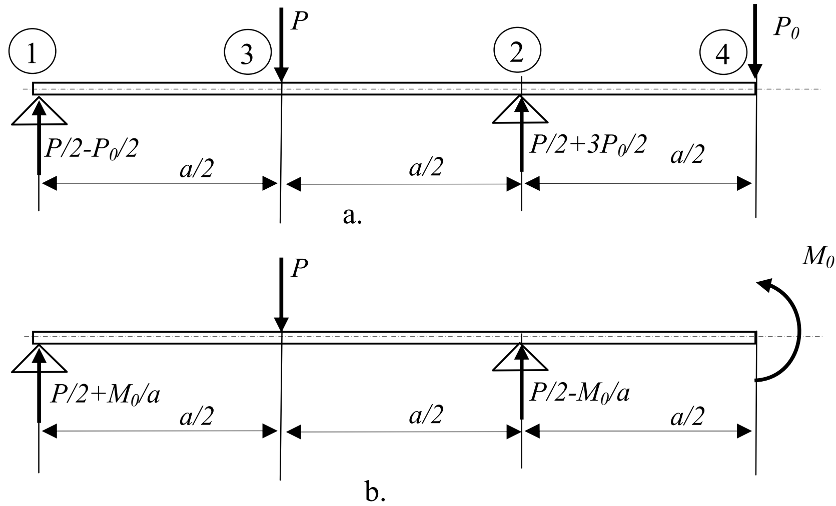


Fig. 8.18

Expresia energiei de deformație pentru eforturile de încovoiere se scrie:

$$U = \int_L \frac{M_i^2}{2EI} dx \tag{8.82}$$

Pentru a calcula săgeata şi rotirea se introduce în secțiunea (4) o forță fictivă P_0 (fig. 8.18.a) şi respectiv un cuplu fictiv M_0 (fig. 8.18.b). Se obține :

$$w_4 = \frac{\partial U}{\partial P_0} = \int_l \frac{\partial M_i}{\partial P_0} \cdot \frac{M_i}{EI} dx; \tag{8.83}$$

$$\varphi_4 = \frac{\partial U}{\partial M_0} = \int_l \frac{\partial M_i}{\partial M_0} \cdot \frac{M_i}{EI} dx \tag{8.84}$$

Pentru a calcula derivatele parțiale $\frac{\partial M_i}{\partial P_0}$ se scriu expresiile momentului $M_i(P_0)$ pentru cele trei tronsoane în primul caz de încărcare:

$$M_{13} = \frac{P-P_0}{2} x; \quad M_{32} = \frac{P-P_0}{2}\left(\frac{a}{2}+x\right) - Px;$$
$$M_{24} = \frac{P-P_0}{2}(a+x) - P\left(\frac{a}{2}+x\right) + \frac{P+3P_0}{2} x \tag{8.85}$$

Derivatele parțiale corespunzătoare sunt:

$$\frac{\partial M_{13}}{\partial P_0}=-\frac{x}{2};\quad \frac{\partial M_{32}}{\partial P_0}=-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+x\right);\ \frac{\partial M_{24}}{\partial P_0}=-\frac{1}{2}(a+x)+\frac{3x}{2} \qquad (8.86)$$

Expresiile lui $M(x)$ se obțin înlocuind în relațiile (8.85) $P_0=0$:

$$M_{13}=\frac{P}{2}x;\qquad M_{32}=\frac{P}{2}\left(\frac{a}{2}+x\right)-Px=\frac{P}{2}\left(\frac{a}{2}-x\right);\quad M_{24}=0 \qquad (8.87)$$

Înlocuind în relația (8.83) se determină săgeata :

$$w_4=\frac{1}{EI}\int_0^{a/2}\frac{P}{2}x\left(-\frac{x}{2}\right)+\int_0^{a/2}\frac{P}{2}\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{2}+x\right)dx=-\frac{Pa^3}{32EI} \qquad (8.88)$$

Pentru a calcula derivatele parțiale $\frac{\partial M_i}{\partial M_0}$ se scriu expresiile momentului $M_i(M_0)$ pentru cele trei tronsoane în al doilea caz de încărcare:

$$M_{13}=\left(\frac{P}{2}+\frac{M_0}{a}\right)x;\quad M_{32}=\left(\frac{P}{2}+\frac{M_0}{a}\right)\left(x+\frac{a}{2}\right)-Px;\quad M_{24}=0 \qquad (8.89)$$

Derivatele parțiale corespunzătoare sunt:

$$\frac{\partial M_{13}}{\partial M_0}=\frac{x}{a};\quad \frac{\partial M_{32}}{\partial M_0}=\frac{1}{a}\left(x+\frac{a}{2}\right);\qquad \frac{\partial M_{24}}{\partial M_0}=1 \qquad (8.90)$$

Expresiile lui $M(x)$ se obțin înlocuind în relația (8.89) $M_0=0$:

$$M_{13}=\frac{P}{2}x;\quad M_{32}=\frac{P}{2}\left(x+\frac{a}{2}\right)-Px;\quad M_{24}=0 \qquad (8.91)$$

Înlocuind în relația (8.84) se determină rotirea :

$$\varphi_4=\frac{1}{EI}\int_0^{a/2}\frac{a}{2}x\cdot\frac{x}{a}dx+\int_0^{a/2}\left[\frac{P}{2}\left(x+\frac{a}{2}\right)-Px\right]\frac{1}{a}\left(x+\frac{a}{2}\right)dx=\frac{Pa^2}{16EI} \qquad (8.92)$$

8.7. Probleme propuse

8.7.1. Se dă grinda din oțel, cu secțiunea constantă din figura 8.16.b cu $t=10mm$, rezemată la capete şi încărcată ca în figura 8.16.a, unde $a=0,5m$ şi $q=10kN/m$. Modulul de elasticitate este $E=2,1\cdot10^6$ MPa. Folosind metoda *MOHR MAXWELL* să se determine săgeata şi rotirea secțiunii situate la mijlocul barei.

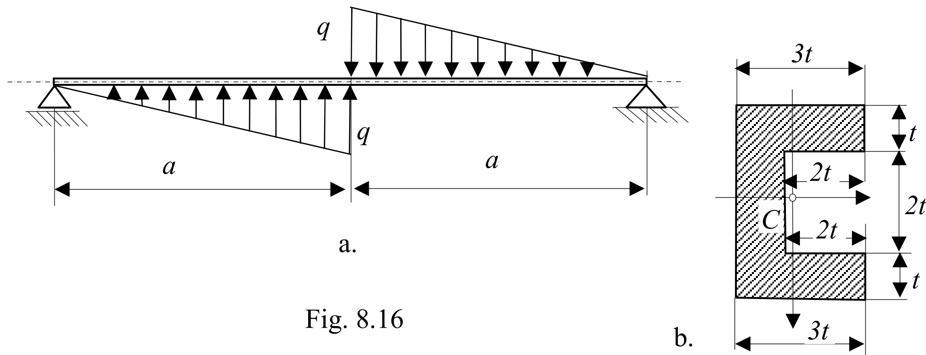


Fig. 8.16

8.7.2. Se dă grinda metalică încastrată, având încărcarea din figura 8.17.a , unde *a=1m*, *q=10kN/m.* Bara are secțiunea din figura 8.17.b, unde *t=10 mm*. Modulul de elasticitate este $E=2,1\cdot10^6$ *MPa.* Folosind metoda *MOHR MAXWELL* să se determine săgețile şi rotirile secțiunii din capătul liber al barei .

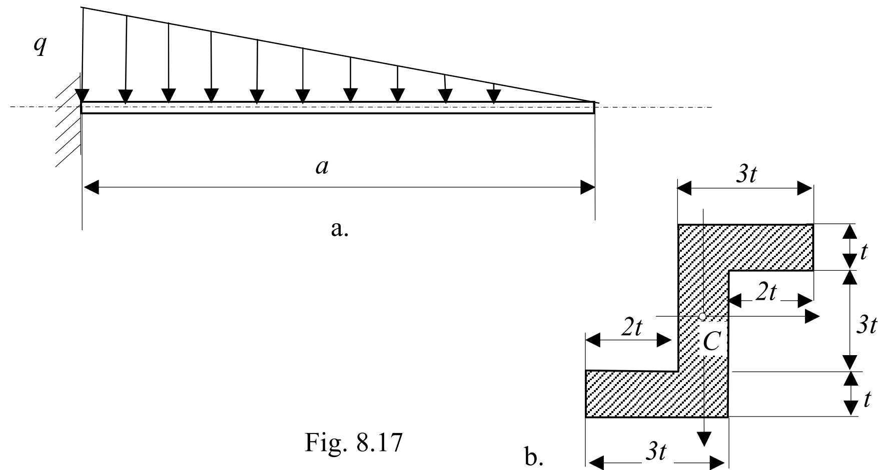


Fig. 8.17

8.7.3. Se dă grinda metalică articulată în (4), având încărcarea şi rezemarea din figura 8.18.a , unde *a=1m* ; *c=0,5m* ; *q=10kN/m* şi M_0*=20kNm.* Bara are secțiunea din figura 8.18.b, unde *t=14 mm*. Modulul de elasticitate este $E=2,1\cdot10^6$ *MPa.* Folosind metoda *MOHR MAXWELL* să se determine săgeata şi rotirile corespunzătoare articulației (4) .

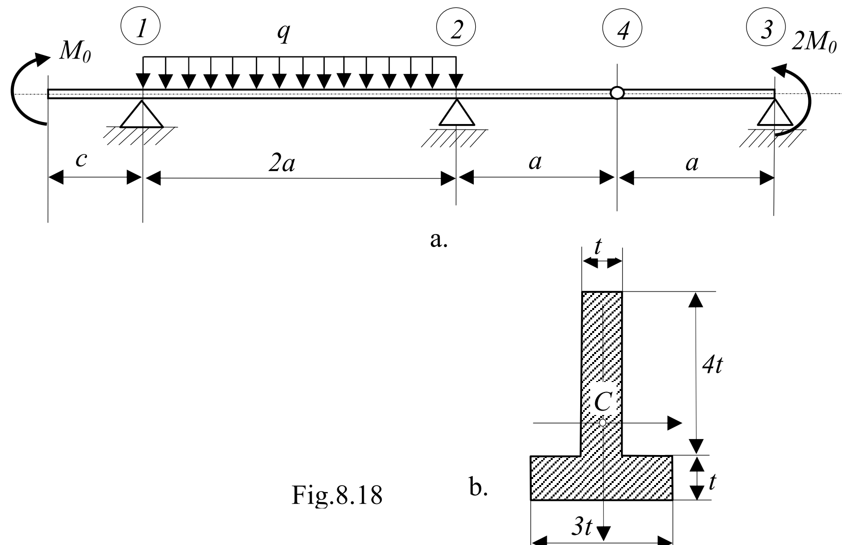


Fig.8.18

8.7.4. Se dă grinda metalică încastrată, având încărcarea din figura 8.19.a , unde *a=1m*, *q=10kN/m.* Bara are secțiunea din figura 8.19.b, unde *t=10 mm*. Modulul de elasticitate este $E=2{,}1\cdot10^6$ *MPa.* Folosind metoda *MOHR MAXWELL* să se determine săgețile şi rotirile secțiunii din capătul liber al barei .

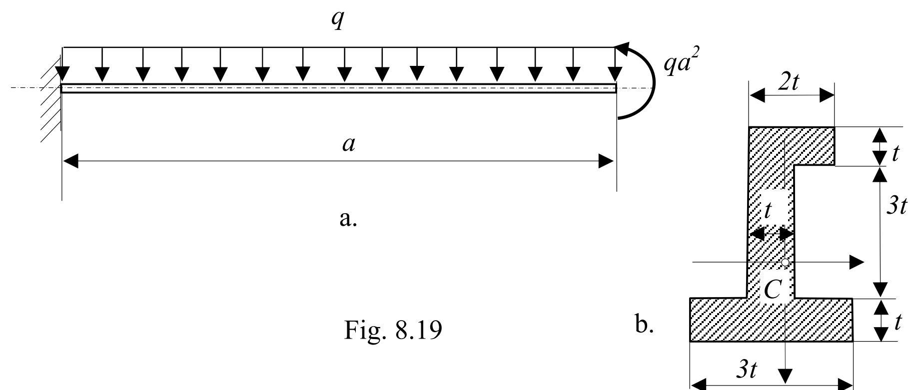


Fig. 8.19

8.7.5. Se dă grinda metalică articulată în (4), având încărcarea şi rezemarea din figura 8.20.a , unde *a=1m* ; *c=0,5m* ; *q=10kN/m* şi *P=20kN.* Bara are secțiunea din figura 8.20.b, unde *t=14 mm*. Modulul de elasticitate este $E=2{,}1\cdot10^6$ *MPa.* Folosind metoda *MOHR MAXWELL* să se determine săgeata şi rotirile corespunzătoare articulației (4) .

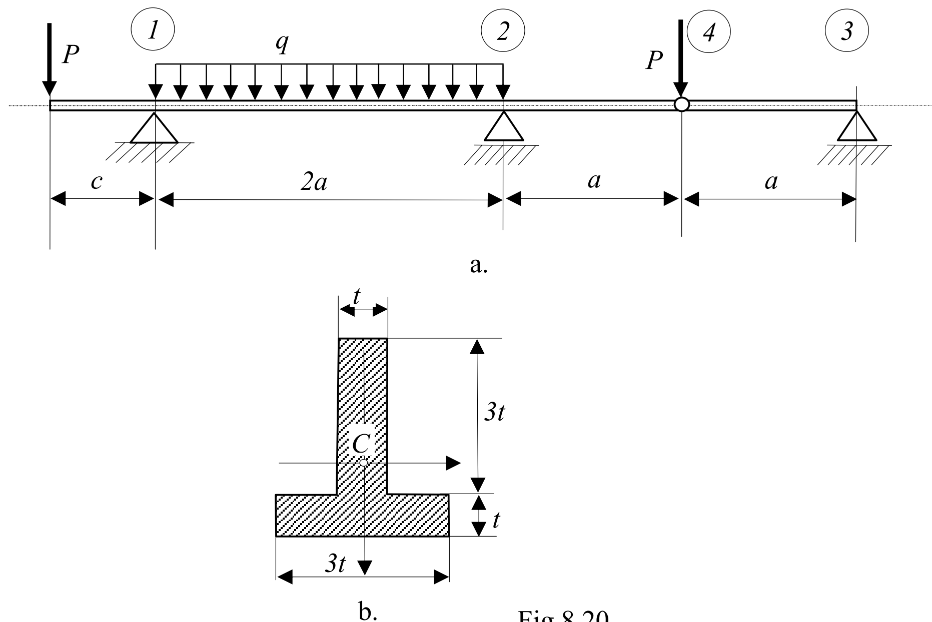


Fig.8.20

8.7.6. Se dă grinda metalică, cu secțiunea constantă, rezemată în A şi B, încărcată cu o forță uniform distribuită q în plan vertical şi o forță concentrată $P=2qa$ în planul orizontal trecând prin centrul de încovoiere-torsiune C, ca în figura 8.21.a, unde $a=1m$ şi $q=60$ kN/m. Bara are secțiunea din figura 5.b unde $t=10$ mm. Modulul de elasticitate este $E=2,1\cdot10^5$ MPa. *Se cere:*

1. să se traseze diagramele de eforturi;
2. verificarea barei pentru $\sigma_{admisibil}=210$ MPa; în secțiunile ele mai solicitate se va trasa axa neutră şi diagrama tensiunilor normale σ cu valori;
3. deplasarea totală în punctul D.

(Concursul Profesional de Rezistența Materialelor C.C. TEODORESCU, Târgu-Mureş, mai 2005).

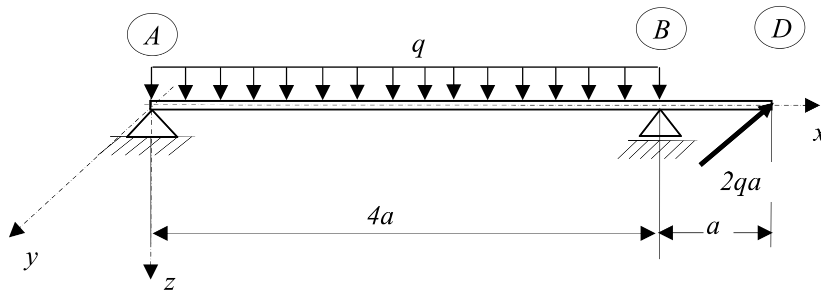


Fig.8.21 a.

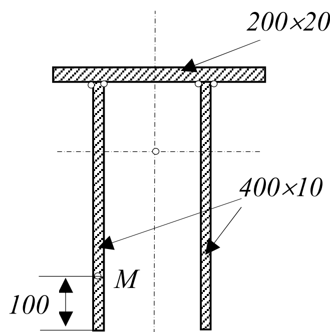


Fig.8.22.b

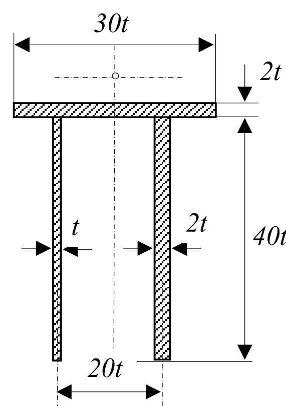


Fig.8.21 b.

8.7.7. Se dă grinda rezemată şi încărcată ca în figura 8.22.a, unde $a=1,2m$ şi $q=20$ kN/m, cu secțiunea transversală din figura 8.22.b. Modulul de elasticitate este $E=2,1\cdot10^5$ MPa şi tensiunea admisibilă a materialului $\sigma_a=210$ MPa. *Se cere*:

1. diagramele de eforturi;
2. verificarea la tensiunea normală σ_{max} cu trasarea diagramei;
3. verificarea la tensiunea de forfecare τ_{max} cu trasarea diagramei;
4. tensiuni şi direcții principale în punctul M al secțiunii B^{stg};
5. deplasarea punctului D. *(Concursul Profesional de Rezistența Materialelor, UTCB, 2003).*

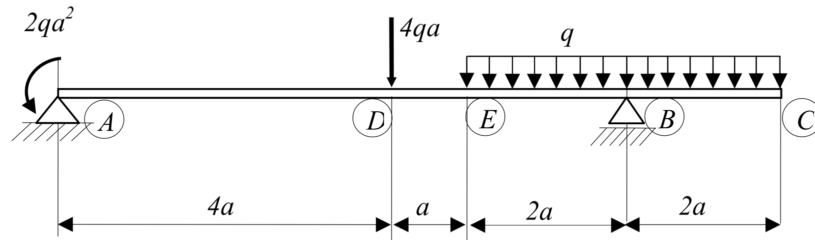
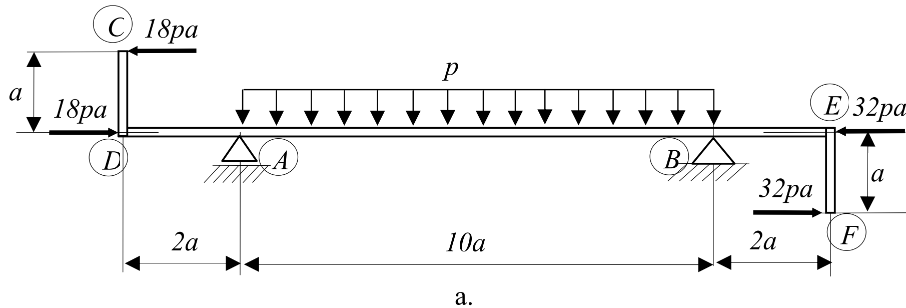


Fig.8.22.a

8.7.8. Pentru bara cotită rezemată şi încărcată ca în figura 8.23.a, unde *a=1m* şi *p=16 kN/m,* cu secţiunea transversală alcătuită din platbande sudate ca în figura 8.23.b*, se cere:*

1. să se traseze diagramele de eforturi T, M_i, N;
2. să se verifice secţiunea periculoasă a barei şi să se traseze diagrama tensiunii σ_x în această secţiune (tensiunea admisibilă a materialului: σ_a*=180 MPa*);
3. să se calculeze tensiunea tangenţială maximă τ_{max};
4. să se calculeze tensiunile şi direcţii principale în punctul *L* al secţiunii A^{dr};
4. să se calculeze deplasarea pe verticală a secţiunii *D*. Modulul de elasticitate este $E=2{,}1\cdot10^5$ *MPa* *(Concursul Profesional de Rezistenţa Materialelor, UTCB, 2003).*



a.

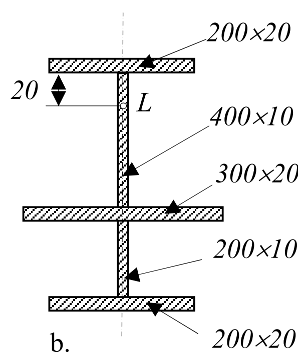


Fig.8.23 b.

8.7.9. Pentru grinda ABCDE, cu secțiunea simetrică alăturată, încărcată cu o forță uniform distribuită *q=30 kN/m* şi o forță concentrată *P=4qa,* ca în figura 8.24.a, unde *a=1m* şi $E=2{,}1\cdot10^5$ *MPa, se cer:*

a. verificarea grinzii în secțiunea cea mai solicitată şi diagrama σ_x (σ_{adm}*=210 MPa);*

b. să se traseze diagramele tensiunilor tangențiale τ în secțiunea D^{st};

c. tensiunile principale $\sigma_{I,II}$ şi direcțiile principale $\alpha_{I,II}$ în punctul *L* al secțiunii D^{st};

d. să se calculeze deplasarea pe verticală a secțiunii de capăt *E*.

(Concursul Profesional de Rezistența Materialelor C.C. TEODORESCU, UTCB , mai 2006).

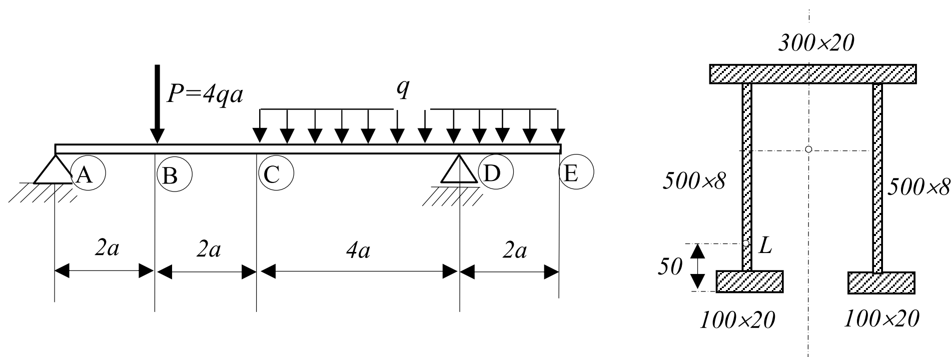


Fig. 8.24

9

BARE CURBE CU AXA CIRCULARĂ

9.1. Introducere

Barele curbe cu axa geometrică circulară sunt un caz particular al barelor curbe plane având axa un arc de cerc de rază R . Aceste bare pot fi supuse la cele patru tipuri de solicitări: axiale, tăietoare, încovoietoare şi torsionale .

Astfel, în figura 9.1.a este prezentată o bară curbă cu axa circulară supusă la solicitări axiale, tăietoare şi încovoietoare sub acțiunea unei forțe verticale concentrate P şi a unei sarcini uniform distribuite verticale p, ambele cuprinse în planul barei.

În figura 9.1.b este prezentată o bară curbă cu axa circulară supusă la solicitări încovoietoare, tăietoare şi torsionale sub acțiunea unei forțe verticale concentrate P şi a unei sarcini uniform distribuite verticale p, ambele fiind perpendiculare pe planul barei.

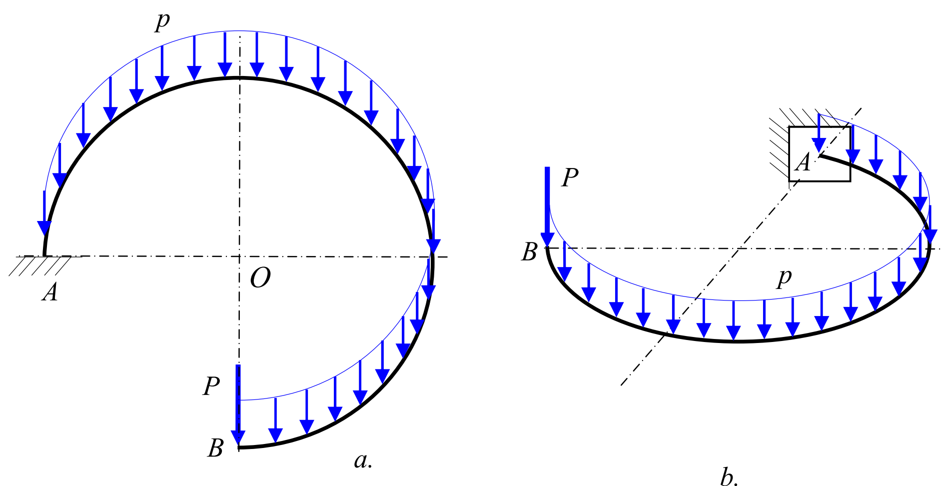


Fig. 9.1

În funcție de tipul sarcinilor exterioare şi direcția lor de acțiune se studiază:

- bare curbe încărcate cu sarcini uniform distribuite (radiale, tangențiale, verticale şi orizontale) şi sarcini concentrate cuprinse în planul axei barei;
- bare curbe încărcate cu sarcini uniform distribuite şi sarcini concentrate perpendiculare pe planul barei.

9.2. Bare curbe încărcate cu sarcini radiale uniform distribuite în planul lor

Se consideră bara curbă cu axa geometrică circulară, liberă la capătul din stânga şi încastrată în cel din dreapta, încărcată cu sarcini radiale uniform distribuite p cuprinse în planul barei, ca în figura 9.2.b.

Pentru a deduce expresiile eforturilor secționale axiale N şi tăietoare T se proiectează forța elementară $dF=pds$ după cele două direcții: normală On respectiv

tangențială *tt'* şi se integrează pe lungimea arcului de cerc având unghiul la centru θ. Pentru a deduce expresia efortului încovoietor M_i se calculează momentul forței elementare $dF=pds$ în raport cu axa normală *On* şi se integrează pe lungimea arcului de cerc (fig.9.2.a). Ținând seama de regula semnelor eforturilor secționale de la barele drepte, se obțin expresiile analitice:

$$\begin{aligned} N(\theta) &= -\int_0^\theta (pRd\alpha)sin(\theta-\alpha) = -pR(1-cos\theta); \\ T(\theta) &= -\int_0^\theta (pRd\alpha)cos(\theta-\alpha) = -pRsin\theta; \\ M(\theta) &= -\int_0^\theta (pRd\alpha)Rsin(\theta-\alpha) = -pR^2(1-cos\theta). \end{aligned} \qquad (9.1)$$

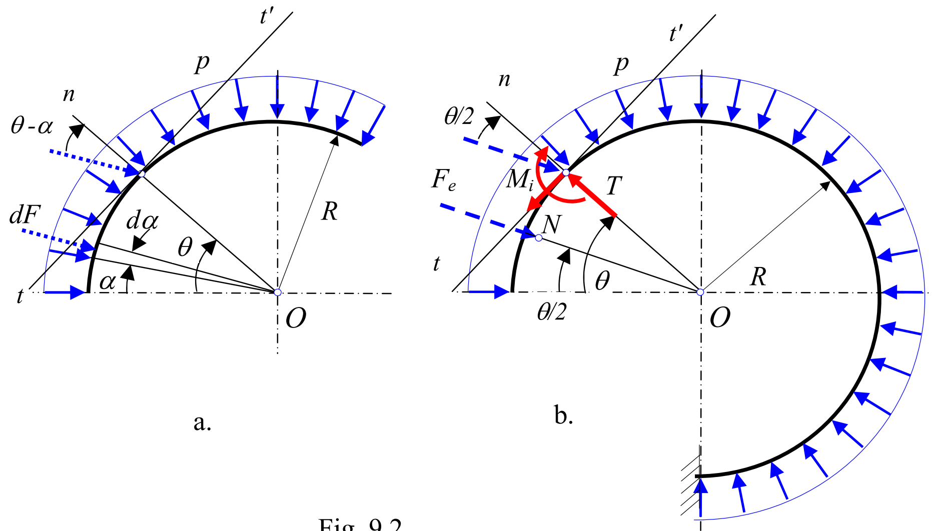


Fig. 9.2

Aceleaşi expresii se obțin pentru eforturile axiale, tăietoare şi încovoietoare, proiectând forța echivalentă F_e corespunzătoare sarcinii uniform distribuită pe arcul de unghi θ, având direcția bisectoarei arcului de cerc şi punctul de aplicație în centrul cercului (fig. 9.2.b). Forța echivalentă F_e are expresia:

$$F_e = \int_0^\theta p\,cos\left(\frac{\theta}{2}-\alpha\right)ds = 2pR\,sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad (9.2)$$

Dacă se proiectează forța echivalentă F_e după cele două direcții: normală *On* respectiv tangențială *tt'* duse în punctul de pe axa barei corespunzătoare secțiunii

curente şi se calculează momentul forței echivalentă F_e în raport față de axa normală On se obțin expresiile analitice :

$$N = -F_e \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = -pR(1-\cos\theta);$$
$$T = -F_e \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = -pR\sin\theta; \qquad (9.3)$$
$$M_i = -F_e R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = -pR^2(1-\cos\theta).$$

Între eforturile secționale N, T şi M_i şi sarcinile exterioare p se pot scrie anumite relații diferențiale.

Fie elementul de lungime $ds=Rd\theta$ corespunzător unghiului θ pe fețele căruia acționează eforturile axiale N, $N+dN$, tăietoare T, $T+dT$ şi încovoietoare M_i , M_i $+dM_i$, ca în figura 9.3.

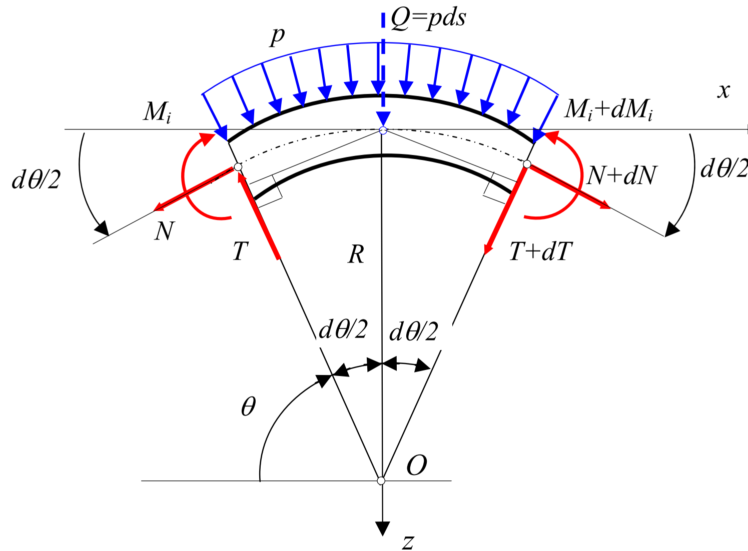


Fig. 9.3

Scriind ecuațiile de echilibru între sarcinile exterioare şi eforturile corespunzătoare celor două fețe ale elementului se obțin ecuațiile:

$$\sum F_x = 0: \qquad (-N+N+dN)\cos\frac{d\theta}{2} - (T+T+dT)\sin\frac{d\theta}{2} = 0$$
$$\sum F_z = 0: \qquad (N+N+dN)\sin\frac{d\theta}{2} + (-T+T+dT)\cos\frac{d\theta}{2} + pds = 0 \qquad (9.4)$$
$$\sum M_{Oy} = 0: \qquad -(T+T+dT)R\sin\frac{d\theta}{2} + (N-N-dN)R\left(1-\cos\frac{d\theta}{2}\right) + dM_i = 0$$

Pentru unghiuri foarte mici se pot face următoarele aproximări:

$$sin\frac{d\theta}{2}\cong\frac{d\theta}{2};\quad cos\frac{d\theta}{2}\cong 1;\quad \left(\frac{d\theta}{2}\right)^2\cong 0 \tag{9.5}$$

şi relaţiile (9.4) devin:

$$dN-Td\theta=0\quad ;\quad Nd\theta+dT+qds=0;\quad dM_i-Tds=0 \tag{9.6}$$

Relaţiile diferenţiale (9.6) dintre eforturile secţionale şi forţele exterioare se mai pot scrie sub forma:

$$\frac{dN}{d\theta}=T\ ;\quad \frac{dT}{d\theta}=-N-pR;\quad \frac{dM_i}{d\theta}=TR \tag{9.7}$$

sau dacă se înlocuieşte $ds=Rd\theta$ se obţin relaţiile:

$$\frac{dN}{ds}=\frac{T}{R}\ ;\quad \frac{dT}{ds}=-\frac{N}{R}-p;\quad \frac{dM_i}{ds}=T \tag{9.8}$$

Observaţii

- Relaţiile (9.7) stau la baza construcţiei *diagramelor* de eforturi secţionale pentru barele curbe în mod similar ca la barele drepte: aceste diagrame se construiesc în *coordonate polare* de o parte şi de alta a axei geometrice a barei respectând aceleaşi reguli ale semnelor ca în cazul barelor drepte: N şi T pozitive în exteriorul axei barei, iar M_i pozitiv spre interiorul axei barei. În dreptul sarcinilor concentrate se determină limitele la stânga şi la dreapta secţiunii ;
- Din relaţiile diferenţiale (9.7) rezultă că valorile extreme locale ale eforturilor *N şi M* se obţin pentru T=0, iar valorile extreme locale ale eforturilor T se obţin pentru $q=0$ şi $N=0$;
- Pentru $R\to\infty$ relaţiile (9.8) devin relaţiile diferenţiale ale barei drepte între eforturile secţionale şi sarcinile exterioare.

Aplicaţia 9.1

Să se determine reacţiunile şi expresiile eforturilor N, T şi M_i pentru bara curbă având axa un semicerc de rază R, încărcată cu sarcina radială uniform distribuită p, fiind legată la mediul fix prin articulaţia A şi reazemul B, ca în figura 9.4.a.

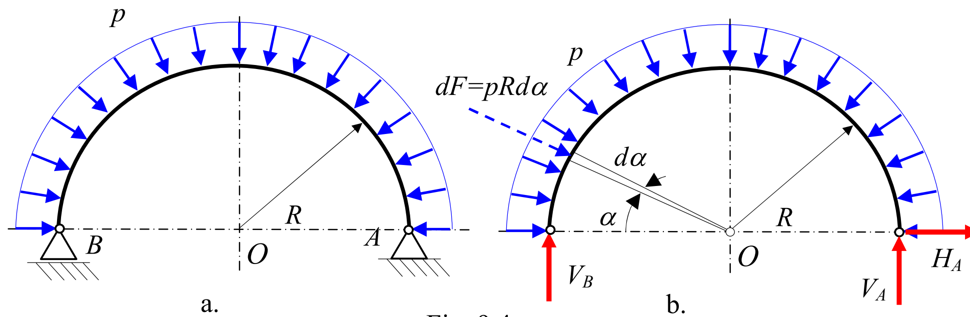


Fig. 9.4

Rezolvare

Aplicând axioma legăturilor se introduc reacțiunile V_B, H_A și V_A în reazemul B și articulația A (fig.9.5) și se scriu ecuațiile de echilibru:

$$\sum F_x = 0: \qquad H_A + \int_0^{\pi} (pRd\alpha)\cos\alpha = 0$$

$$\sum F_y = 0: \qquad V_A + V_B - \int_0^{\pi} (pRd\alpha)\sin\alpha = 0 \qquad (9.9)$$

$$\sum M_{zA} = 0: \qquad V_B \cdot 2R - \int_0^{\pi} (pRd\alpha)R\sin\alpha = 0$$

Efectuând calculele în relațiile (9.9) se obține :

$$H_A = 0; \qquad V_A = V_B = pR \qquad (9.10)$$

Expresiile eforturilor secționale se obțin prin suprapunerea efectului sarcinii uniform distribuite conform relațiilor (9.1) și efectului sarcinii concentrate V_B:

$$N(\theta) = -V_B\cos\theta - pR(1-\cos\theta) = -pR$$

$$T(\theta) = V_B\sin\theta - pR\sin\theta = 0 \qquad (9.11)$$

$$M(\theta) = V_B(1-\cos\theta) - pR^2(1-\cos\theta) = 0$$

Din expresiile (9.11) se observă o proprietate foarte importantă pentru acest caz de încărcare: *eforturile tăietoare și încovoietoare sunt nule* pe toată lungimea barei, ea fiind supusă la compresiune în orice secțiune a sa, efortul axial fiind constant.

Aplicația 9.2

Să se deducă expresiile eforturilor N, T și M_i pentru bara curbă având axa un cerc de rază R, încărcată cu sarcina radială uniform distribuită p, ca în figura 9.5.a și să se determine deformația radială ΔR sub acțiunea acestei sarcini.

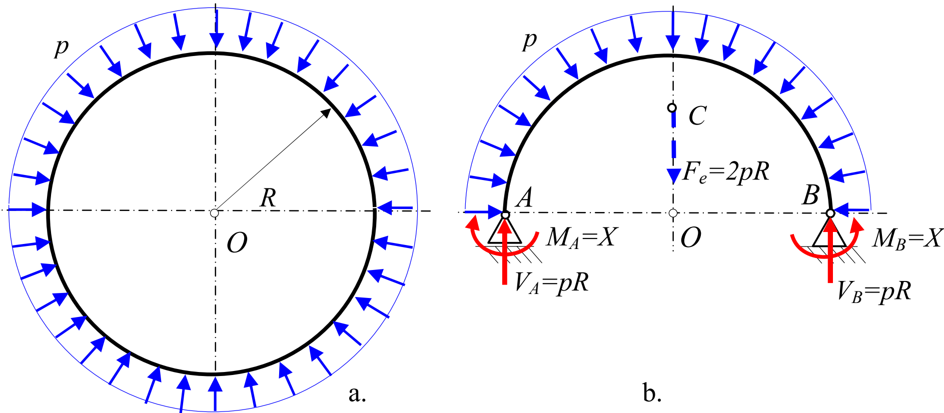


Fig. 9.5

Rezolvare

Sistemul este static nedeterminat simetric, încărcat simetric. Pentru astfel de sisteme eforturile antisimetrice (tăietoare) sunt nule în planul de simetrie. Sistemul de bază se obține prin secționarea cadrului şi introducerea eforturilor static nedeterminate în reazemul *A* şi articulația *B* (fig.9.5.b).

Datorită simetriei barei semicirculare cele două eforturi static nedeterminate (axial *N* şi încovoietor M_i) sunt egale în cele două secțiuni, prin urmare şi reacțiunile corespunzătoare V_A şi V_B sunt egale, iar din ecuația de echilibru a forțelor pe direcție verticală se obține :

$$V_A = V_B = pR \qquad (9.12)$$

Rotirile secțiunilor A şi *B* sunt datorate deformațiilor produse de eforturile axiale şi încovoietoare. Se neglijează deformațiile datorate eforturilor tăietoare.

Metoda eforturilor are la bază un set de ecuații canonice care exprimă faptul că deplasările/rotirile din sistemul de bază trebuie să fie identice cu deplasările/rotirile din sistemul real. Rotirea din sistemul de bază se scrie în acest caz prin suprapunerea efectului sarcinii exterioare *p* şi a efectului efortului static nedeterminat *X* :

$$\delta_1 = \delta_{10} + X\delta_{11} = 0 \qquad (9.13)$$

în care: δ_{10} este deplasarea în sistemul de bază datorită sarcinii *p* ;
δ_{11} este deplasarea în sistemul de bază datorită unui cuplu unitar *m=1*.

$$\begin{aligned} \delta_{10} &= \int_0^{\pi} \frac{M_i m_i}{EI} \cdot Rd\theta + \int_0^{\pi} \frac{Nn}{EA} \cdot Rd\theta \\ \delta_{11} &= \int_0^{\pi} \frac{m_i^2}{EI} Rd\theta + \int_0^{\pi} \frac{n^2}{EA} Rd\theta \end{aligned} \qquad (9.14)$$

Momentul încovoietor şi efortul axial din relațiile (9.14) au expresiile :

$$\begin{aligned} M_i(\theta) &= 0 \\ N(\theta) &= -pR \end{aligned} \qquad (9.15)$$

iar momentul încovoietor şi efortul axial m_i şi n corespunzătoare cuplului unitar *m=1* au expresiile:

$$\begin{aligned} m_i(\theta) &= 1 \\ n(\theta) &= 0 \end{aligned} \qquad (9.16)$$

Înlocuind în expresiile (9.14) se obține :

$$\delta_{10} = 0; \qquad \delta_{11} = \frac{\pi R}{EI} \qquad (9.17)$$

Se obține efortul static nedeterminat :

$$X = 0 \qquad (9.18)$$

Se observă şi în acest caz proprietatea de la problema anterioară : *eforturile tăietoare şi încovoietoare sunt nule* pe toată lungimea barei, ea fiind supusă la compresiune în orice secțiune a sa, efortul axial fiind constant.

Pentru a determina deformația radială a barei se consideră în sistemul de bază o forță unitară pe direcție radială *f =1* ca în figura 9.6.

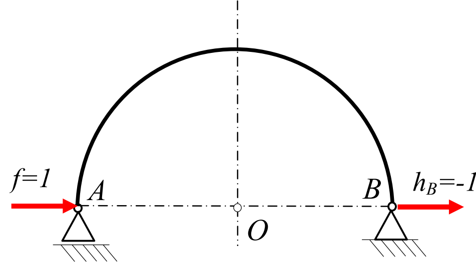


Fig. 9.6

Deplasarea pe direcția forței unitare orizontale se scrie:

$$\delta_{AH} = \int_0^{\pi} \frac{Nn}{EA} R d\theta \tag{9.19}$$

în care expresiile eforturilor axiale sunt :

$$N(\theta) = -pR \qquad n(\theta) = -\sin\theta \tag{9.20}$$

Înlocuind în relația (9.19) se obține :

$$\delta_{AH} = \int_0^{\pi} \frac{pR^2}{EA} \sin\theta d\theta = \frac{2pR^2}{EA} \tag{9.21}$$

Deformația radială a barei este :

$$\Delta R = \frac{1}{2}\delta_{AH} = \frac{pR^2}{EA} \tag{9.22}$$

9.3. Bare curbe încărcate cu sarcini verticale uniform distribuite în planul lor

Pentru a deduce expresiile eforturilor secționale axiale *N* şi tăietoare *T* se proiectează forța elementară *dF=p·ds* după cele două direcții : normală *On* respectiv tangențială *tt'* şi se integrează pe lungimea arcului de cerc având unghiul la centru θ iar pentru a deduce expresia efortului încovoietor M_i se calculează momentul forței elementare *dF=pds* în raport cu axa normală *On* şi se integrează pe lungimea arcului de cerc (fig.9.7.a). Dacă se ține seama de regula semnelor eforturilor secționale stabilită pentru barele drepte, se obțin expresiile :

$$\begin{aligned} N(\theta) &= -\int_0^{\theta} (pRd\alpha)\cos\theta = pR\theta\cos\theta; \\ T(\theta) &= -\int_0^{\theta} (pRd\alpha)\sin\theta = -pR\theta\sin\theta; \\ M(\theta) &= -\int_0^{\theta} (pRd\alpha)(R\cos\alpha - R\cos\theta) = pR^2(\theta\cos\theta - \sin\theta). \end{aligned} \tag{9.23}$$

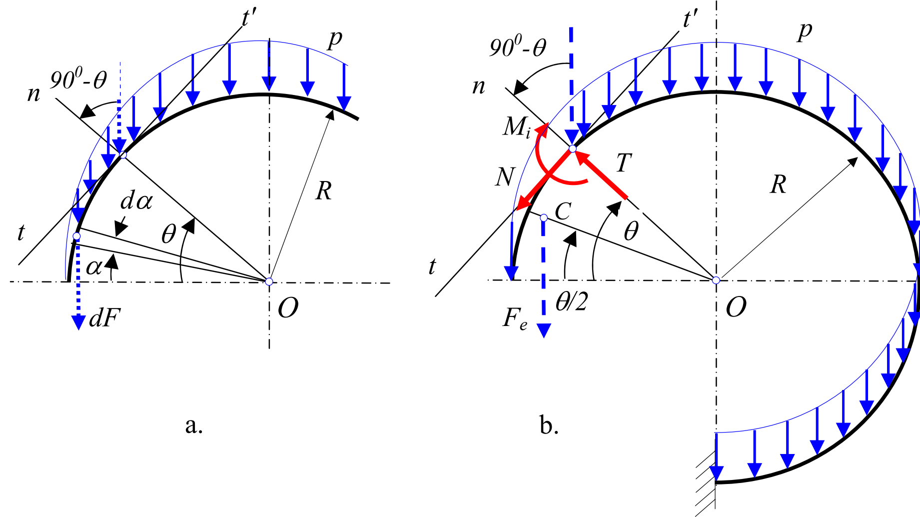


Fig. 9.7

Aceleaşi expresii se obţin pentru eforturile axiale, tăietoare şi încovoietoare proiectând forţa echivalentă F_e corespunzătoare sarcinii uniform distribuită pe arcul de unghi θ , având direcţia verticală şi punctul de aplicaţie în centrul C de greutate al arcului de cerc aflat pe bisectoare la distanţa: $OC = \frac{2R}{\theta} sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (fig.9.7.b).

Forţa echivalentă F_e are expresia:

$$F_e = \int_0^\theta pds = pR\theta \tag{9.24}$$

Dacă se proiectează forţa echivalentă F_e după cele două direcţii: normală On respectiv tangenţială *tt'* duse în punctul de pe axa barei corespunzătoare secţiunii curente şi se calculează momentul forţei echivalentă F_e în raport faţă de axa normală On se obţine :

$$\begin{aligned} &N = F_e \, sin(90 - \theta) = pR\theta \, cos\,\theta; \\ &T = -F_e \, cos(90 - \theta) = -pR\theta \, sin\,\theta; \\ &M_i = -F_e\left[-R\,cos\,\theta + \frac{2R}{\theta} sin\left(\frac{\theta}{2}\right) cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = pR^2(\theta\,cos\,\theta - sin\,\theta); \end{aligned} \tag{9.25}$$

Aplicația 9.3

Să se determine reacțiunile și expresiile eforturilor N, T și M_i pentru bara curbă cu axa circulară de rază R încărcată cu sarcina verticală uniform distribuită p și legată la mediul fix prin articulația A și reazemul B, ca în figura 9.9.

Aplicând axioma legăturilor se introduc reacțiunile V_B, H_A și V_A în locul reazemului B și al articulației A (fig.9.8). Se introduce în centrul forțelor paralele C forța echivalentă:

$$F_e = \int_0^{\pi} pRd\alpha = \pi pR \tag{9.26}$$

Pentru a calcula aceste reacțiuni se scriu ecuațiile de echilibru ale forțelor exterioare și de legătură:

$$\begin{aligned} &\sum F_x = 0: \quad && H_A = 0 \\ &\sum F_y = 0: \quad && V_A + V_B - F_e = 0 \\ &\sum M_{zA} = 0: \quad && V_B \cdot 2R - F_e \cdot R = 0 \end{aligned} \tag{9.27}$$

Efectuând calculele se obține :

$$H_A = 0; \quad V_A = V_B = \frac{\pi}{2} pR \tag{9.28}$$

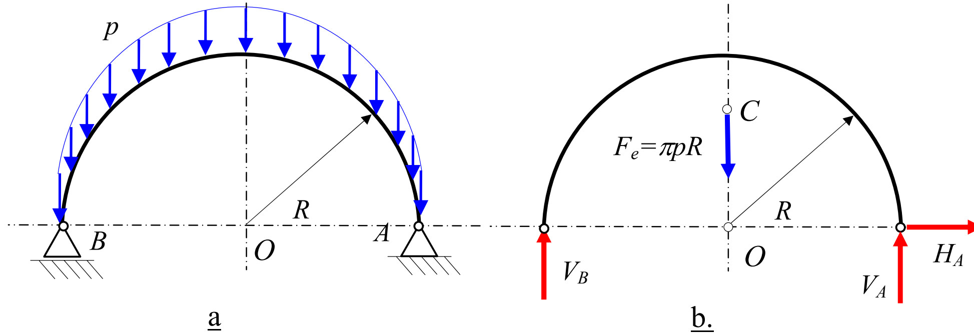


Fig. 9.8

Expresiile eforturilor secționale se scriu prin suprapunerea efectelor pentru sarcina distribuită conform relațiilor (9.10) și pentru sarcina concentrată V_B:

$$\begin{aligned} N(\theta) &= -V_B cos\theta + pR\theta cos\theta = pR\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)cos\theta \\ T(\theta) &= V_B sin\theta - pR\theta sin\theta = -pR\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)sin\theta \\ M(\theta) &= V_B(1 - cos\theta) + pR^2(\theta cos\theta - sin\theta) = pR^2\left(\frac{\pi}{2} + \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)cos\theta - sin\theta\right) \end{aligned} \tag{9.29}$$

Din expresiile (9.29) se observă că în secţiunea corespunzătoare planului de simetrie eforturile axiale şi tăietoare sunt nule iar momentul încovoietor este maxim:

$$N(\pi/2) = T(\pi/2) = 0;$$
$$M(\pi/2) = pR^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right). \tag{9.30}$$

9.4. Bare curbe încărcate cu sarcini orizontale uniform distribuite în planul lor

Se consideră bara curbă având axa geometrică circulară liberă la capătul din stânga şi încastrată în cel din dreapta, încărcată cu sarcini orizontale uniform distribuite p cuprinse în planul barei, ca în figura 9.9.b.

Pentru a deduce expresiile eforturilor secţionale axiale N şi tăietoare T se proiectează forţa elementară $dF=pds$ după două direcţii : normală On respectiv tangenţială tt' şi se integrează pe lungimea arcului de cerc având unghiul la centru θ, iar pentru a deduce expresia efortului încovoietor M_i se calculează momentul forţei elementare $dF=pds$ în raport cu axa normală On şi se integrează pe lungimea arcului de cerc (fig.9.9.a).

Ţinând seama de regula semnelor eforturilor secţionale de la barele drepte, se obţin expresiile :

$$N(\theta) = -\int_0^{\theta}(pRd\alpha)\sin\theta = -pR\theta\sin\theta;$$
$$T(\theta) = -\int_0^{\theta}(pRd\alpha)\cos\theta = -pR\theta\cos\theta; \tag{9.31}$$
$$M(\theta) = -\int_0^{\theta}(pRd\alpha)(R\sin\theta - R\sin\alpha) = -pR^2(\theta\sin\theta + \cos\theta - 1).$$

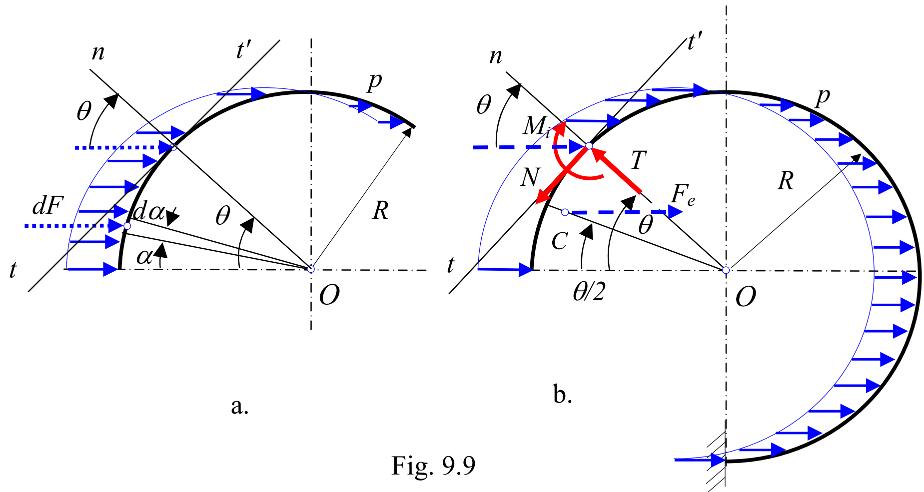


Fig. 9.9

Aceleaşi expresii se obțin pentru eforturile axiale, tăietoare şi încovoietoare, proiectând forța echivalentă F_e corespunzătoare sarcinii uniform distribuită pe arcul de unghi θ, având direcția orizontală şi punctul de aplicație în centrul C de greutate al arcului de cerc aflat pe bisectoare la distanța: $OC = \frac{2R}{\theta} sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (fig.9.9.b).

Forța echivalentă F_e are expresia:

$$F_e = \int_0^\theta pds = pR\theta \tag{9.32}$$

Dacă se proiectează forța echivalentă F_e după cele două direcții: normală On respectiv tangențială tt' duse în punctul de pe axa barei corespunzătoare secțiunii curente şi se calculează momentul forței echivalente F_e în raport față de axa normală On se obține :

$$\begin{aligned} &N = -F_e sin\theta = -pR\theta sin\theta; \\ &T = -F_e cos\theta = -pR\theta cos\theta; \\ &M_i = -F_e\left[R sin\theta - \frac{2R}{\theta} sin\left(\frac{\theta}{2}\right) sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = -pR^2(cos\theta + \theta sin\theta - 1); \end{aligned} \tag{9.33}$$

Aplicația 9.4

Să se determine reacțiunile şi expresiile eforturilor N, T şi M_i pentru bara curbă semicirculară de rază R încărcată cu sarcina verticală uniform distribuită p şi legată la mediul fix prin articulația A şi reazemul B, ca în figura 9.10.

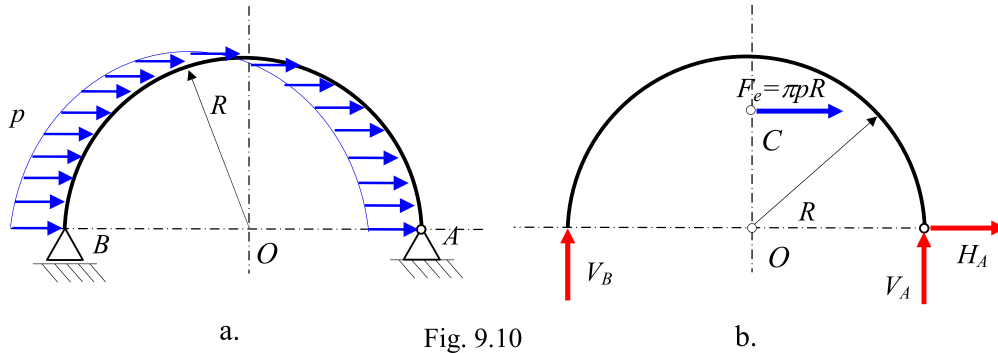


Fig. 9.10

Se introduce forța echivalentă F_e în centrul forțelor paralele C:

$$F_e = \int_0^\pi pRd\alpha = \pi pR \ ; \quad OC = \frac{2R}{\pi} \tag{9.34}$$

Aplicând axioma legăturilor se introduc reacțiunile V_B, H_A şi V_A în reazemul B şi articulația A (fig.9.10.b) şi se scriu ecuațiile de echilibru:

$$\begin{aligned}
&\sum F_x = 0: \quad H_A + F_e = 0 \\
&\sum F_y = 0: \quad V_A + V_B = 0 \\
&\sum M_{zA} = 0: \quad V_B \cdot 2R + F_e \cdot \frac{2R}{\pi} = 0
\end{aligned} \tag{9.35}$$

Efectuând calculele în relațiile (9.35) se obține :

$$H_A = -\pi pR; \quad V_B = -pR; \quad V_A = pR \tag{9.36}$$

Expresiile eforturilor secționale se scriu prin suprapunerea efectelor pentru sarcina distribuită conform relațiilor (9.31) şi pentru sarcina concentrată V_B:

$$\begin{aligned}
&N(\theta) = -V_B\cos\theta - pR\theta\sin\theta = pR(\cos\theta - \theta\sin\theta) \\
&T(\theta) = V_B\sin\theta - pR\theta\cos\theta = -pR(\sin\theta + \theta\cos\theta) \\
&M(\theta) = V_B(1-\cos\theta) - pR^2(\cos\theta + \theta\sin\theta - 1) = -pR^2\sin\theta
\end{aligned} \tag{9.37}$$

Se observă că efortul încovoietor este maxim în planul de simetrie:

$$M\left(\frac{\pi}{2}\right) = -pR^2 \tag{9.38}$$

9.5. Bare curbe încărcate cu sarcini tangențiale uniform distribuite în planul lor

Se consideră bara curbă având axa geometrică circulară liberă la capătul din stânga şi încastrată în cel din dreapta, încărcată cu sarcini tangențiale uniform distribuite p cuprinse în planul barei, ca în figura 9.11.b.

Pentru a deduce expresiile eforturilor secționale axiale N şi tăietoare T se proiectează forța elementară $dF=pds$ după cele două direcții : normală On respectiv tangențială tt'şi se integrează pe lungimea arcului de cerc având unghiul la centru θ iar pentru a deduce expresia efortului încovoietor M_i se calculează momentul forței elementare $dF=pds$ în raport cu axa normală On şi se integrează pe lungimea arcului de cerc (fig.9.11.a).

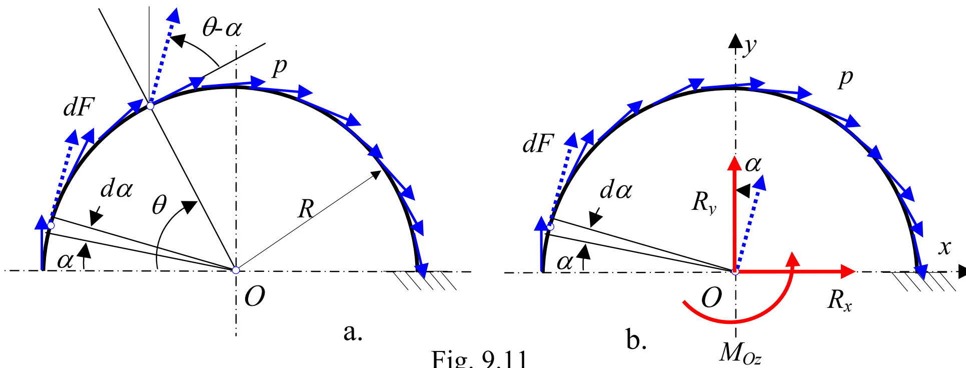


Fig. 9.11

Dacă se ține seama de regula semnelor eforturilor secționale stabilită pentru barele drepte, se obțin expresiile :

$$N(\theta) = -\int_0^\theta (pRd\alpha)cos(\theta - \alpha) = -pRsin\theta;$$
$$T(\theta) = \int_0^\theta (pRd\alpha)sin(\theta - \alpha) = pR(1 - cos\theta); \qquad (9.39)$$
$$M(\theta) = -\int_0^\theta (pRd\alpha)(R - Rcos(\theta - \alpha)) = pR^2(\theta - sin\theta).$$

Prin reducerea sarcinilor uniform distribuite pe lungimea arcului de cerc de unghi θ în centrul cercului O se obține torsorul de reducere (fig.9.11.b):

$$R_x(\theta) = \int_0^\theta (pRd\alpha)sin\alpha = pR(1 - cos\theta);$$
$$R_y(\theta) = \int_0^\theta (pRd\alpha)cos\alpha = pRsin\theta; \qquad (9.40)$$
$$M_{Oz}(\theta) = -\int_0^\theta (pRd\alpha)R = -pR^2\theta$$

Cu ajutorul torsorului de reducere având componentele (9.40) se determină reacțiunile, apoi cu ajutorul expresiilor eforturilor (9.39) prin suprapunerea efectelor se scriu expresiile eforturilor pentru fiecare caz particular de solicitare .

Aplicația 9.5

Să se determine reacțiunile și să se deducă expresiile eforturilor *N, T* și M_i pentru bara curbă cu axa circulară de rază *R* încărcată cu sarcina tangențială uniform distribuită *p* și legată la mediul fix prin articulația *A* și reazemul *B*, ca în figura 9.12.

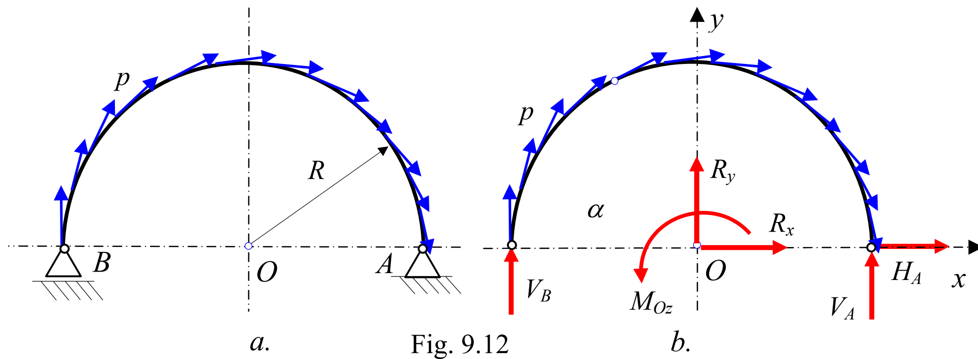


Fig. 9.12

Aplicând axioma legăturilor, se introduc reacţiunile V_B, H_A şi V_A în reazemul B şi articulaţia A (fig.9.12.b) şi se scriu ecuaţiile de echilibru dintre elementele torsorului forţelor exterioare şi reacţiuni:

$$\begin{aligned} &\sum F_x = 0: \quad H_A + R_x = 0 \\ &\sum F_y = 0: \quad V_A + V_B + R_y = 0 \\ &\sum M_{zA} = 0: \quad -V_B \cdot R + V_A \cdot R + M_{Oz} = 0 \end{aligned} \tag{9.41}$$

în care elementele torsorului sarcinii uniform distribuite are expresia :

$$\begin{aligned} &R_x = pR(1 - cos\pi) = 2pR \\ &R_y = pRsin\pi = 0 \\ &M_{Oz} = -\pi pR^2 \end{aligned} \tag{9.42}$$

Introducând în ecuaţiile (9.41) se obţin reacţiunile :

$$H_A = -2pR; \quad V_B = -\frac{\pi}{2}pR; \quad V_A = \frac{\pi}{2}pR \tag{9.43}$$

Expresiile eforturilor secţionale se scriu prin suprapunerea efectului sarcinii tangenţiale uniform distribuită conform relaţiilor (9.39) şi efectului sarcinii V_B:

$$\begin{aligned} &N(\theta) = -V_B cos\theta - pRsin\theta = pR\left(\frac{\pi}{2}cos\theta - sin\theta\right) \\ &T(\theta) = V_B sin\theta + pR(1 - cos\theta) = pR\left(-\frac{\pi}{2}sin\theta + 1 - cos\theta\right) \\ &M(\theta) = V_B(1 - cos\theta) + pR^2(\theta - sin\theta) = pR^2\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}cos\theta + \theta - sin\theta\right) \end{aligned} \tag{9.44}$$

9.6. Bare curbe încărcate cu sarcini verticale uniform distribuite perpendiculare pe planul lor

Se consideră bara curbă având axa geometrică circulară încărcată cu sarcini uniform distribuite verticale perpendiculare pe planul barei, liberă la capătul din stânga şi încastrată în cel din dreapta, ca în figura 9.13.b.

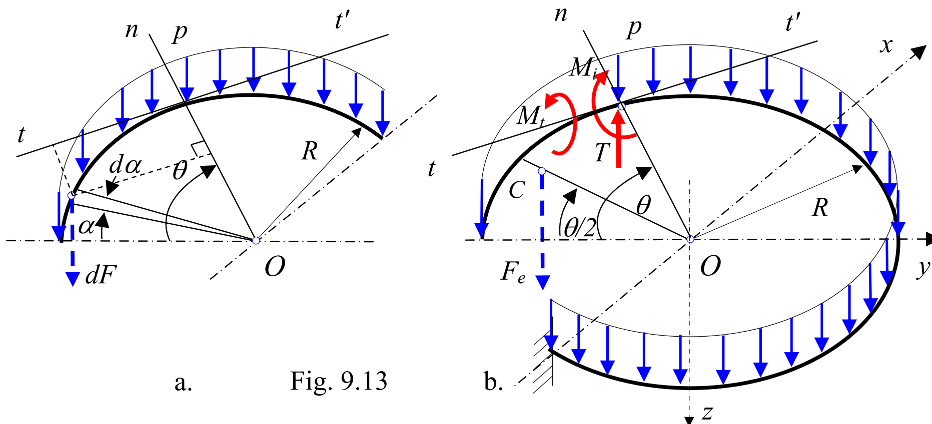


Fig. 9.13

Pentru a deduce expresiile eforturilor încovoietoare M_i şi de torsiune M_t se calculează momentul forței elementare $dF=pds$ în raport cu axa normală *On* respectiv în raport cu axa tangențială *tt'* şi se integrează pe lungimea arcului de cerc (fig.9.13.a). Dacă se ține seama de regula semnelor eforturilor secționale stabilită pentru barele drepte, se obțin expresiile :

$$T(\theta) = -\int_0^\theta (pRd\alpha) = -pR\theta;$$

$$M_i(\theta) = -\int_0^\theta (pRd\alpha)R\sin(\theta-\alpha) = -pR^2(1-\cos\theta); \qquad (9.45)$$

$$M_i(\theta) = -\int_0^\theta (pRd\alpha)R[1-\cos(\theta-\alpha)] = -pR^2(\theta-\sin\theta).$$

Sensul pozitiv al eforturilor secționale este opus sensului axelor de coordonate *Oxyz* conform regulii burghiului drept (fig. 9.13.b) şi este valabil şi pentru cele două direcții normală şi tangențială ale secțiunii curente.

Aceleaşi expresii se obțin pentru eforturile încovoietoare şi torsionale proiectând forța echivalentă F_e corespunzătoare sarcinii uniform distribuită pe arcul de unghi θ având direcția verticală şi punctul de aplicație în centrul *C* de greutate al arcului de cerc aflat pe bisectoare la distanța: $OC = \frac{2R}{\theta}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (fig.9.13.b).

Forța echivalentă F_e are expresia:

$$F_e = \int_0^\theta pds = pR\theta \qquad (9.46)$$

Dacă se proiectează forța echivalentă F_e după cele două direcții: normală *On* respectiv tangențială *tt'* duse în punctul de pe axa barei corespunzătoare secțiunii curente şi se calculează momentul forței echivalente F_e în raport față de axa normală *On* se obțin aceleaşi expresii ale eforturilor :

$$T = -F_e = -pR\theta;$$

$$M_i = -F_e\left[\frac{2R}{\theta}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = -pR^2(1-\cos\theta); \qquad (9.47)$$

$$M_t = -F_e\left[R - \frac{2R}{\theta}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] = -pR^2(\theta-\sin\theta).$$

Aplicația 9.6

Să se determine reacțiunile şi expresiile eforturilor T, M_i şi M_t pentru bara curbă cu axa circulară de rază R şi secțiunea circulară de diametru d, încărcată cu sarcina uniform distribuită verticală p perpendiculară pe planul ei, legată la mediul fix prin încastrarea A şi reazemul simplu B, ca în figura 9.14.a.

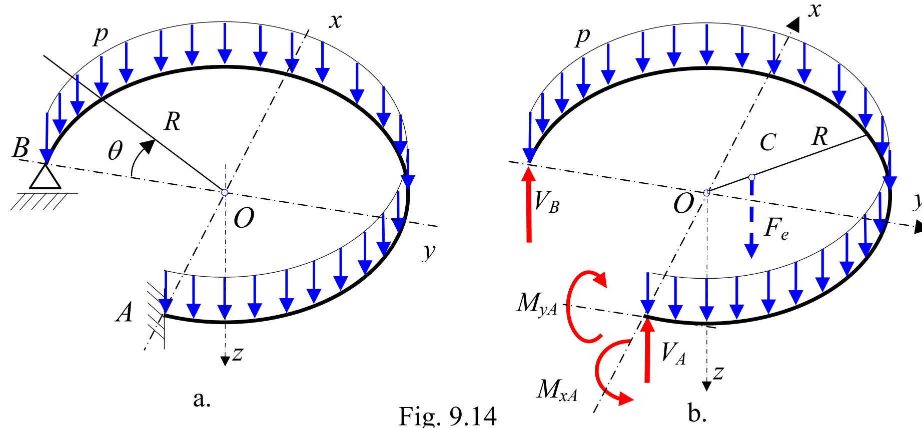


Fig. 9.14

Aplicând axioma legăturilor se introduc reacțiunile V_B, V_A, M_{yA} şi M_{xA} în locul reazemului B şi al încastrării A. Reacțiunile M_{xA} , M_{yA} şi V_A au sens opus sensului axelor Ox, Oy şi respectiv Oz (fig.9.14.b).

Ecuațiile de echilibru ale forțelor exterioare şi de legătură se scriu:

$$\sum F_z = 0: \qquad -V_A - V_B + F_e = 0$$

$$\sum M_{Ax} = 0: \qquad -M_{xA} + V_B \cdot R + F_e \cdot R\left(\frac{2}{3\pi}\right) = 0 \qquad (9.48)$$

$$\sum M_{Ay} = 0: \qquad -M_{yA} - V_B \cdot R - F_e \cdot R\left(1 + \frac{2}{3\pi}\right) = 0$$

în care forța echivalentă F_e are expresia : $F_e = \dfrac{3\pi}{2} pR$ (9.49)

Se observă din relațiile (9.48) că numărul necunoscutelor este mai mare decât numărul de ecuații independente, deci sistemul este *static nedeterminat* şi se rezolvă prin *metoda eforturilor*.

Se alege *sistemul de bază* sistemul static determinat obținut prin eliminarea reazemului B şi introducerea necunoscutei static nedeterminate X_1 ca în figura 9.15. Metoda eforturilor are la bază un set de ecuații canonice care exprimă faptul că deplasările din sistemul de bază trebuie să fie identice cu deplasările din sistemul real.

Deplasarea pe direcție verticală a secțiunii B din sistemul de bază este datorată în principal deformațiilor produse de eforturile de încovoiere şi răsucire. Se neglijează deformațiile datorate eforturilor tăietoare.

Această deplasare trebuie să fie identică cu cea din sistemul real, adică nulă şi se scrie prin suprapunerea efectului sarcinii exterioare p şi a efectului efortului static nedeterminat X_1 :

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1\delta_{11} = 0 \tag{9.50}$$

în care: δ_{10} este deplasarea în sistemul de bază datorită sarcinii p (fig.9.15) ;
δ_{11} este deplasarea în sistemul de bază datorită unei forțe unitare $f=1$ (fig.9.16) ;

$$\delta_{10} = \int_0^{3\pi/2} \frac{M_i m_i}{EI} R d\alpha + \int_0^{3\pi/2} \frac{M_t m_t}{GI_p} R d\alpha$$
$$\delta_{11} = \int_0^{3\pi/2} \frac{m_i^2}{EI} R d\alpha + \int_0^{3\pi/2} \frac{m_t^2}{GI_p} R d\alpha \tag{9.51}$$

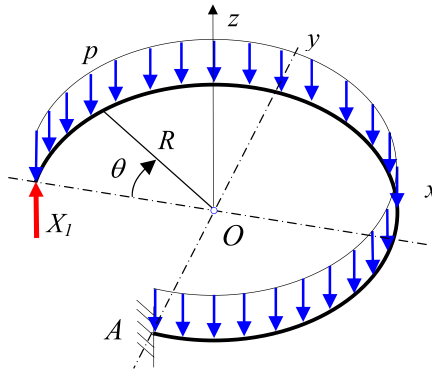


Fig. 9.15

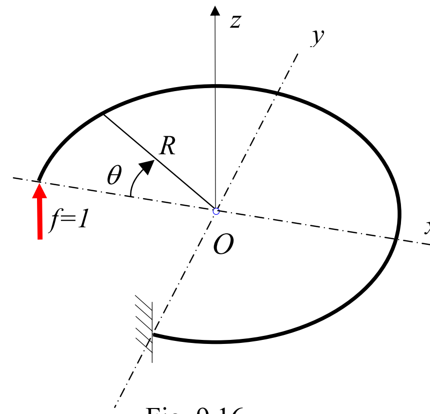


Fig. 9.16

Momentele încovoietoare şi de răsucire din relațiile (9.45) au expresiile :

$$M_i(\theta) = -pR^2(1-\cos\theta)$$
$$M_t(\theta) = -pR^2(\theta-\sin\theta) \tag{9.52}$$

iar momentele încovoietoare m_i , m_t corespunzătoare sarcinii $f=1$ au expresiile:

$$m_i(\theta) = R\sin\theta$$
$$m_t(\theta) = R(1-\cos\theta) \tag{9.53}$$

Înlocuind în relațiile (9.51) şi ținând seama că pentru o secțiune circulară avem relația:

$$GI_p = \frac{1}{1{,}3} EI \tag{9.54}$$

se obține:

$$\delta_{10} = \int_0^{3\pi/2} \frac{M_i m_i}{EI} R d\theta + \int_0^{3\pi/2} \frac{M_t m_t}{GI_p} R d\theta = -21{,}71\frac{pR^4}{EI}$$
$$\delta_{11} = \int_0^{3\pi/2} \frac{m_i^2}{EI} R d\theta + \int_0^{3\pi/2} \frac{m_t^2}{GI_p} R d\theta = 14{,}145\frac{R^3}{EI} \tag{9.55}$$

Înlocuind în relația (9.50) rezultă necunoscuta static nedeterminată :

$$X_1 = 1{,}535\ pR \tag{9.56}$$

Ținând seama că: $V_B = X_1 = 1{,}535\ pR$, din relațiile (9.48) rezultă reacțiunile:

$$V_A = -V_B + F_e = 3{,}177\ pR$$

$$M_{xA} = V_B \cdot R + F_e \cdot R\left(\frac{2}{3\pi}\right) = 2{,}535\ pR^2 \tag{9.57}$$

$$M_{yA} = -V_B \cdot R - F_e \cdot R\left(1 + \frac{2}{3\pi}\right) = -4{,}177\ pR^2$$

Expresiile analitice ale eforturilor secționale se scriu prin suprapunerea efectului sarcinii uniform distribuite p şi a sarcinii V_B:

$$T = V_B - pR\theta = (1{,}535 - \theta)pR;$$

$$M_i = V_B R sin\theta - pR^2(1 - cos\theta) = pR^2(1{,}535 sin\theta + cos\theta - 1); \tag{9.58}$$

$$M_t = V_B R(1 - cos\theta) - pR^2(\theta - sin\theta) = pR^2(1{,}535 - 1{,}535 cos\theta - \theta + sin\theta).$$

Valorile eforturilor tăietoare, încovoietoare şi torsionale în secțiunea de capăt A se obțin din relațiile (9.58) în care $\theta = \frac{3\pi}{2}$:

$$T_A = (1{,}535 - \theta)pR = -3{,}177 pR$$

$$M_{iA} = pR^2(1{,}535 sin\theta + cos\theta - 1) = -2{,}535 pR^2 \tag{9.59}$$

$$M_{tA} = pR^2(1{,}535 - 1{,}535 cos\theta - \theta + sin\theta) = -4{,}177 pR^2$$

Din relațiile (9.59) se observă că eforturile din încastrare sunt egale cu reacțiunile cu semn schimbat cu excepția efortului torsional:

$$T_A = -3{,}177 pR = -V_A$$

$$M_{iA} = -2{,}535 pR^2 = -M_{xA} \tag{9.60}$$

$$M_{tA} = -4{,}177 pR^2 = M_{yA}$$

9.7. Tensiuni normale la încovoierea barelor curbe

Eforturile secționale N, T şi M_i produc în barele curbe circulare aceleaşi tipuri de tensiuni ca şi la bara dreaptă. Astfel:

- eforturile axiale N produc tensiuni normale:

$$\sigma = N / A \tag{9.61}$$

- eforturile tăietoare T produc tensiuni tangențiale *(JURAVKI):*

$$\tau = \frac{T \cdot S^*}{b \cdot I} \tag{9.62}$$

- eforturile încovoietoare M_i produc tensiuni normale *(NAVIER)* pentru cazul sarcinilor perpendiculare pe planul axei barei :

$$\sigma = \frac{M_i}{I} z \tag{9.63}$$

Pentru cazurile în care sarcinile sunt cuprinse în planul axei barei eforturile încovoietoare M_i produc tensiuni normale care nu se mai pot determina cu formula lui *NAVIER*.

Pentru deducerea acestor expresii se fac următoarele ipoteze simplificatoare:

1. materialul respectă legea lui *HOOKE;*
2. ipoteza secțiunii plane *BERNOULLI;*
3. planul axei geometrice al barei conține o axă de simetrie a secțiunii barei sau este un plan central principal și forțele/cuplurile de forțe acționează în acest plan.
4. deformațiile barei sunt mici în raport cu dimensiunile ei.

Se consideră un element din această bară de lungime $ds=Rd\theta$ delimitat de două plane perpendiculare pe axa geometrică a barei care trec prin punctele C și C' corespunzătoare unghiurilor θ și $\theta+d\theta$. Pe fețele acestui element acționează numai eforturile încovoietoare M_{iy} ca în figura 9.19, bara fiind supusă la încovoiere pură.

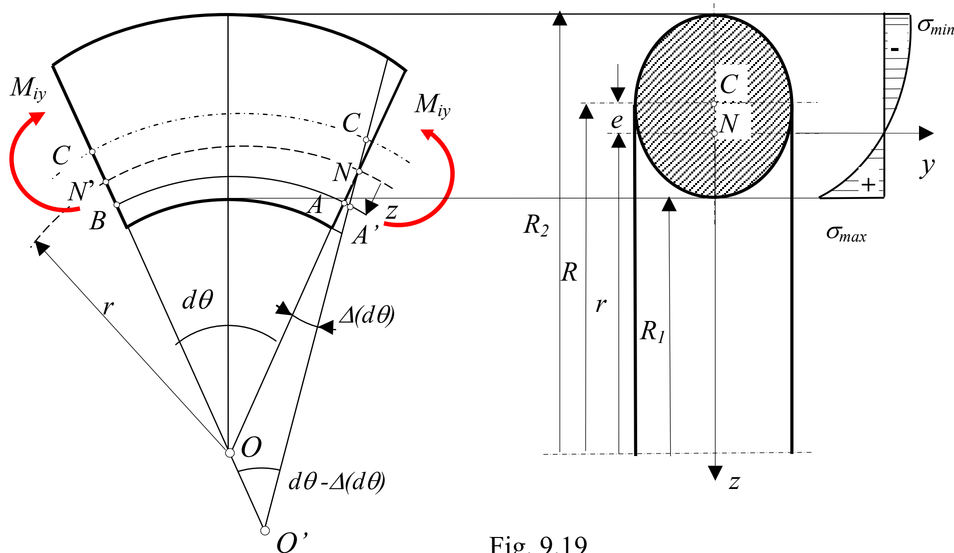


Fig. 9.19

Se notează:

- R raza axei geometrice corespunzătoare centrelor de greutate ale secțiunilor;
- r raza cercului axei neutre a secțiunii barei corespunzătoare unor tensiuni nule, diferită de axa geometrică a barei;
- $e = R - r$ excentricitatea sau distanța de la centrul de greutate secțiunii la axa neutră a suprafeței;
- $R_1 = R + d/2;$ $R_2 = R - d/2;$ razele interioară respectiv exterioară secțiunii;
- AB o fibră circulară a elementului de bară situată la distanța z față de axa neutră a barei.

Sub acțiunea momentului încovoietor M_{iy}, elementul de bară se deformează astfel încât fibra *BA* se lungeşte devenind *BA'* , unghiul $d\theta$ micşorându-se cu $\Delta(d\theta)$ ca în figura 9.17. Lungimea fibrei nedeformate *BA* se scrie:

$$AB=(r-z)\, d\theta \tag{9.64}$$

Deformația fibrei *AB* scrie: $\Delta(AB) = A'B - AB = z\Delta(d\theta)$ (9.65)

Deformația specifică a elementului *AB* se scrie:

$$\varepsilon = \frac{\Delta(ds)}{ds} = \frac{z}{r-z}\frac{\Delta(d\theta)}{d\theta} \tag{9.66}$$

Conform legii lui *HOOKE* în fibra AB ia naştere o tensiune normală σ proporțională cu deformația specifică ε:

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{\Delta(ds)}{ds} = \frac{E\cdot\Delta(d\theta)}{d\theta}\cdot\frac{z}{r-z} = E\Omega\cdot\frac{z}{r-z} \tag{9.67}$$

unde $\Omega = \dfrac{\Delta(d\theta)}{d\theta}$ reprezintă rotirea specifică a celor două secțiuni.

Din expresia (9.67) se observă că tensiunile normale la încovoiere au o lege hiperbolică de variație pe suprafața secțiunii .

Întrucât prin ipoteză efortul axial *N* este nul se poate scrie relația:

$$N = \int_A \sigma dA = \int_A E\Omega\cdot\frac{z}{r-z}dA = E\Omega\cdot\int_A\frac{z}{r-z}dA = 0 \tag{9.68}$$

Deoarece $E\Omega \neq 0$, din relația (9.68) rezultă:

$$\int_A\frac{z}{r-z}dA = 0 \tag{9.69}$$

Relația (9.69) se utilizează pentru determinarea axei neutre.

Efortul încovoietor M_{iy} este rezultatul însumării momentelor forțelor elementare $dF=\sigma dA$ în raport cu axa neutră *Nz*:

$$M_{iy} = \int_A z\cdot\sigma dA = E\Omega\int_A\frac{z^2}{r-z}dA \tag{9.70}$$

Relația (9.70) se mai scrie:

$$M_{iy} = -E\Omega\left(\int_A zdA + r\int_A\frac{z}{r-z}dA\right) = -E\Omega\int_A zdA = -E\Omega\cdot S^*_{Ny} \tag{9.71}$$

în care: $S^*_{Ny} = -e\cdot A$ este momentul static al secțiunii în raport cu axa *Ny* ;

e - distanța de la axa *Ny* la centrul de greutate *C* al secțiunii;
A - aria secțiunii.

Din relația (9.71) se obține: $E\Omega = \dfrac{M_{iy}}{e\cdot A}$ (9.72)

Înlocuind în relația (9.67) expresia (9.72) a rotirii specifice, se obține *relația pentru calculul tensiunii normale la încovoierea barelor curbe*:

$$\sigma = \frac{M_{iy}}{e\cdot A}\cdot\frac{z}{r-z} \tag{9.73}$$

Din relația (9.73) rezultă că tensiunea normală maximă sau minimă se obține în fibrele extreme (fig. 9.19.b). Pentru un moment încovoietor pozitiv, tensiunea pozitivă (maximă) se obține în fibra interioară (de rază R_1), iar tensiunea negativă (minimă) în fibra exterioară (de rază R_2):

$$\begin{aligned} \sigma_{max} &= \frac{M_{iy}}{e \cdot A} \cdot \frac{z_1}{r - z_1} = \frac{M_{iy}}{e \cdot A} \cdot \frac{r - R_1}{R_1} = \frac{M_{iy}}{e \cdot A} \cdot \frac{d - 2e}{2R - d} \\ \sigma_{min} &= \frac{M_{iy}}{e \cdot A} \cdot \frac{z_2}{r - z_2} = \frac{M_{iy}}{e \cdot A} \cdot \frac{r - R_2}{R_2} = -\frac{M_{iy}}{e \cdot A} \cdot \frac{d + 2e}{2R + d} \end{aligned} \tag{9.74}$$

Observații:

- pentru $M_{iy} > 0$ tensiunea în fibra interioară este în valoare absolută mai mare decât cea în fibra exterioară: $|\sigma_{max}| > |\sigma_{min}|$;
- pentru $M_{iy} < 0$ se schimbă numai semnele tensiunilor date de relațiile (9.58): negative în fibra interioară şi pozitive în fibra exterioară;
- în secțiunea în care valoarea absolută a momentul încovoietor este maximă, tensiunile normale se însumează algebric cu cele datorate eforturilor axiale N;
- eforturile axiale N şi momentele încovoietoare M_{iy} sunt maxime în aceeaşi secțiune.

Pentru a determina poziția axei neutre pentru o *secțiune dreptunghiulară* se foloseşte ecuația (9.69) în care se face schimbarea de variabilă: $z_1 = z + e$ (fig.9.20):

$$\int_A \frac{z_1 - e}{R - z_1} dA = 0 \quad \Leftrightarrow -A + r \int_{-h/2}^{h/2} \frac{b dz_1}{R - z_1} = 0 \tag{9.75}$$

Se obține:
$$r = \frac{h}{ln \dfrac{2R + h}{2R - h}} \tag{9.76}$$

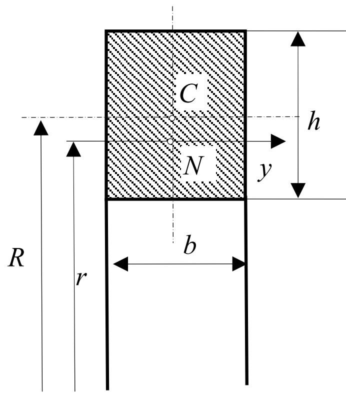


Fig. 9.20

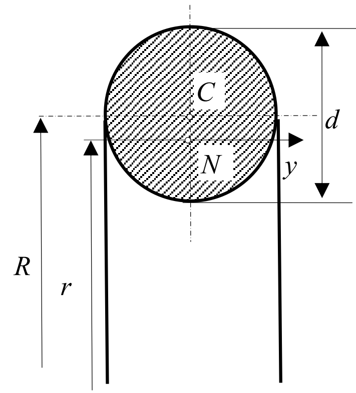


Fig. 9.21

Pentru a determina poziţia axei neutre pentru o *secţiune circulară* (fig.9.21) se foloseşte relaţia:

$$r = \frac{d^2}{8R - 2\sqrt{4R^2 - d^2}} \tag{9.77}$$

Determinarea poziţiei axei neutre pentru *o secţiune oarecare* este dificilă datorită integralei din (9.69) sau dacă se face schimbarea de variabilă $z_1 = z + e$, a integralei din ecuaţia (9.75). Ecuaţia (9.75) se mai poate scrie:

$$\int_A \frac{z_1 - e}{R - z_1} dA = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_A \left(1 - \frac{\frac{r}{R}}{1 - \frac{z_1}{R}} \right) dA = 0 \tag{9.78}$$

Dezvoltând în serie funcţia de sub integrală:

$$\frac{1}{1 - z_1 / R} = 1 + \frac{z_1}{R} + \left(\frac{z_1}{R} \right)^2 + \ldots \tag{9.79}$$

şi reţinând primii trei termeni ai seriei se obţine:

$$\int_A dA - \frac{r}{R} \int_A \left[1 + \frac{z_1}{R} + \left(\frac{z_1}{R} \right)^2 \right] dA = 0 \tag{9.80}$$

Se obţine relaţia aproximativă: $$r = \frac{A \cdot R^3}{I_C + A \cdot R^2} \tag{9.81}$$

9.8. Calculul deplasărilor şi rotirilor la bare curbe

Deplasările şi rotirile în cazul barelor curbe cu axa geometrică circulară se calculează folosind metoda *MOHR MAXWELL*, luând în considerare numai efectul eforturilor de încovoiere, de răsucire şi de întindere-compresiune şi neglijând efectul eforturilor tăietoare. Astfel, deplasarea şi rotirea unei secţiuni oarecare a unei bare cu axa geometrică circulară având rigiditatea la încovoiere răsucire şi întindere-compresiune constantă pe lungimea sa se calculează cu ajutorul relaţiilor:

$$\begin{gathered} \delta = \int \frac{M_i \cdot m_i}{EI} ds + \int \frac{M_t \cdot m_t}{GI_p} ds + \int \frac{N \cdot n}{EA} ds \\ \varphi = \int \frac{M_i \cdot m^*_i}{EI} ds + \int \frac{M_t \cdot m^*_t}{GI_p} ds + \int \frac{N \cdot n^*}{EA} ds \end{gathered} \tag{9.82}$$

în care: M_i este momentul încovoietor, variabil pe lungimea barei;

- m_i momentul încovoietor datorat unei forţe unitare care acţionează în secţiunea respectivă pe direcţia deplasării;
- m^*_i momentul încovoietor datorat unui cuplu de forţe unitar care acţionează în secţiunea respectivă pe direcţia rotirii;
- M_t este momentul torsional, variabil pe lungimea barei;
- m_t momentul torsional datorat unei forţe unitare care acţionează în secţiune pe direcţia deplasării;

- m^*_t momentul torsional datorat unui cuplu unitar care acționează în secțiune pe direcția rotirii;
- N efortul axial, variabil pe lungimea barei;
- n efortul axial datorat unei forțe unitare care acționează în secțiune pe direcția deplasării;
- n^* efortul axial datorat unui cuplu unitar care acționează în secțiune pe direcția rotirii.

Aplicația 9.7

Se consideră bara curbă AB având axa geometrică sub forma unui semicerc de rază R ca în figura 9.22. Asupra capătului liber B al barei acționează un cuplu de forțe $2PR$ şi o forța concentrată $2\sqrt{2}\,P$ înclinată față de axa orizontală cu $\alpha=45^0$.

Să se determine:

1. Reacțiunile din încastrarea A;
2. Diagramele de eforturi axiale, tăietoare şi încovoietoare;
3. Tensiunea normale maxime în secțiunea periculoasă
4. Deplasarea şi rotirea secțiunii B.

dacă valorile parametrilor sunt:
$P=1kN$, $R=1m$, $d=40mm$;
$E=2,1\cdot 10^5 MPa$

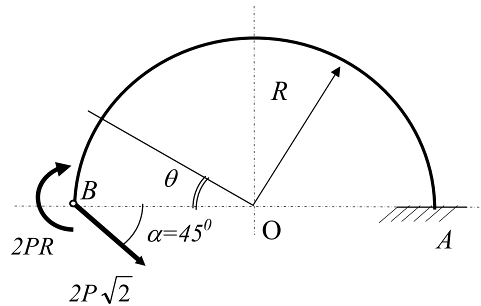


Fig.9.22

Rezolvare

1. Calculul reacțiunilor din încastrarea A

Folosind axioma legăturilor se introduc în încastrarea A reacțiunile H_A, V_A şi M_A (fig.9.23), se scriu ecuațiile de echilibru şi se obțin rezultatele:

$$\begin{aligned}
&\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2P\sqrt{2}\cos\alpha + H_A = 0 \Rightarrow \quad H_A = -2P \\
&\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad -2P\sqrt{2}\sin\alpha + V_A = 0 \Rightarrow \quad V_A = 2P \qquad (9.83) \\
&\sum M_z = 0 \quad \Rightarrow \quad 2P\sqrt{2}\sin\alpha \cdot 2R - 2PR + M_A = 0 \Rightarrow M_A = -2PR
\end{aligned}$$

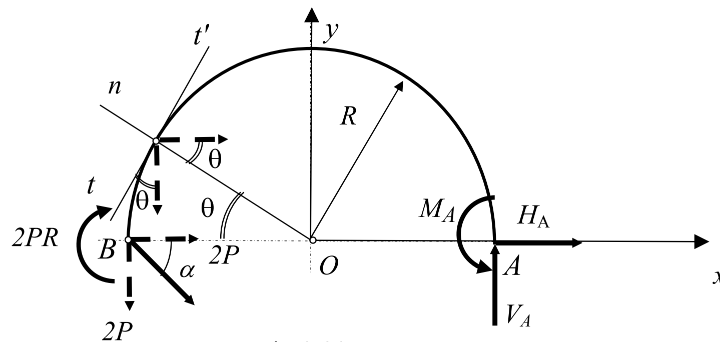


Fig.9.23

2. Construcția diagramelor de eforturi axiale, tăietoare și încovoietoare

Pentru a găsi expresiile și trasa diagramele de eforturi axiale și tăietoare se proiectează forțele exterioare din stânga secțiunii după cele două direcții în secțiunea curentă: normală *On* (pentru eforturile tăietoare) și tangentă la axa geometrică (pentru eforturile axiale). Pentru eforturile încovoietoare se calculează momentele forțelor exterioare în secțiunea curentă. Se obține :

- Pentru eforturile axiale expresia analitică:

$$N(\theta) = -2P\sqrt{2}\cos\alpha \cdot \sin\theta + 2P\sqrt{2}\sin\alpha \cdot \cos\theta$$
$$N(\theta) = 2P(-\sin\theta + \cos\theta) \tag{9.84}$$

- Pentru eforturile tăietoare expresia analitică:

$$T(\theta) = -2P\sqrt{2}\cos\alpha \cdot \cos\theta - 2P\sqrt{2}\sin\alpha \cdot \sin\theta$$
$$T(\theta) = -2P(\cos\theta + \sin\theta) \tag{9.85}$$

- Pentru eforturile încovoietoare expresia analitică:

$$M_i(\theta) = -2P\sqrt{2}\left[\cos\alpha \cdot R\sin\theta + \sin\alpha \cdot R(1-\cos\theta)\right] + 2PR$$
$$M_i(\theta) = 2PR(\cos\theta - \sin\theta) \tag{9.86}$$

Pentru trasarea diagramelor se calculează valorile eforturilor de mai sus în cinci puncte: $\theta=0;\ \theta=\pi/4;\ \theta=\pi/2;\ \theta=3\pi/4$ *și* $\theta=\pi;$ Rezultatele sunt prezentate în tabelul 9.1 iar diagramele de eforturi în figurile 9.24, 9.25 și 9.26.

Tabelul 9.1

Efortul	$\theta=0$	$\theta=\pi/4$	$\theta=\pi/2$	$\theta=3\pi/4$	$\theta=\pi$
N(θ)	*2P*	*0*	*-2P*	$-2\sqrt{2}P$	*-2P*
T(θ)	*-2P*	$-2\sqrt{2}P$	*-2P*	*0*	*2P*
M_i(θ)	*2PR*	*0*	*-2PR*	$-2\sqrt{2}PR$	*-2P*

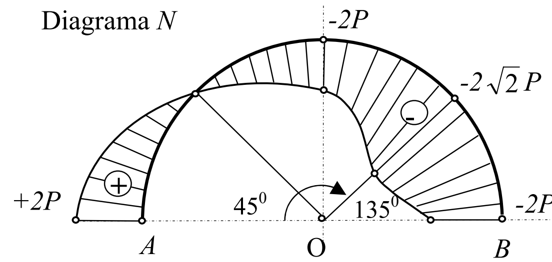


Fig. 9.24

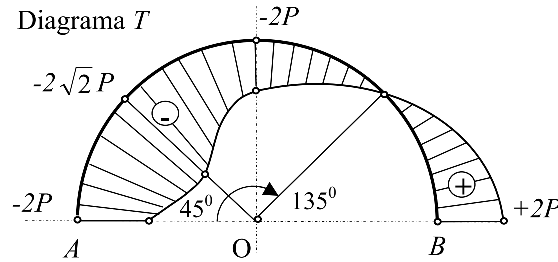


Fig. 9.25

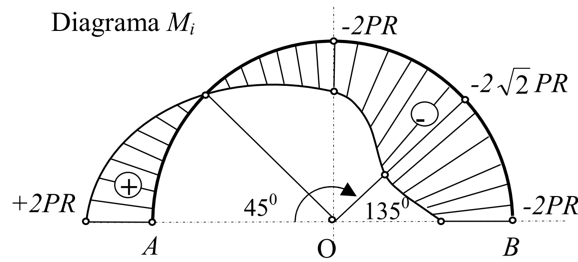


Fig. 9.26

3. *Calculul tensiunii maxime*

Eforturile maxime N şi M_i corespund secțiunii $\theta=3\pi/4$ şi au valorile:

$$N_{max} = |N(3\pi/4)|; \quad M_{i\,max} = |M_i(3\pi/4)| \tag{9.87}$$

Tensiunea maximă se produce în fibra interioară şi are expresia:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} + \frac{M_{i\,max}}{A \cdot e}\frac{d-2e}{2R-d} \tag{9.88}$$

Înlocuind valorile maxime N_{max} şi M_{imax} din secțiunea periculoasă se obține:

$$\sigma_{max} = \frac{8\sqrt{2}P}{\pi d^2} + \frac{8\sqrt{2}PR}{\pi d^2 \cdot e} \cdot \frac{d-2e}{2R-d} \tag{9.89}$$

în care e este distanța dintre cele două axe Cy şi Ny :

$$e = R - \frac{d^2}{4(2R - \sqrt{4R^2 - d^2})} = 1{,}455mm \tag{9.90}$$

4. *Calculul deplasării şi rotirii secţiunii A*

Deplasarea δ_A şi rotirea φ_A corespunzătoare secţiunii A se calculează prin metoda *MOHR-MAXWELL* cu ajutorul relaţiilor:

$$\delta_{HA} = \int \frac{m_{HA} M_{iy}}{EI} ds; \qquad \delta_{VA} = \int \frac{m_{VA} M_{iy}}{EI} ds; \tag{9.91}$$

$$\varphi_A = \int \frac{m_A^* M_{iy}}{EI} ds$$

în care: m_{HA} , m_{VA} şi m^*_A sunt eforturile încovoietoare conform figurii 9.23 produse respectiv de:

- m_{HA} - o forţă unitară orizontală $f_H=1$ aplicată în A;
- m_{VA} - o forţă unitară verticală $f_V=1$ aplicată în A;
- m^*_A - un cuplu unitar aplicat în A.

M_{iy} este efortul încovoietor al sarcinilor exterioare:

$$M(\theta) = 2PR(\cos\theta - \sin\theta) \tag{9.92}$$

EI rigiditatea la încovoiere a barei (constantă)

$ds=Rd\theta$ lungimea elementului de bară: integrarea se face pentru $\theta \in [0, \pi]$

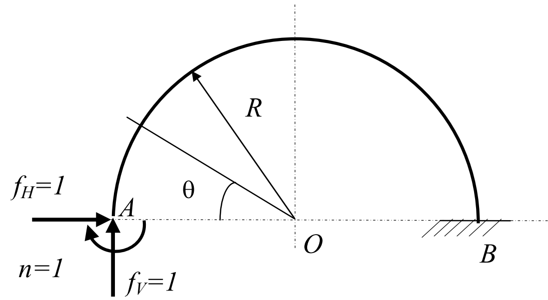


Fig.9.23

Expresiile celor trei momente m_H , m_V şi m_A ca funcţii de θ sunt :

$$m_{HA}(\theta) = -R\sin\theta;$$
$$m_{VA}(\theta) = R(1-\cos\theta); \tag{9.93}$$
$$m_A^*(\theta) = 1$$

Înlocuind în relaţiile (9.91) expresiile (9.92) şi (9.93) rezultă :

- deplasarea pe orizontală:

$$\delta_{HA} = \frac{1}{EI}\int_0^\pi 2PR(-\sin\theta + \cos\theta)(-R\sin\theta)\, Rd\theta$$

$$\delta_{HA} = \frac{2PR^3}{EI}\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\cos 2\theta}{4}\right)\Bigg|_0^\pi \tag{9.94}$$

$$\delta_{HA} = \pi\frac{PR^3}{EI}$$

- deplasarea pe verticală:

$$\delta_{VA} = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi} 2PR(-sin\theta + cos\theta)R(1 - cos\theta)\, Rd\theta$$

$$\delta_{VA} = \frac{2PR^3}{EI}\left(cos\theta - \frac{cos2\theta}{4} + sin\theta - \frac{\theta}{2} - \frac{sin2\theta}{4} \right)\Bigg|_0^{\pi} \qquad (9.95)$$

$$\delta_{VA} = -(4+\pi)\frac{PR^3}{EI}$$

- deplasarea totală a secțiunii *A*:

$$\delta_A = \sqrt{\delta_{HA}^2 + \delta_{VA}^2}$$

$$\delta_A = \frac{PR^3}{EI}\sqrt{\pi^2 + (4+\pi)^2} \qquad (9.96)$$

- rotirea secțiunii *A*:

$$\varphi_A = \frac{1}{EI}\int_0^{\pi} 2PR(-\sin\theta + \cos\theta)\, Rd\theta$$

$$\varphi_A = 4\frac{PR^2}{EI}\ (rad) \qquad (9.97)$$

9.9. Probleme propuse

9.9.1. Se dă sistemul static nedeterminat format din trei bare curbe sudate ca în figura 9.24, având rigiditatea *EI* constantă. Se cere:

1. calculul reacțiunilor și trasarea diagramelor de eforturi *N, T* și M_i.
2. determinarea rotirii nodului *B,* considerând numai efectul încovoierii.

(Concursul Profesional de Rezistența Materialelor, Ploiești 1988).

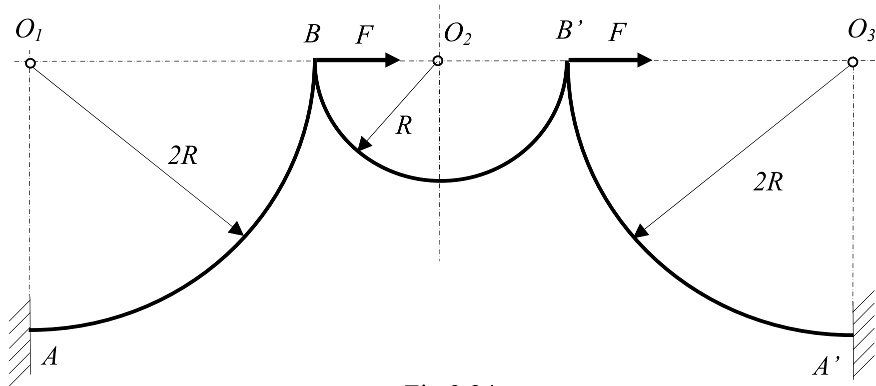


Fig.9.24

9.9.2. Se dă sistemul static nedeterminat format dintr-o bară curbă şi trei bare drepte sudate ca în figura 9.25, având rigiditatea *EI* constantă. Se cere:
1. calculul reacțiunilor şi trasarea diagramelor de eforturi *N, T* şi M_i.
2. determinarea deplasării pe orizontală a punctului *B* considerând numai efectul încovoierii. *(Concursul Profesional de Rezistența Materialelor, Petroşani, 1989).*

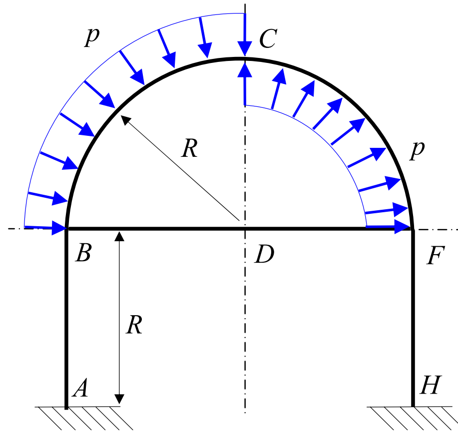


Fig.9.25

9.9.3. Se dă sistemul static nedeterminat format dintr-o bară curbă şi o bară dreaptă sudate şi încărcat ca în figura 9.26, având rigiditatea *EI* constantă. Luând în calcul numai efectul momentului încovoietor, se cere:
1. calculul reacțiunilor şi trasarea diagramelor de eforturi *N, T* şi M_i.
2. determinarea deplasării pe orizontală a punctului *B*.
(Concursul Profesional de Rezistența Materialelor, Cluj-Napoca, 1989).

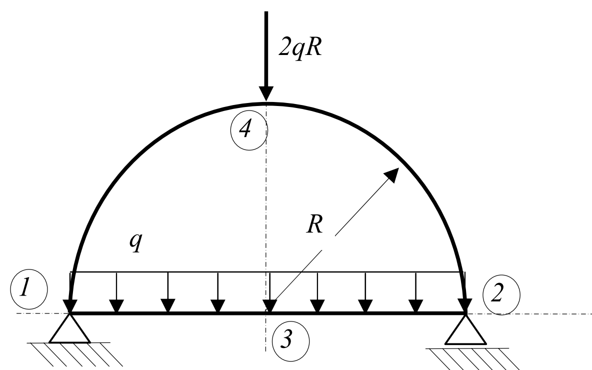


Fig.9.26

9.9.4. Se dă sistemul static nedeterminat format dintr-o bară curbă şi trei bare drepte sudate, rezemat şi încărcat ca în figura 9.27, având rigiditatea EI constantă. Luând în calcul numai efectul momentului încovoietor, se cere:

1. calculul reacțiunilor şi al eforturilor;
2. trasarea diagramelor de eforturi N, T şi M_i .

(Concursul Profesional de Rezistența Materialelor, Cluj-Napoca, 1987).

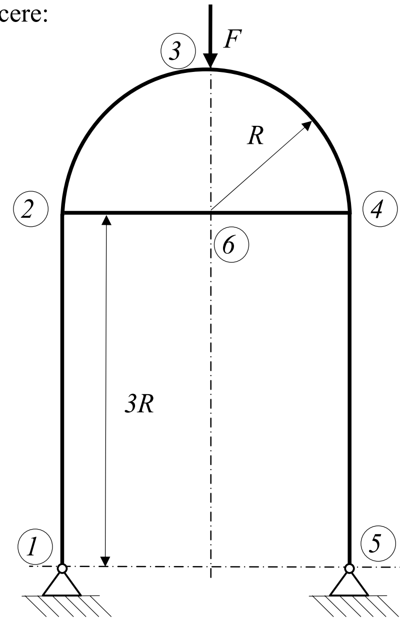


Fig.9.27

9.9.5. Se dă sistemul static nedeterminat format dintr-o bară curbă şi o bară dreaptă sudate, încărcat ca în figura 9.28, având rigiditatea EI constantă. Luând în calcul numai efectul momentului încovoietor, se cere:

1. calculul reacțiunilor şi trasarea diagramelor de eforturi N, T şi M_i.
2. determinarea deplasării pe orizontală a punctului B.

(Concursul Profesional de Rezistența Materialelor, Cluj-Napoca, 1990).

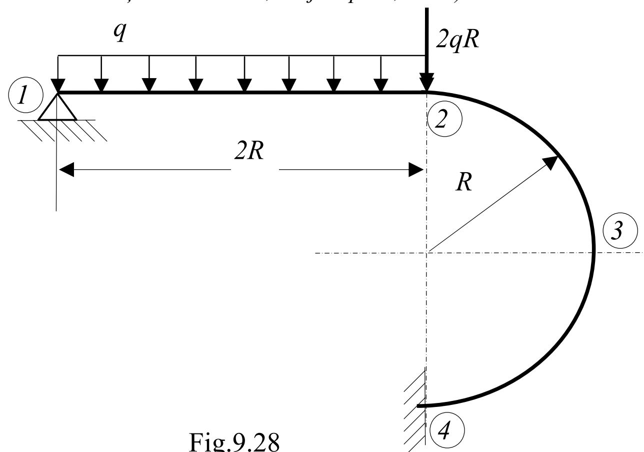


Fig.9.28

9.9.6. Pentru bara metalica din figura 9.29, având rigiditatea constantă. Luând în calcul numai efectul momentului încovoietor, se cere:

a. diagramele de eforturi *N, T* şi M_i

b. deplasarea verticală şi rotirea în *K*.

(Concursul Profesional de Rezistenţa Materialelor C.C. TEODORESCU, Târgu-Mureş, mai 2005).

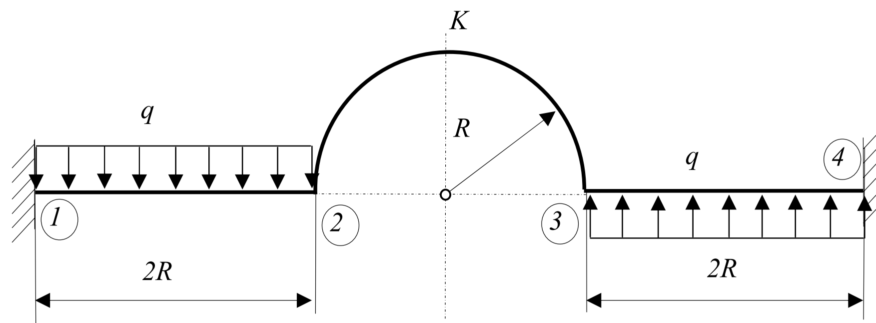


Fig.9.29

10

GRINZI CONTINUE

10.1. Introducere

Grinzile continue sunt *sisteme static nedeterminate* formate din bare drepte situate pe mai multe reazeme rigide sau elastice, libere la capete sau încastrate, cu console sau fără (fig. 10.1). Reazemele rigide sau elastice sunt situate la acelaşi nivel cu axa barei sau denivelate. Aceste sisteme static nedeterminate se rezolvă folosind ecuațiile de deformații ce rezultă din ipoteza de corp deformabil precum şi ecuațiile de echilibru din Mecanica ce rezultă din ipoteza de corp nedeformabil.

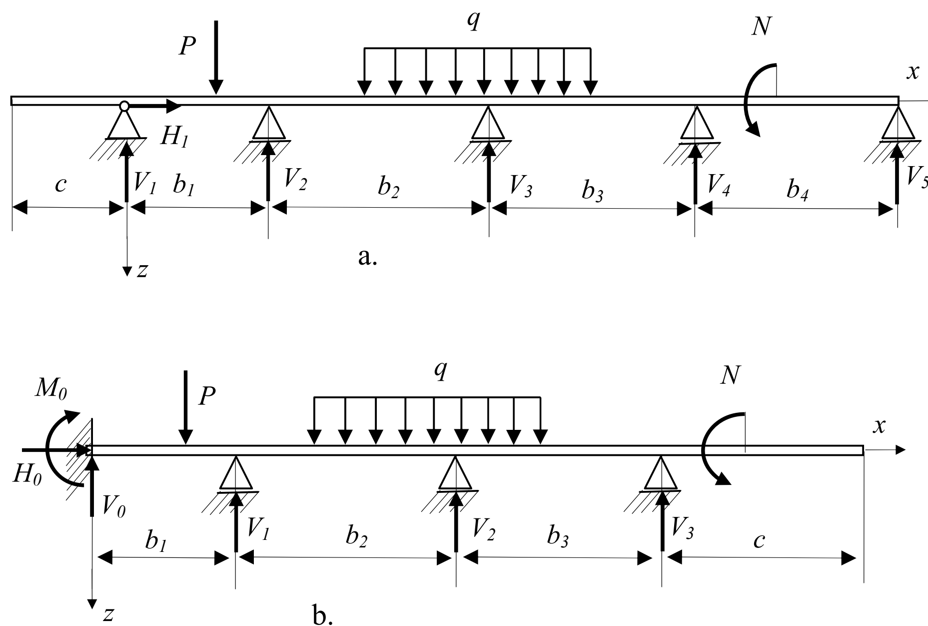


Fig 10.1

În figura 10.1.a este prezentată o grindă continuă situată pe cinci reazeme rigide punctuale la acelaşi nivel cu axa barei , primul reazem fiind şi unul axial. Rezultă şase necunoscute: H_1, V_1, V_2, V_3, V_4, V_5

În figura 10.1.b este prezentată o grindă continuă încastrată la un capăt, situată pe trei reazeme rigide punctuale la acelaşi nivel cu axa barei. Rezultă tot şase necunoscute: M_0, H_0, V_0, V_1, V_2, V_3 .

Ecuațiile de echilibru din Mecanică pentru cazul plan sunt:

$$\sum F_x = 0; \qquad \sum F_z = 0; \qquad \sum M_y = 0; \qquad (10.1)$$

Gradul de nedeterminare al acestui sistem este diferența dintre numărul total al necunoscutelor (*N)* şi numărul de ecuații de echilibru din Mecanică (*E)*:

$$GN = N - E \qquad (10.2)$$

Pentru a putea rezolva acest sistem (a găsi reacţiunile), în afară de ecuaţiile de echilibru (10.1), se scriu un număr de ecuaţii egal cu gradul de nedeterminare *GN* ce reprezintă diferite condiţii de deformare liniare sau unghiulare impuse de legăturile grinzii cu mediul fix.

Din punct de vedere mecanic grinda continuă din figura 10.1.b este echivalentă cu o grindă continuă pe patru reazeme rigide punctuale fixată axial (fig. 10.2) întrucât numărul de necunoscute rămâne acelaşi.

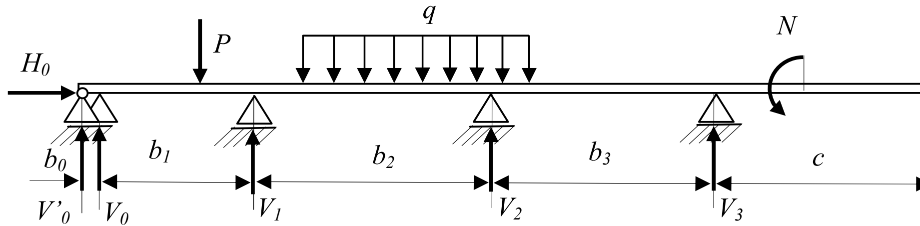


Fig 10.2

Pentru a determina reacţiunile din grinzile continue se folosesc diferite metode analitice sau grafo-analitice, dintre care sunt prezentate în continuare:

- Ecuaţia celor trei momente *(CLAPEYRON);*
- Ecuaţia celor trei săgeţi (*folosind funcţia de încărcare* Ψ).

10.2. Ecuaţia celor trei momente (*CLAPEYRON)*

Metoda celor trei momente este o metodă grafo-analitică ce se bazează pe condiţiile de deformaţii unghiulare pentru două tronsoane concurente într-un reazem *n* obţinându-se în final o ecuaţie între eforturile încovoietoare din trei reazeme consecutive M_{n-1}, M_n şi M_{n+1}, numită ecuaţia lui *CLAPEYRON*.

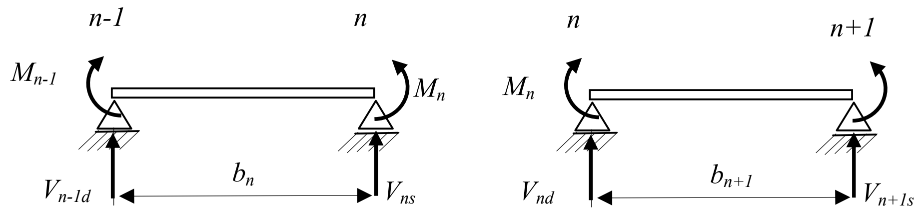


Fig 10.3

Se consideră o grindă continuă situată pe *r* reazeme care se secţionează cu un plan imaginar în reazemul *n* . Făcând abstracţie de reacţiunile orizontale se obţin două reacţiuni necunoscute în reazemul *n,* corespunzătoare celor două două tronsoane de bară cuprinse între reazemele *n-1, n* respectiv *n, n+1* (fig. 10.3):

- momentul încovoietor M_n având același valoare pentru cele două tronsoane concurente în reazemul n;
- reacțiunea V_n formată din reacțiunile V_{ns} și V_{nd} diferite pentru cele două tronsoane concurente în reazemul n:

$$V_n = V_{ns} + V_{nd} \tag{10.3}$$

Considerând cazul general tronsoanele au momentele de inerție I_n și I_{n+1} iar cele trei reazeme sunt denivelate cu w_{n-1}, w_n respectiv w_{n+1} în raport cu axa barei, (fig.10.4), ecuația săgeților lui *MOHR* (6.13) pentru fiecare din cele două tronsoane se scrie astfel:

- pentru tronsonul cuprins între reazemele n și n-1:

$$w_{n-1} = w_n + b_n\varphi'_n - \frac{S_{n-1}}{EI_n} \quad \Rightarrow \quad \varphi'_n = \frac{w_{n-1} - w_n}{b_n} + \frac{S_{n-1}}{E\,b_n I_n} \tag{10.4}$$

- pentru tronsonul cuprins între reazemele n și n+1:

$$w_{n+1} = w_n + b_{n+1}\varphi''_n - \frac{S_{n+1}}{EI_{n+1}} \quad \Rightarrow \quad \varphi'_n = \frac{w_{n+1} - w_n}{b_{n+1}} + \frac{S_{n+1}}{E\,b_{n+1} I_{n+1}} \tag{10.5}$$


Fig 10.4

Ţinând seama de sensurile diferite de parcurgere al barei pentru cele două tronsoane $n\rightarrow$ *n-1* şi $n\rightarrow$ *n+1*, unghiurile de rotire ale secţiunii corespunzătoare reazemului *n* pentru cele două tronsoane sunt egale şi opuse:

$$\varphi'_n = -\varphi''_n \quad sau \quad \varphi'_n + \varphi''_n = 0 \qquad (10.6)$$

Înlocuind relaţiile (10.4) şi (10.5) în relaţia (10.6) se obţine:

$$\frac{w_{n-1} - w_n}{b_n} + \frac{w_{n+1} - w_n}{b_{n+1}} + \frac{S_{n-1}}{E\, b_n I_n} + \frac{S_{n+1}}{E\, b_{n+1} I_{n+1}} = 0 \qquad (10.7)$$

Momentele statice (S_{n-1}, S_{n+1}) din relaţia (10.7) se scriu ca sume dintre momentele statice ale diagramelor de momente pentru sarcinile exterioare (S^s_{n-1}, S^s_{n+1}) şi momentele statice ale momentelor interioare (eforturile) necunoscute (M_{n-1}, M_n, M_{n+1}) faţă de reazemul din stânga (S_{n-1}), respectiv faţă de reazemul din dreapta (S_{n+1}) (fig. 10.4):

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= S^s_{n-1} + \frac{1}{2} M_{n-1} b_n \cdot \frac{b_n}{3} + \frac{1}{2} M_n b_n \cdot \frac{2b_n}{3} \\ S_{n+1} &= S^s_{n+1} + \frac{1}{2} M_n b_{n+1} \cdot \frac{2b_{n+1}}{3} + \frac{1}{2} M_{n+1} b_{n+1} \cdot \frac{b_{n+1}}{3} \end{aligned} \qquad (10.8)$$

Înlocuind momentele statice (S_{n-1}, S_{n+1}) în relaţia (10.7) se obţine *ecuaţia celor trei momente* sau *ecuaţia lui CLAPEYRON:*

$$M_{n-1}\frac{b_n}{I_n} + 2M_n\left(\frac{b_n}{I_n} + \frac{b_{n+1}}{I_{n+1}}\right) + M_{n+1}\frac{b_{n+1}}{I_{n+1}} + 6E\left(\frac{w_{n-1} - w_n}{b_n} + \frac{w_{n+1} - w_n}{b_{n+1}} + \frac{S^s_{n-1}}{Eb_n I_n} + \frac{S^s_{n+1}}{Eb_{n+1} I_{n+1}}\right) = 0 \quad (10.9)$$

În cazul particular în care grinda continuă este situată pe *r* reazeme punctuale rigide situate la acelaşi nivel şi bara are rigiditatea la încovoiere constantă pe toată lungimea sa, *ecuaţia celor trei momente* (10.9) devine:

$$M_{n-1} b_n + 2M_n (b_n + b_{n+1}) + M_{n+1} b_{n+1} + 6\left(\frac{S^s_{n-1}}{b_n} + \frac{S^s_{n+1}}{b_{n+1}}\right) = 0 \qquad (10.10)$$

Relaţiile (10.10) reprezintă *r-2* ecuaţii independente care împreună cu ecuaţiile de echilibru din Mecanică permit calculul momentelor interioare necunoscute M_1, M_2,..., M_r. Reacţiunea din reazemul *n* se obţine prin însumarea reacţiunilor corespunzătoare celor două tronsoane *(n-1, n)* şi *(n, n+1)*:

$$V_n = V_{ns} + \frac{M_{n-1} - M_n}{b_n} + V_{nd} + \frac{M_{n+1} - M_n}{b_{n+1}} \qquad (10.11)$$

în care: V_{ns}, V_{nd} sunt reacţiunile din reazemul *n* datorate sarcinilor exterioare corespunzătoare celor două tronsoane concurente în reazemul *n*;

al doilea termen este reacţiunea datorată momentelor interioare M_{n-1}, M_n corespunzătoare tronsonului din stânga reazemului *n;*

al patrulea termen este reacţiunea datorată momentelor M_n, M_{n+1} interioare corespunzătoare tronsonului din dreapta reazemului *n.*

În cazul grinzii din figura 10.1.b se obţine:

$$2M_0 b_1 + M_1 b_1 + 6\frac{S^s_1}{b_1} = 0 \qquad (10.12)$$

Aplicația 10.1

Folosind *ecuația lui CLAPEYRON* să se determine reacțiunile din cele trei reazeme V_1, V_2 *şi* V_3 pentru grinda continuă din figura 10.5 . Lungimile a, b_2, b_3 şi c sunt date în metri.

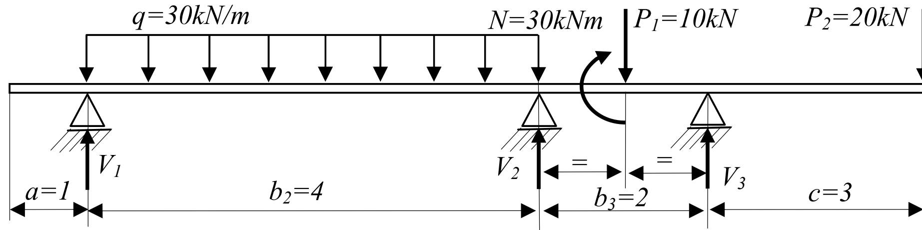


Fig 10.5

Rezolvare

Ecuațiile de echilibru din Mecanică sunt:

$$\begin{aligned} &\sum F_z = 0 \;:\quad V_1 + V_2 + V_3 = P_1 + P_2 + q \cdot b_2 \\ &\sum M_{3y} = 0 :\; V_1(b_2 + b_3) + V_2 b_3 = \sum \bar{M}_{3s} \end{aligned} \tag{10.13}$$

în care $\sum \bar{M}_{3s}$ este suma momentelor sarcinilor exterioare P_1, P_2, q, N care au sensul pozitiv trigonometric.

A treia ecuație se obține scriind *ecuația celor trei momente* (10.10) pentru reazemele *1, 2* şi *3:*

$$M_1 b_2 + 2M_2(b_2 + b_3) + M_3 b_3 + 6\left(\frac{S_1^s}{b_2} + \frac{S_3^s}{b_3}\right) = 0 \tag{10.14}$$

în care : $$M_1 = 0; \qquad M_3 = -60\ kNm \tag{10.15}$$

Pentru a calcula momentele statice S_1^s, S_3^s ale diagramelor de momente corespunzătoare forțelor exterioare, se determină reacțiunile pentru fiecare tronson şi fiecare sarcină iar pentru al doilea se aplică principiul suprapunerii efectelor pentru cele două sarcini P_1 şi N acționând separat. Astfel pentru:

- tronsonul 1-2 cu sarcina distribuită q : $V_{1d} = 60kN;\ \ V_{2s} = 60kN$
- tronsonul 2-3 cu forța P_1: $V'_{2d} = 5kN;\ \ V'_{3s} = 5\ kN$
- tronsonul 2-3 cu cuplul N: $V''_{2d} = -15\ kN;\ \ V''_{3s} = 15\ kN$

Se trasează diagramele de momente pentru fiecare tronson în figura 10.6.

Momentele statice ale diagramelor de momente de determină din figura 10.6:

- pentru tronsonul 1-2 cu sarcina q:

$$S_1^s = A_1 \cdot x_{C1} = \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 60 \cdot 2 = 320\ kNm^2 \tag{10.16}$$

- pentru tronsonul 2-3 cu forța $P_1=10\ kN$:

$$S_{31}^{s} = A_2 \cdot x_{C2} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot 1 = 5\ kNm^2$$

- tronsonul 2-3 cu cuplul $N=30\ kNm$:

$$S_{32}^{s} = A_3' \cdot x_{C2}' + A_3'' \cdot x_{C2}'' = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 15 \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 15 \cdot \frac{4}{3} = -5\ kNm^2$$

- pentru tronsonul 2-3 rezultă prin însumare:

$$S_3^s = 0 \tag{10.17}$$

Înlocuind aceste valori în ecuația (10.15) se obține:

$$2M_2 \cdot 6 + 2 \cdot (-60) + 6\frac{320}{4} = 0 \quad \Rightarrow M_2 = -30\,kNm \tag{10.18}$$

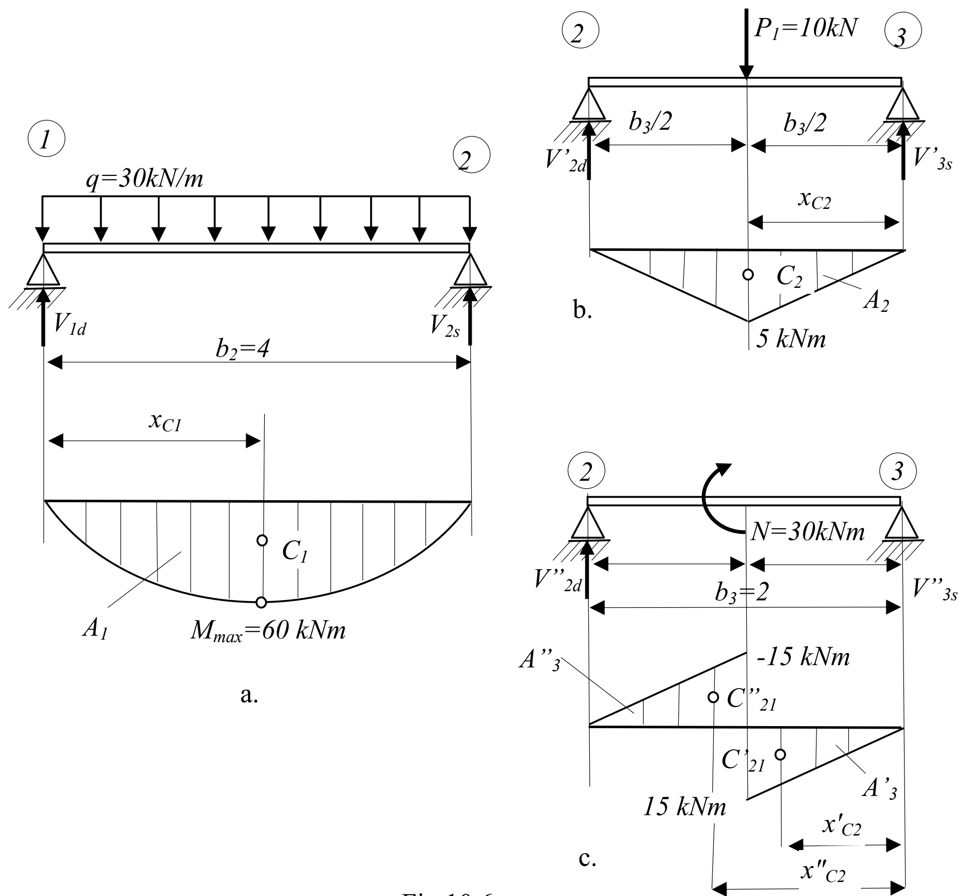


Fig 10.6

Reacțiunea V_1 se determină prin însumarea reacțiunilor corespunzătoare tronsonului 1-2:

$$V_1 = V_{1d} + \frac{M_2 - M_1}{b_2} \quad \Rightarrow \; V_1 = 52{,}5 \; kN \tag{10.19}$$

Reacțiunea V_2 se determină prin însumarea reacțiunilor corespunzătoare fiecărui tronson:

$$V_2 = V_{2s} + \frac{M_1 - M_2}{b_2} + V_{2d} + \frac{M_3 - M_2}{b_3} \quad \Rightarrow V_2 = 42{,}5 \; kN \tag{10.20}$$

Reacțiunea V_3 din reazemul *3* se determină prin însumarea reacțiunilor corespunzătoare tronsonului 2-3:

$$V_3 = V_{3s} + \frac{M_2 - M_3}{b_3} + V_{3d} \quad \Rightarrow \; V_3 = 55 \; kN \tag{10.21}$$

10.3. Ecuația celor trei săgeți (folosind funcția de încărcare Ψ)

Este o metodă analitică nouă[1] ce elimină dezavantajele metodei grafo-analitice *CLAPEYRON* având la bază ecuațiile de deformații scrise cu ajutorul funcției de încărcare Ψ. Săgeata corespunzătoare unei secțiuni a barei situată la distanța *x* scrie cu ajutorul funcției de încărcare Ψ astfel:

$$EIw(x) = EIw_0 + EI\varphi_0 x + \Psi(x) \tag{10.22}$$

în care w_0 este săgeata din capătul barei măsurată față de sistemul *Oxz*;

φ_0 rotirea secțiunii corespunzătoare capătului din stânga al barei;

EI rigiditatea la încovoiere a barei considerată constantă pe lungimea ei;

$\Psi(x)$ funcția de încărcare.

Se consideră două tronsoane de bară cuprinse respectiv între secțiunile *i-j* şi respectiv *j-k* , ca în figura 10.7 şi w_i, w_j şi w_k săgețile corespunzătoare celor trei secțiuni.

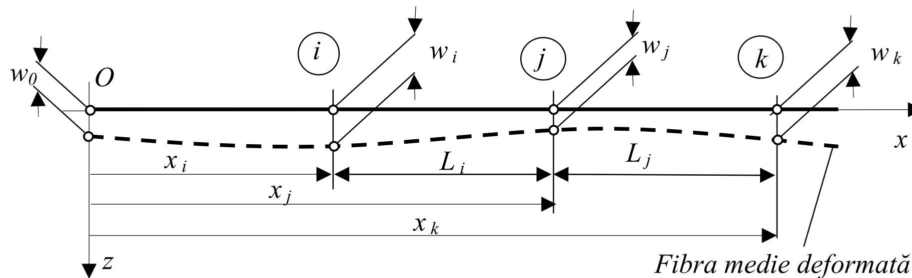


Fig.10.7

[1] Mihail C. ATANASIU, Gabriel G. JIGA - *Metode analitice noi în Rezistența materialelor, 1. Metoda funcției de încărcare,* Ed. U.P.Bucureşti 1994.

Conform relației (10.22) săgețile corespunzătoare celor trei secțiuni se scriu:

$$\begin{aligned} EIw_i &= \Psi(x_i) + EI\varphi_0 x_i + EIw_0 && \Big| L_j \\ EIw_j &= \Psi(x_j) + EI\varphi_0 (x_i + L_i) + EIw_0 && \Big| -(L_i + L_j) \\ EIw_k &= \Psi(x_k) + EI\varphi_0 (x_i + L_i) + EIw_0 && \Big| L_i \end{aligned} \qquad (10.23)$$

Se elimină necunoscuta φ_0 din cele trei ecuații (10.23) prin multiplicarea lor cu: L_j prima ecuație, $-(L_i+L_j)$ cea de-a doua și L_i a treia și prin însumarea lor.

Se obține *ecuația celor trei săgeți* sub forma:

$$EI\left[w_i L_j - w_j (L_j + L_i) + w_k L_i\right] = \Psi_i L_j - \Psi_j (L_j + L_i) + \Psi_k L_i \qquad (10.24)$$

10.4. Grinzi continue cu reazeme punctuale rigide la același nivel cu axa barei

Aplicațiile prezentate în continuare sunt grinzi continue situate pe reazeme rigide la același nivel cu axa barei , supuse acțiunii unor *sarcini exterioare* cunoscute ca mărimi, direcții și poziție pe bară (fig. 10.8). Astfel de aplicații se întâlnesc la montajul arborilor în reductoare sau cutii de viteze pentru care abaterile de la coaxialitatea lagărelor sunt nule. Sarcinile exterioare sunt de trei tipuri:

- forțe concentrate P_1, P_2 acționând la distanțele d_1 respectiv d_2;
- sarcini uniform distribuite q_1, q_2 acționând la distanțele e_1-f_1 respectiv e_2-f_2;
- cupluri concentrate N_1, N_2 acționând la distanțele g_1 respectiv g_2.

Sunt prezentate în continuare modelele de calcul și modul de deducere a relațiilor analitice pentru calculul reacțiunilor pentru unele cazuri particulare.

10.4.1. Grinda continuă cu trei reazeme punctuale rigide (3R)

Modelul de calcul **3R** este format dintr-o bară situată pe trei reazeme punctuale rigide la același nivel cu axa barei, având rigiditatea la încovoiere *EI* constantă pe lungimea ei. Bara este încărcată cu sarcinile exterioare P_1, P_2, q_1, q_2, N_1 și N_2 (fig.10.8).

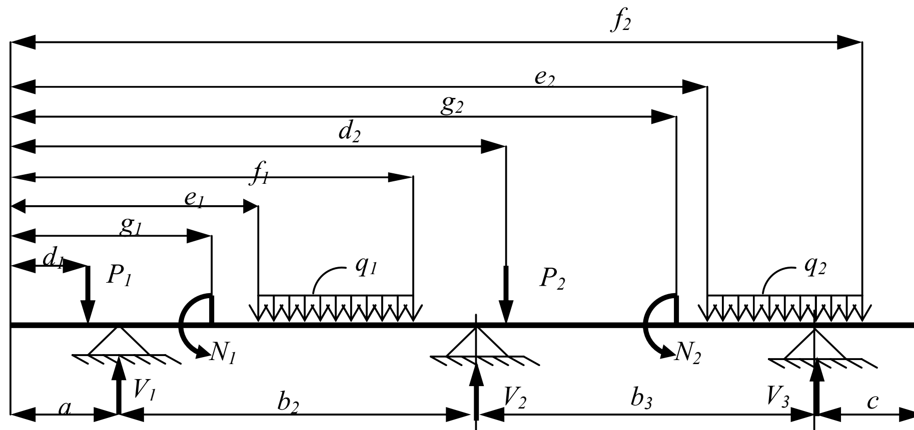


Fig. 10.8

Pentru determinarea reacțiunilor V_1, V_2 și V_3 se utilizează două ecuații de echilibru din Mecanică ($\sum F_z = 0;\ \sum M_y = 0$) și ecuația celor trei săgeți (10.24) pentru reazemele *1-2-3*:

$$\begin{aligned} &\sum F_{zs} \downarrow = V_1 + V_2 + V_3 \\ &\sum \bar{M}_{3s} = V_1(b_2 + b_3) + V_2 b_3 \\ &EI\left[w_1 b_3 - w_2(b_2 + b_3) + w_3 b_2\right] = \Psi_1 b_3 - \Psi_2 (b_2 + b_3) + \Psi_3 b_2 \end{aligned} \tag{10.25}$$

în care: $\sum F_{zs} \downarrow$ este suma forțelor exterioare după direcția axei *Oz;*

$\sum \bar{M}_{3s}$ suma momentelor forțelor și a cuplurilor exterioare după o axă paralelă cu *Oy* ce trece prin reazemul din dreapta (reazemul 3);

Ψ_1, Ψ_2 *și* Ψ_3 , funcțiile de încărcare corespunzătoare reazemelor *1, 2, 3*.

Se înlocuiesc valorile săgeților din reazemele punctuale rigide ($w_1=w_2=w_3=0$) în cea de-a treia ecuație (10.25) și se exprimă funcțiile de încărcare Ψ_1, Ψ_2 și Ψ_3 ca sume dintre funcțiile de încărcare corespunzătoare sarcinilor exterioare Ψ_{1s}, Ψ_{2s}, Ψ_{3s} și cele corespunzătoare reacțiunilor necunoscute V_1, V_2 și V_3:

$$\begin{aligned} &\Psi_1 = \Psi_{1s}\,; \qquad \Psi_2 = \Psi_{2s} - \frac{V_1 b_2^3}{6}\,; \\ &\Psi_3 = \Psi_{3s} - \frac{V_1(b_2 + b_3)^3}{6} - \frac{V_2 b_3^3}{6} \end{aligned} \tag{10.26}$$

Înlocuind relațiile (10.26) în a treia ecuație (10.25) se obține:

$$\Psi_{1s} b_3 - \left(\Psi_{2s} - \frac{V_1 b_2^3}{6}\right)(b_2 + b_3) + \left(\Psi_{3s} - \frac{V_1(b_2 + b_3)^3}{6} - \frac{V_2 b_3^3}{6}\right) b_2 = 0 \tag{10.27}$$

Notând cu: $A_{2s} = \Psi_{1s} b_3 - \Psi_{2s}(b_2 + b_3) + \Psi_{3s} b_2$ (10.28)

ecuația (10.27) se scrie:

$$\frac{V_1 b_2^3 (b_2 + b_3)}{6} - \frac{V_1(b_2 + b_3)^3 b_2}{6} - \frac{V_2 b_2 b_3^3}{6} = -A_{2s} \tag{10.29}$$

Multiplicând a doua ecuație (10.25) cu $\left(b_2 b_3^2\right)/6$ și însumând membru cu membru cu ecuația (10.28), rezultă:

$$V_1\left[\frac{b_2 b_3^2 (b_1 + b_2)}{6} + \frac{(b_2 + b_3) b_2^3}{6} - \frac{(b_2 + b_3)^3 b_2}{6}\right] = \frac{b_2 b_3^2}{6} \sum \bar{M}_{3S} - A_{2s} \tag{10.30}$$

Efectuând unele reduceri în (10.29) rezultă formula de calcul a reacțiunii V_1:

$$V_1 = \frac{1}{b_2(b_2 + b_3)}\left(\frac{3A_{2s}}{b_2 b_3} - \frac{b_3}{2} \sum \bar{M}_{3s}\right) \tag{10.31}$$

Celelalte reacțiuni V_2 și V_3 rezultă din ecuațiile (10.25):

$$V_2 = \frac{1}{b_3} \sum \bar{M}_{3s} - \left(1 + \frac{b_2}{b_3}\right) V_1; \quad V_3 = \sum F_{zs} \downarrow - V_1 - V_2 \tag{10.32}$$

Observație: Funcțiile de încărcare Ψ_{1s}, Ψ_{2s} și Ψ_{3s} se calculează *numai pentru sarcinile exterioare situate la stânga secțiunii respective*, iar suma momentelor $\sum \overleftarrow{M}_{3s}$ care se calculează *pentru toate sarcinile* ce acționează asupra barei

Aplicația 10.2

Pentru grinda continuă situată pe trei reazeme punctuale rigide încărcată ca în figura 10.9, având rigiditatea *EI* constantă pe lungimea ei, se cere să se determine reacțiunile V_1, V_2 *și* V_3.

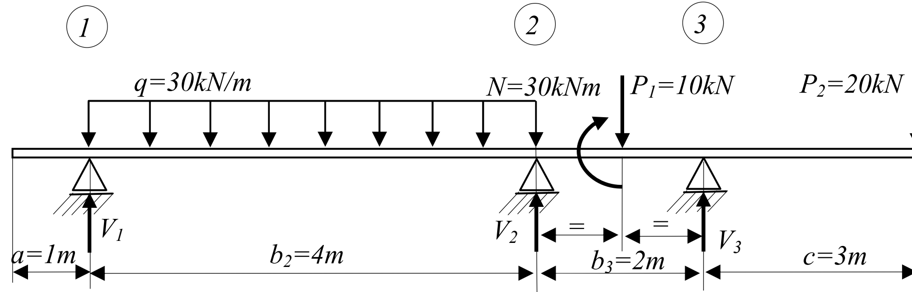


Fig 10.9

- Se determină mai întâi suma forțelor exterioare după direcția lui *Oz*:

$$\sum F_{zs} \downarrow = P_1 + P_2 + qb_2 = 150\ kN \tag{10.33}$$

și suma momentelor forțelor și a cuplurilor exterioare după o axă paralelă cu *Oy* ce trece prin reazemul din dreapta (reazemul 3):

$$\sum \overleftarrow{M}_{3s} = q \cdot b_2 \cdot (b_2/2 + b_3) + P_1 \cdot b_3/2 - N - P_2 \cdot c = 400\ kNm \tag{10.34}$$

- Se determină apoi funcțiile de încărcare Ψ_{1s}, Ψ_{2s} și Ψ_{3s} ale sarcinilor exterioare în cele trei reazeme:

$$\begin{gathered}\Psi_{1s} = 0; \qquad \Psi_{2s} = \frac{qb_2^4}{24} = \frac{30 \cdot 4^4}{24} = 320\ kNm^3 \\ \Psi_{3s} = \frac{q\left[(b_2+b_3)^4 - b_3^4\right]}{24} + \frac{P_1(b_3/2)^3}{6} - \frac{N(b_3/2)^2}{2} = 586{,}667\ kNm^3\end{gathered} \tag{10.35}$$

Înlocuind în expresia (10.28) valorile lui Ψ_{1s}, Ψ_{2s} și Ψ_{3s} se obține:

$$A_{2s} = 4426{,}667\ \ kNm^4 \tag{10.36}$$

Înlocuind în relațiile (10.30) și (10.31) se obține:

$$\begin{gathered}V_1 = \frac{1}{b_2(b_2+b_3)}\left(\frac{3A_{2s}}{b_2 b_3} - \frac{b_3}{2}\sum \overleftarrow{M}_{3s}\right) = 52{,}5\ kN \\ V_2 = \frac{1}{b_3}\sum \overleftarrow{M}_{3s} - \left(1 + \frac{b_2}{b_3}\right)V_1 = 42{,}5\ kN \\ V_3 = \sum F_{zs} \downarrow - V_1 - V_2 = 55\ kN\end{gathered} \tag{10.37}$$

10.4.2. Grinda continuă cu patru reazeme punctuale rigide (4R)

Modelul de calcul **4R** este format dintr-o bară situată pe patru reazeme punctuale rigide la acelaşi nivel cu axa barei, având rigiditatea la încovoiere *EI* constantă pe lungimea ei. Bara este încărcată cu sarcinile exterioare P_1, P_2, q_1, q_2, N_1 şi N_2 (fig.10.10).

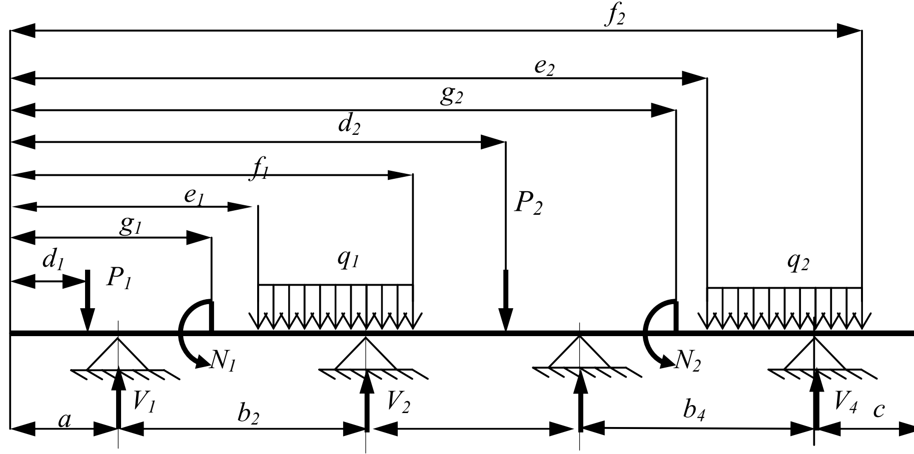


Fig. 10.10

Pentru determinarea reacţiunilor V_1, V_2 , V_3 şi V_4 se utilizează două ecuaţii de echilibru din Mecanică ($\sum F_z = 0;\ \sum M_y = 0$) şi două ecuaţii de deformaţii (ecuaţiile celor trei săgeţi scrise pentru reazemele *1-2-3* şi respectiv *2-3-4):*

$$\begin{aligned}
&\sum F_{zs} \downarrow = V_1 + V_2 + V_3 + V_4 \\
&\sum \bar{M}_{4s} = V_1(b_2 + b_3 + b_4) + V_2(b_3 + b_4) + V_3 b_4 \\
&EI[w_1 b_3 - w_2(b_2 + b_3) + w_3 b_2] = \Psi_1 b_3 - \Psi_2(b_2 + b_3) + \Psi_3 b_2 \\
&EI[w_2 b_4 - w_3(b_3 + b_4) + w_4 b_3] = \Psi_2 b_4 - \Psi_3(b_3 + b_4) + \Psi_4 b_3
\end{aligned} \tag{10.38}$$

În ecuaţiile (10.38) se introduc valorile săgeţilor în reazemele punctuale rigide $w_1=w_2=w_3=w_4=0$ şi se scriu expresiile funcţiilor de încărcare Ψ_1, Ψ_2 Ψ_3 şi Ψ_4 ca sume dintre funcţiile de încărcare Ψ_{1s}, Ψ_{2s} Ψ_{3s} şi Ψ_{4s} corespunzătoare sarcinilor exterioare şi cele corespunzătoare reacţiunilor:

$$\begin{aligned}
&\Psi_1 = \Psi_{1s}\ ; \\
&\Psi_2 = \Psi_{2s} - \frac{V_1 b_2^3}{6}\ ; \\
&\Psi_3 = \Psi_{3s} - \frac{V_1(b_2 + b_3)^3}{6} - \frac{V_2 b_3^3}{6}; \\
&\Psi_3 = \Psi_{3s} - \frac{V_1(b_2 + b_3 + b_4)^3}{6} - \frac{V_2(b_3 + b_4)^3}{6} - \frac{V_3 b_4^3}{6}
\end{aligned} \tag{10.39}$$

Înlocuind relațiile (10.39) în a treia și a patra ecuație (10.37) se obține:

$$\Psi_{1s}\, b_3 - \left(\Psi_{2s} - \frac{V_1 b_2^3}{6}\right)(b_2 + b_3) + \left(\Psi_{3s} - \frac{V_1 (b_2 + b_3)^3}{6} - \frac{V_2 b_3^3}{6}\right) b_2 = 0 \tag{10.40}$$

$$\begin{aligned}&\left(\Psi_{2s} - \frac{V_1 b_2^3}{6}\right) b_4 - \left(\Psi_{3s} - \frac{V_1 (b_2 + b_3)^3}{6} - \frac{V_2 b_3^3}{6}\right)(b_3 + b_4) + \\ &+ \left(\Psi_{3s} - \frac{V_1 (b_2 + b_3 + b_4)^3}{6} - \frac{V_2 (b_3 + b_4)^3}{6} - \frac{V_3 b_4^3}{6}\right) b_3 = 0\end{aligned} \tag{10.41}$$

Dacă se notează în ecuațiile (10.40) și (10.41) cu:

$$\begin{aligned}A_{2s} &= \Psi_{1s} b_3 - \Psi_{2s}(b_2 + b_3) + \Psi_{3s} b_2 \\ A_{3s} &= \Psi_{2s} b_4 - \Psi_{3s}(b_3 + b_4) + \Psi_{4s} b_3\end{aligned} \tag{10.42}$$

relațiile (10.40) și (10.41) devin:

$$\frac{V_1}{6} b_2 b_3 (b_2 + b_3)(2b_2 + b_3) - \frac{V_2}{6} b_3^3 b_2 = -A_{2s} \tag{10.43}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{V_1 b_2^3 b_4}{6} + \frac{V_1 (b_2 + b_3)^3 (b_3 + b_4)}{6} + \frac{V_2 b_3^3 (b_3 + b_4)}{6} - \\ &-\frac{V_1 (b_2 + b_3 + b_4)^3\, b_3}{6} - \frac{V_2 (b_3 + b_4)^3\, b_3}{6} - \frac{V_3 b_4^3\, b_3}{6} = -A_{3s}\end{aligned} \tag{10.44}$$

Dacă se multiplică a doua relație (10.38) cu $\left(b_3 b_4^2\right)/6$ și se însumează cu relația (10.44) se obține:

$$\frac{V_1}{6} b_2 b_4 \left(3b_3^2 + 4b_3 b_4 + 4b_2 b_3 + 4b_2 b_4\right) - \frac{V_2}{3} b_3^2 b_4 (b_3 + b_4) = \frac{b_3 b_4^2}{6} \sum \bar{M}_{4S} - A_{3S} \tag{10.45}$$

Dacă se multiplică relația (10.43) cu $\left(-\frac{3(b_3 + b_4)}{b_2 b_3}\right)$ și relația (10.44) cu $3/(2b_4)$ și se însumează se obține reacțiunea V_1:

$$V_1 = \frac{\frac{3(b_3 + b_4)}{b_2 b_3} A_{2S} - \frac{3A_{3S}}{2b_4} + \frac{b_3 b_4}{4} \sum \bar{M}_{4S}}{b_2 \left(0{,}75 \cdot b_3^2 + b_2 b_3 + b_2 b_4 + b_3 b_4\right)} \tag{10.46}$$

Înlocuind pe V_1 în relația (10.43) se obține reacțiunea V_2:

$$V_2 = \frac{6A_{2S}}{b_2 b_3^3} - \frac{V_1}{b_3^2}(b_2 + b_3)(2b_2 + b_3) \tag{10.47}$$

Înlocuind V_1 și V_2 în primele două ecuații (10.37) se obțin reacțiunile V_3 și V_4:

$$\begin{aligned}V_3 &= \frac{1}{b_4}\left[\sum \bar{M}_{4S} - (b_3 + b_4) V_2 - (b_2 + b_3 + b_4) V_1\right] \\ V_4 &= \sum F_{zs} \downarrow - V_1 - V_2 - V_3\end{aligned} \tag{10.48}$$

Aplicația 10.3

Pentru grinda continuă situată pe patru reazeme punctuale rigide încărcată ca în figura 10.11, având rigiditatea *EI* constantă pe lungimea ei, se cere să se determine reacțiunile V_1, V_2 , V_3 şi V_4.

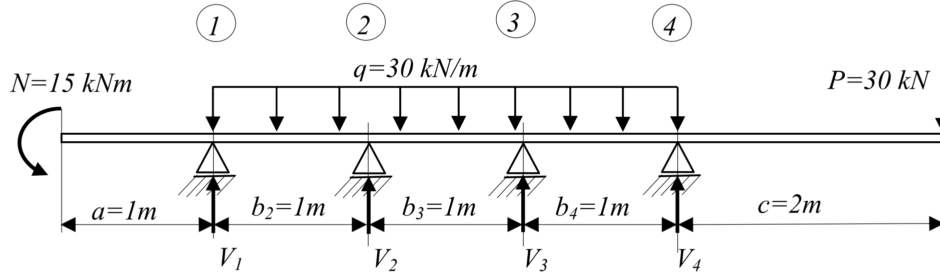


Fig 10.11

- Se determină suma forțelor exterioare după direcția lui *Oz*:

$$\sum F_{zs} \downarrow \; = P + q(b_2 + b_3 + b_4) = 120 \;\, kN \tag{10.49}$$

şi suma momentelor forțelor şi a cuplurilor exterioare după o axă paralelă cu *Oy* ce trece prin reazemul din dreapta (reazemul 4):

$$\sum \overleftarrow{M}_{4s} = N + q \cdot (b_2 + b_3 + b_4)^2 / 2 - P \cdot c = 90 \;\, kNm \tag{10.50}$$

- Se determină apoi funcțiile de încărcare Ψ_{1s}, Ψ_{2s} Ψ_{3s} şi Ψ_{4s} corespunzătoare sarcinilor exterioare:

$$\begin{aligned}
\Psi_{1s} &= \frac{Na^2}{2} = 7{,}5 \;\, kNm^3 \\
\Psi_{2s} &= \frac{N(a+b_2)^2}{2} + \frac{qb_2^4}{24} = \frac{30 \cdot 4^4}{24} = 31{,}25 \;\, kNm^3 \\
\Psi_{3s} &= \frac{N(a+b_2+b_3)^2}{2} + \frac{q(b_2+b_3)^4}{24} = 87{,}5 \;\, kNm^3 \\
\Psi_{4s} &= \frac{N(a+b_2+b_3+b_4)^2}{2} + \frac{q(b_2+b_3+b_4)^4}{24} = 221{,}25 kNm^3
\end{aligned} \tag{10.51}$$

Înlocuind în relațiile (10.46) … (10.48) se obțin valorile reacțiunilor:

$$\begin{aligned}
V_1 &= \frac{\dfrac{3(b_3+b_4)}{b_2 b_3} A_{2S} - \dfrac{3A_{3S}}{2b_4} + \dfrac{b_3 b_4}{4} \sum \overleftarrow{M}_{4S}}{b_2\left(0{,}75 \cdot b_3^2 + b_2 b_3 + b_2 b_4 + b_3 b_4\right)} = 27kN \\
V_2 &= \frac{6A_{2S}}{b_2 b_3^3} - \frac{V_1}{b_3^2}(b_2+b_3)(2b_2+b_3) = 33kN \\
V_3 &= \frac{1}{b_4}\left[\sum \overleftarrow{M}_{4S} - (b_3+b_4)V_2 - (b_2+b_3+b_4)V_1\right] = -57 \;\, kN \\
V_4 &= \sum F_{zs} \downarrow - V_1 - V_2 - V_3 = 117 \;\, kN
\end{aligned} \tag{10.52}$$

10.4.3. Grinda continuă cu culisă coaxială de capăt şi un reazem punctual rigid la acelaşi nivel cu axa barei (IR)

Modelul de calcul **IR** este format dintr-o bară încastrată la un capăt sau cu o culisă coaxială, situată pe un reazem punctual rigid la acelaşi nivel cu axa barei, având rigiditatea la încovoiere *EI* constantă pe toată lungimea ei. Bara este încărcată cu sarcinile exterioare P_1, P_2, q_1, q_2, N_1 şi N_2 (fig.10.12).

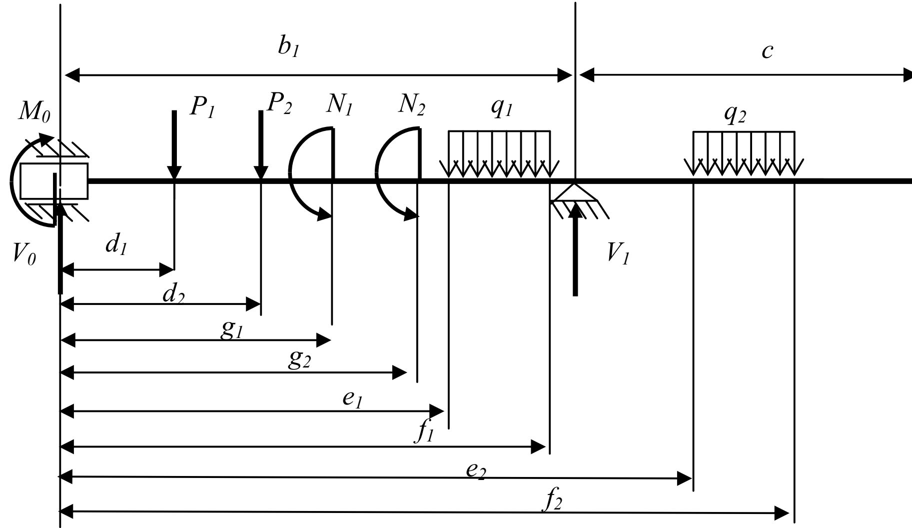


Fig. 10.12

Pentru determinarea reacţiunilor V_0, M_0 şi V_1 se utilizează cele două ecuaţii din Mecanică ($\sum F_z = 0;\ \sum M_y = 0$) precum şi ecuaţia de deformaţii din reazemul *1:*

$$\begin{aligned} &\Sigma F_{zs} \downarrow = V_0 + V_1 \\ &\Sigma \bar{M}_{1s} = M_0 + V_0 b_1 \\ &EIw_1 = \Psi_1 = 0 \end{aligned} \tag{10.53}$$

Se scrie funcţia de încărcare Ψ_1 ca suma dintre funcţia de încărcare a sarcinilor exterioare Ψ_{1s} şi cele corespunzătoare reacţiunilor necunoscute:

$$\Psi_1 = \Psi_{1s} - \frac{M_0 b_1^2}{2} - \frac{V_0 b_1^3}{6} \tag{10.54}$$

Exprimând M_0 din a doua relaţie (10.53) în funcţie de V_0 şi înlocuind în relaţia (10.54) rezultă:

$$\Psi_{1s} - \frac{\Sigma \bar{M}_{1s} b_1^2}{2} + V_0 \left(\frac{b_1^3}{2} - \frac{b_1^3}{6} \right) = 0 \tag{10.55}$$

Din relaţia (10.56) rezultă reacţiunea V_0:

$$V_0 = \frac{3}{b_1}\left(\frac{\Sigma\overleftarrow{M}_{1s}}{2} - \frac{\Psi_{1s}}{b_1^2}\right) \tag{10.56}$$

Din relația (10.54) rezultă şi celelalte două reacțiuni:

$$\begin{aligned} M_0 &= \Sigma\overleftarrow{M}_{1s} - V_0 b_1 \\ V_1 &= \Sigma F_{zs}\downarrow - V_0 \end{aligned} \tag{10.57}$$

Aplicația 10.4

Pentru grinda continuă încastrată la un capăt situată pe un reazem punctual rigid la acelaşi nivel cu axa barei, încărcată ca în figura 10.13, având rigiditatea *EI* constantă pe lungimea ei, se cere să se determine reacțiunile V_0, M_0 şi V_1.

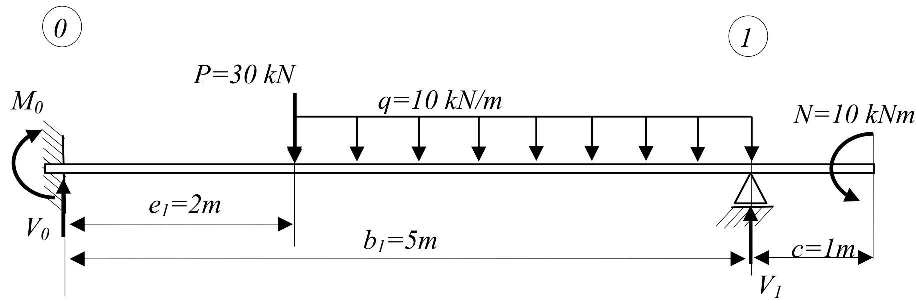


Fig. 10.13

- Se determină suma forțelor exterioare după direcția lui *Oz*:

$$\sum F_{zs}\downarrow = P + qb_1 = 60\ kN \tag{10.58}$$

şi suma momentelor forțelor şi a cuplurilor exterioare după o axă paralelă cu *Oy* ce trece prin reazemul din dreapta (reazemul 3):

$$\sum\overleftarrow{M}_{1s} = q\cdot(b_1 - e_1)^2/2 + P\cdot(b_1 - e_1) + N = 145\ kNm \tag{10.59}$$

- Se determină apoi funcția de încărcare Ψ_{1s} a sarcinilor exterioare:

$$\Psi_{1s} = \frac{q(b_1 - e_1)^4}{24} + \frac{P(b_1 - e_1)^3}{6} = 168{,}75\ kNm^3 \tag{10.60}$$

Înlocuind în relația (10.56) se obține reacțiunea:

$$V_0 = \frac{3}{b_1}\left(\frac{\Sigma\overleftarrow{M}_{1s}}{2} - \frac{\Psi_{1s}}{b_1^2}\right) = 39{,}45\ kN \tag{10.61}$$

Respectiv în relațiile (10.57) se obțin reacțiunile:

$$\begin{aligned} M_0 &= \Sigma\overleftarrow{M}_{1s} - V_0 b_1 = -52{,}25\ kNm \\ V_1 &= \Sigma F_{zs}\downarrow - V_0 = 20{,}55\ kN \end{aligned} \tag{10.62}$$

10.4.4. Grinda continuă cu culisă coaxială de capăt şi două reazeme punctuale rigide la acelaşi nivel cu axa barei (I2R)

Modelul de calcul **I2R** este format dintr-o bară încastrată la capăt sau cu o culisă coaxială, situată pe două reazeme punctuale rigide la acelaşi nivel cu axa nedeformată a barei, având rigiditatea la încovoiere *EI* constantă pe toată lungimea ei. Bara este încărcată cu sarcinile exterioare P_1, P_2, q_1, q_2, N_1 şi N_2 (fig.10.14).

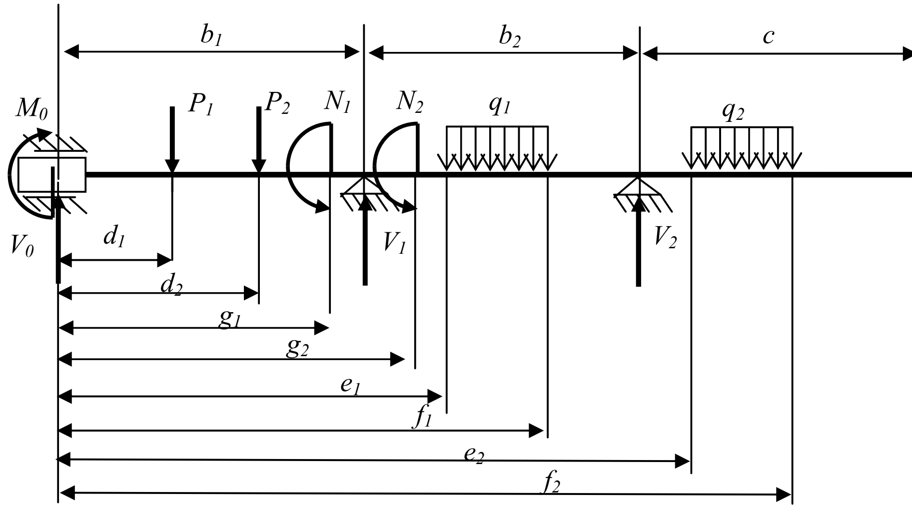


Fig. 10.14

Pentru determinarea reacţiunilor V_0, M_0 , V_1 şi V_2 se utilizează cele două ecuaţii din Mecanică ($\sum F_z = 0;\ \sum M_y = 0$) precum şi ecuaţiile de deformaţii pentru reazemele *1 şi 2:*

$$\begin{aligned} &\Sigma F_{zs} \downarrow = V_0 + V_1 \\ &\Sigma \bar{M}_{2s} = M_0 + V_0(b_1 + b_2) + V_1 b_2 \\ &EIw_1 = \Psi_1 = 0 \\ &EIw_2 = \Psi_2 = 0 \end{aligned} \qquad (10.63)$$

Se scriu funcţiile de încărcare Ψ_1 şi Ψ_2 ca sume dintre funcţiile de încărcare ale sarcinilor exterioare Ψ_{1s} şi Ψ_{2s} şi cele ale reacţiunilor necunoscute:

$$\begin{aligned} &\Psi_1 = \Psi_{1s} - \frac{M_0 b_1^2}{2} - \frac{V_0 b_1^3}{6} \\ &\Psi_2 = \Psi_{2s} - \frac{M_0 (b_1 + b_2)^2}{2} - \frac{V_0 (b_1 + b_2)^3}{6} - \frac{V_1 b_2^3}{6} \end{aligned} \qquad (10.64)$$

Ultimele două ecuații (10.63) se scriu:

$$\begin{aligned} &\frac{M_0 b_1^2}{2} + \frac{V_0 b_1^3}{6} = \Psi_{1s} \\ &\frac{M_0 (b_1 + b_2)^2}{2} + \frac{V_0 (b_1 + b_2)^3}{6} + \frac{V_1 b_2^3}{6} = \Psi_{2s} \end{aligned} \qquad (10.65)$$

Exprimând V_0 în funcție de M_0 din prima relație (10.65) şi V_1 din a doua relație (10.63) în funcție de M_0 şi V_0 rezultă:

$$\begin{aligned} &V_0 = \frac{1}{b_1}\left(\frac{6\Psi_{1s}}{b_1^2} - 3M_0\right) \\ &V_1 = \frac{1}{b_1}\left[\Sigma\bar{M}_{2s} - M_0 - V_0 (b_1 + b_2)\right] \end{aligned} \qquad (10.66)$$

Înlocuind V_0 si V_1 în a doua relație (10.65) rezultă reacțiunea M_0:

$$M_0 = \frac{6}{3b_1 + 4b_2}\left(\frac{\Psi_{1s}}{b_1}\left(3 + \frac{2b_2}{b_1} + \frac{b_1}{b_2}\right) + \frac{b_2}{6}\Sigma\bar{M}_{2s} - \frac{\Psi_{2s}}{b_2}\right) \qquad (10.67)$$

Reacțiunile V_0 şi V_1 rezultă din relația (10.66), iar reacțiunea V_2 rezultă din prima relație (10.63):

$$V_2 = \Sigma F_{zs} \downarrow - V_0 - V_1 \qquad (10.68)$$

Aplicația 10.5

Pentru grinda continuă încastrată la un capăt situată pe un reazem punctual rigid la acelaşi nivel cu axa nedeformată a barei, având rigiditatea la încovoiere EI constantă pe toată lungimea ei, încărcată ca în figura 10.15 se cere să se determine reacțiunile V_0, M_0 V_1 *şi* V_2.

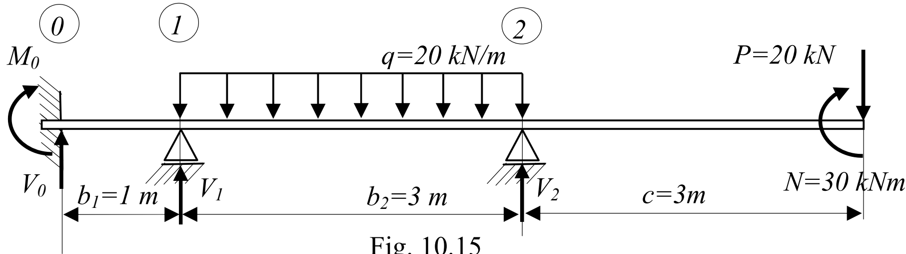


Fig. 10.15

- Se determină suma forțelor exterioare după direcția lui Oz:

$$\sum F_{zs} \downarrow = P + q b_2 = 80\ kN \qquad (10.69)$$

şi suma momentelor forțelor şi a cuplurilor exterioare după o axă paralelă cu Oy ce trece prin reazemul din dreapta (reazemul 3):

$$\sum \bar{M}_{2s} = q \cdot b_2^2 / 2 - P \cdot c - N = 0 \qquad (10.70)$$

- Se determină apoi funcțiile de încărcare Ψ_{1s}, Ψ_{2s} ale sarcinilor exterioare:

$$\Psi_{1s} = 0; \qquad \Psi_{2s} = \frac{qb_2^{\ 4}}{24} = 67{,}5\ kNm^3; \tag{10.71}$$

Înlocuind se obțin valorile:

$$M_0 = \frac{6}{3b_1 + 4b_2}\left(\frac{\Psi_{1s}}{b_1}\left(3 + \frac{2b_2}{b_1} + \frac{b_1}{b_2}\right) + \frac{b_2}{6}\Sigma\overleftarrow{M}_{2s} - \frac{\Psi_{2s}}{b_2}\right) = -9\ kNm$$

$$V_0 = \frac{1}{b_1}\left(\frac{6\Psi_{1s}}{b_1^2} - 3M_0\right) = 27\ kN \tag{10.72}$$

$$V_1 = \frac{1}{b_1}\left[\Sigma\overleftarrow{M}_{2s} - M_0 - V_0(b_1 + b_2)\right] = -33\ kN;$$

$$V_2 = \sum F_{zs} \downarrow - V_0 - V_1 = 86kN$$

10.4.5. Grinda continuă cu culise coaxiale la ambele capete, fără reazeme intermediare (2I)

Modelul de calcul 2**I** este format dintr-o bară încastrată la capete sau cu două culise coaxiale, fără reazeme intermediare. Bara are rigiditatea la încovoiere EI constantă pe toată lungimea ei şi este încărcată cu sarcinile exterioare P_1, P_2, q_1, q_2, N_1 şi N_2 (fig.10.16).

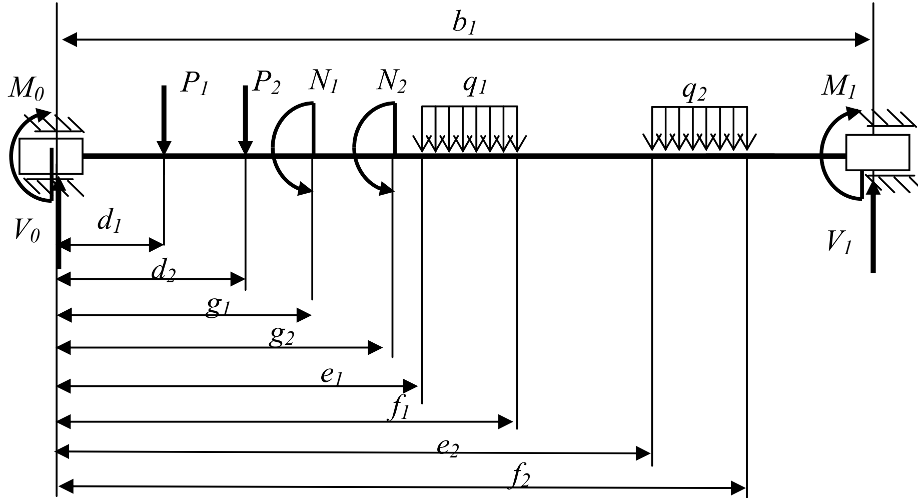


Fig. 10.16

Pentru determinarea reacțiunilor V_0, M_0 , V_1 și V_2 se utilizează cele două ecuații din Mecanică ($\sum F_z = 0;\ \sum M_y = 0$) precum și ecuațiile de deformații (săgeata și rotirea) pentru reazemul *1:*

$$\begin{aligned} &\Sigma F_{zs} \downarrow = V_0 + V_1 \\ &\Sigma \overleftarrow{M}_{1s} = M_0 + M_1 + V_0 b_1 \\ &EIw_1 = \Psi_1 = 0 \\ &EI\varphi_1 = \Psi_1' = 0 \end{aligned} \tag{10.73}$$

Se scriu funcțiile Ψ_1 și Ψ'_1 ca sume dintre funcțiile de încărcare ale sarcinilor exterioare Ψ_{1s} și Ψ'_{1s} și cele ale reacțiunilor necunoscute:

$$\begin{aligned} &\Psi_1 = \Psi_{1s} - \frac{M_0 b_1^2}{2} - \frac{V_0 b_1^3}{6} \\ &\Psi_1' = \Psi_{1s}' - \frac{M_0 b_1}{1} - \frac{V_0 b_1^{\,2}}{2} \end{aligned} \tag{10.74}$$

Ultimele două ecuații (10.73) se scriu:

$$\begin{aligned} &\frac{M_0 b_1^2}{2} + \frac{V_0 b_1^3}{6} = \Psi_{1s} \\ &\frac{M_0 b_1}{1} + \frac{V_0 b_1^{\,2}}{2} = \Psi_{1s}' \end{aligned} \tag{10.75}$$

Din ecuațiile (10.75) rezultă reacțiunile V_0 și M_0:

$$\begin{aligned} &V_0 = \frac{6}{b_1^{\,2}}\left(\Psi'_{1s} - \frac{2\Psi_{1s}}{b_1}\right) \\ &M_0 = \frac{2}{b_1}\left(\frac{3\Psi_{1s}}{b_1} - \Psi_{1s}'\right) \end{aligned} \tag{10.76}$$

Din primele două ecuații (10.73) rezultă reacțiunile V_1 și M_1:

$$\begin{aligned} &V_1 = \Sigma F_{zs} \downarrow - \frac{6}{b_1^{\,2}}\left(\Psi'_{1s} - \frac{2\Psi_{1s}}{b_1}\right) \\ &M_1 = \sum \overleftarrow{M}_{1s} - \frac{4}{b_1}\Psi'_{1s} + \frac{6\Psi_{1s}}{b_1^{\,2}} \end{aligned} \tag{10.77}$$

Aplicația 10.6

Pentru grinda continuă încastrată la capete fără reazeme intermediare, având rigiditatea la încovoiere *EI* constantă pe toată lungimea ei, încărcată ca în figura 10.17 se cere să se determine reacțiunile V_0, M_0, V_1 *şi* M_1.

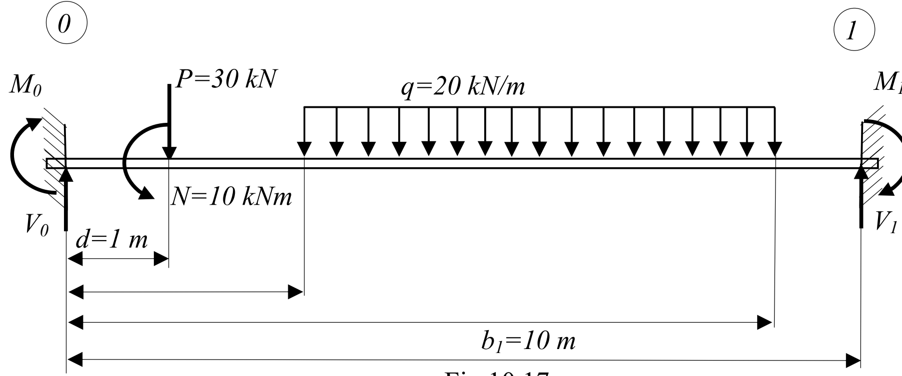


Fig 10.17

- Se determină suma forțelor exterioare după direcția lui *Oz*:

$$\sum F_{zs} \downarrow = P + q(f - e) = 150\ kN \tag{10.78}$$

şi suma momentelor forțelor şi a cuplurilor exterioare după o axă paralelă cu *Oy* ce trece prin capătul din dreapta al barei (1):

$$\sum \overleftarrow{M}_{1s} = N + P(b_1 - d) + q\cdot(f - e)\left(b_1 - \frac{f - e}{2}\right) = 760\ kNm \tag{10.79}$$

- Se determină apoi funcțiile de încărcare Ψ_{1s} *şi* Ψ'_{1s} ale sarcinilor exterioare:

$$\Psi_{1s} = \frac{N(b_1 - d)^2}{2} + \frac{P(b_1 - d)^3}{6} + \frac{q\left[(b_1 - e)^4 - (b_1 - f)^4\right]}{24} = 6050\ kNm^3$$
$$\Psi'_{1s} = \frac{N(b_1 - d)}{1} + \frac{P(b_1 - d)^2}{2} + \frac{q\left[(b_1 - e)^3 - (b_1 - f)^3\right]}{6} = 2445\ kNm^2 \tag{10.80}$$

Înlocuind în relațiile (10.76) şi (10.77) se obțin reacțiunile:

$$V_0 = \frac{6}{b_1^2}\left(\Psi'_{1s} - \frac{2\Psi_{1s}}{b_1}\right) = 74{,}1\ kN$$

$$M_0 = \frac{2}{b_1}\left(\frac{3\Psi_{1s}}{b_1} - \Psi'_{1s}\right) = -126\ kNm$$

$$V_1 = \Sigma F_{zs} \downarrow - \frac{6}{b_1^2}\left(\Psi'_{1s} - \frac{2\Psi_{1s}}{b_1}\right) = 75{,}9\ kN \tag{10.81}$$

$$M_1 = \sum \overleftarrow{M}_{1s} - \frac{4}{b_1}\Psi'_{1s} + \frac{6\Psi_{1s}}{b_1^2} = 145\ kN$$

10.4.6. Grinda continuă cu culise coaxiale la capete şi un reazem intermediar situat la acelaşi nivel cu axa barei (2IR)

Modelul de calcul **2IR** este format dintr-o bară încastrată la capete sau cu două culise coaxiale, situată pe un reazem intermediar la acelaşi nivel cu axa barei.Bara are rigiditatea la încovoiere *EI* constantă pe toată lungimea ei şi este încărcată cu sarcinile exterioare P_1, P_2, q_1, q_2, N_1 şi N_2 (fig.10.18).

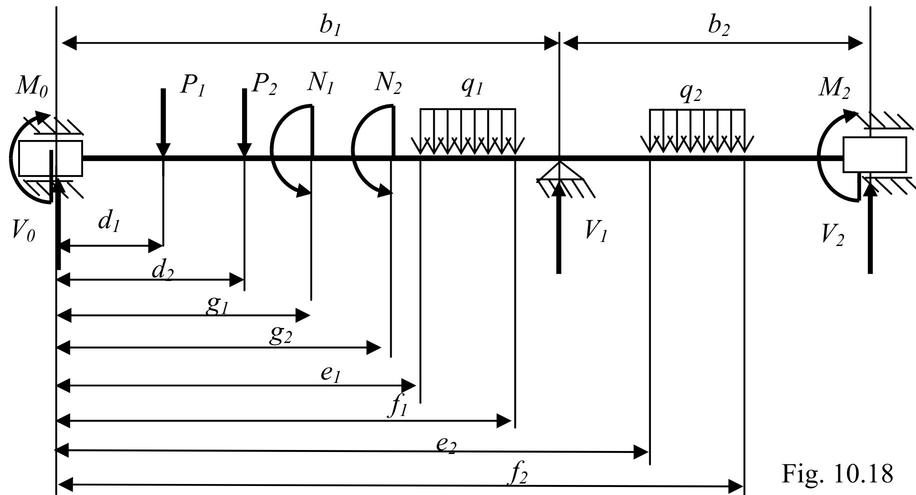


Fig. 10.18

Pentru determinarea reacțiunilor V_0, M_0, V_1, V_2 şi M_2 se utilizează cele două ecuații din Mecanică ($\sum F_z = 0;\ \sum M_y = 0$) precum şi ecuațiile de deformații pentru reazemul *1* (săgeata) respectiv reazemul *2* (săgeata şi rotirea):

$$\begin{aligned}
&\Sigma F_{zs} \downarrow = V_0 + V_1 + V_2\\
&\Sigma \bar{M}_{2s} = M_0 + M_2 + V_0(b_1 + b_2) + V_1 b_2\\
&EIw_1 = \Psi_1 = 0\\
&EIw_2 = \Psi_2 = 0\\
&EI\varphi_2 = \Psi_2' = 0
\end{aligned} \tag{10.82}$$

Se scriu funcțiile Ψ_1, Ψ_2 şi Ψ'_2 ca sume dintre funcțiile de încărcare ale sarcinilor exterioare Ψ_{1s}, Ψ_{2s} şi Ψ'_{2s} şi cele ale reacțiunilor necunoscute:

$$\begin{aligned}
&\Psi_1 = \Psi_{1s} - \frac{M_0 b_1^2}{2} - \frac{V_0 b_1^3}{6}\\
&\Psi_2 = \Psi_{2s} - \frac{M_0(b_1 + b_2)^2}{2} - \frac{V_0(b_1 + b_2)^3}{6} - \frac{V_1 b_2^3}{6}\\
&\Psi_2' = \Psi_{2s}' - \frac{M_0(b_1 + b_2)}{1} - \frac{V_0(b_1 + b_2)^2}{2} - \frac{V_1 b_2^2}{2}
\end{aligned} \tag{10.83}$$

Ultimele trei ecuaţii (10.82) se mai scriu:

$$\begin{aligned} &\frac{M_0 b_1^2}{2} + \frac{V_0 b_1^3}{6} = \Psi_{1s} \\ &\frac{M_0 (b_1 + b_2)^2}{2} + \frac{V_0 (b_1 + b_2)^3}{6} + \frac{V_1 b_2^3}{6} = \Psi_{2s} \\ &\frac{M_0 (b_1 + b_2)}{1} + \frac{V_0 (b_1 + b_2)^2}{2} + \frac{V_1 b_2^2}{2} = \Psi'_{2s} \end{aligned} \qquad (10.84)$$

Din prima ecuaţie (10.84) rezultă M_0 în funcţie de V_0:

$$M_0 = \frac{1}{3b_1^2}(6\Psi_{1s} - V_0 b_1^3) \qquad (10.85)$$

Introducând expresia lui M_0 în a doua şi a treia ecuaţie (10.84) rezultă:

$$\begin{aligned} &V_0 = \frac{3}{b_1}\left[\frac{3\Psi_{2s}}{b_2(b_1 + b_2)} - \frac{\Psi'_{2s}}{(b_1 + b_2)} - \frac{\Psi_{1s}(b_2 + 3b_1)}{b_1^2 b_2}\right] \\ &V_1 = \frac{1}{b_2^2}\left[2\Psi'_{2s} - 2(b_1 + b_2)M_0 - (b_1 + b_2)^2 V_0\right] \end{aligned} \qquad (10.86)$$

Din primele două ecuaţii (10.82) rezultă reacţiunile V_2 şi M_2:

$$\begin{aligned} &V_2 = \sum F_{zs} \downarrow - V_0 - V_1; \\ &M_2 = \sum \bar{M}_{2s} - M_0 - V_0(b_1 + b_2) - V_1 b_2 \end{aligned} \qquad (10.87)$$

Aplicaţia 10.7

Pentru grinda continuă încastrată la capete cu un reazem intermediar situat la acelaşi nivel cu axa barei, având rigiditatea la încovoiere EI, încărcată ca în figura 10.19 se cere să se determine reacţiunile V_0, M_0, V_1, V_2 *şi* M_2.

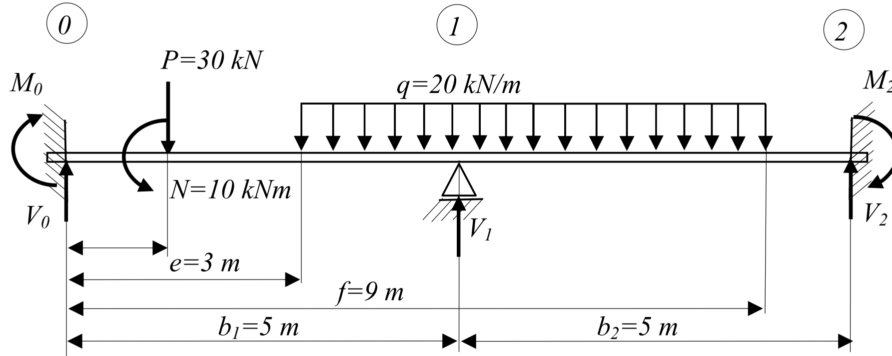


Fig. 10.19

Rezolvare

- Se determină suma forțelor exterioare după direcția lui *Oz*:

$$\sum F_{zs} \downarrow \; = P + q(f-e) = 150 \; kN \tag{10.88}$$

și suma momentelor forțelor și a cuplurilor exterioare după o axă paralelă cu *Oy* ce trece prin capătul din dreapta al barei (2):

$$\sum \overleftarrow{M}_{2s} = N + P(b_1+b_2-d) + q\cdot(f-e)\left(b_1+b_2-\frac{f-e}{2}\right)$$
$$\sum \overleftarrow{M}_{2s} = 760 \; kNm \tag{10.89}$$

- Se determină apoi funcțiile de încărcare Ψ_{1s}, Ψ_{2s} *și* Ψ'_{2s} ale sarcinilor exterioare:

$$\Psi_{1s} = \frac{N(b_1-d)^2}{2} + \frac{P(b_1-d)^3}{6} + \frac{q(b_1-e)^4}{24}$$
$$\Psi_{1s} = 413{,}333 \; kNm^3$$
$$\Psi_{2s} = \frac{N(b_1+b_2-d)^2}{2} + \frac{P(b_1+b_2-d)^3}{6} + \frac{q\left[(b_1+b_2-e)^4-(b_1+b_2-f)^4\right]}{24}$$
$$\Psi_{2s} = 413{,}333 \; kNm^3 \tag{10.90}$$
$$\Psi'_{2s} = \frac{N(b_1+b_2-d)}{1} + \frac{P(b_1+b_2-d)^2}{2} + \frac{q\left[(b_1+b_2-e)^3-(b_1+b_2-f)^3\right]}{6}$$
$$\Psi'_{2s} = 2445 \; kNm^2$$

Înlocuind în relațiile (10.86) , (10.85) și (10.87) se obțin rezultatele:

$$V_0 = \frac{3}{b_1}\left[\frac{3\Psi_{2s}}{b_2(b_1+b_2)} - \frac{\Psi'_{2s}}{(b_1+b_2)} - \frac{\Psi_{1s}(b_2+3b_1)}{b_1^2 b_2}\right] = 31{,}42 \; kN$$
$$V_1 = \frac{1}{b_2^2}\left[2\Psi'_{2s} - 2(b_1+b_2)M_0 - (b_1+b_2)^2 V_0\right] = 85{,}36 \; kN$$
$$M_0 = \frac{1}{3b_1^2}(6\Psi_{1s} - V_0 b_1^3) = -19{,}3 \; kNm \tag{10.91}$$
$$V_2 = \sum F_{zs}\downarrow - V_0 - V_1 = 33{,}22 \; kN$$
$$M_2 = \sum \overleftarrow{M}_{2s} - M_0 - V_0(b_1+b_2) - V_1 b_2 = 38{,}3 \; kNm$$

10.5. Grinzi continue cu reazeme punctuale rigide denivelate sau cu culise necoaxiale

În practica inginerească se întâlnesc probleme static nedeterminate de tipul grinzilor continue pe mai multe *reazeme rigide denivelate* în raport cu axa barei sau având *culisele necoaxiale* cu axa barei. Sunt prezentate în continuare diferite modelele de calcul şi relaţiile analitice particulare pentru calculul reacţiunilor.

10.5.1 Grinda continuă cu trei reazeme rigide denivelate (3Rd).

Modelul de calcul **3Rd** este format dintr-o bară pe trei reazeme punctuale rigide reazemul (2) fiind denivelat cu w_2 faţă de reazemele (1) şi (3). Bara are rigiditatea la încovoiere *EI* constantă pe lungimea ei şi este încărcată cu sarcinile exterioare P_1, P_2, q_1, q_2, N_1 şi N_2 , trebuind să facă contact cu reazemul 2, chiar dacă asupra ei nu acţionează nici o sarcină exterioară (fig.10.20).

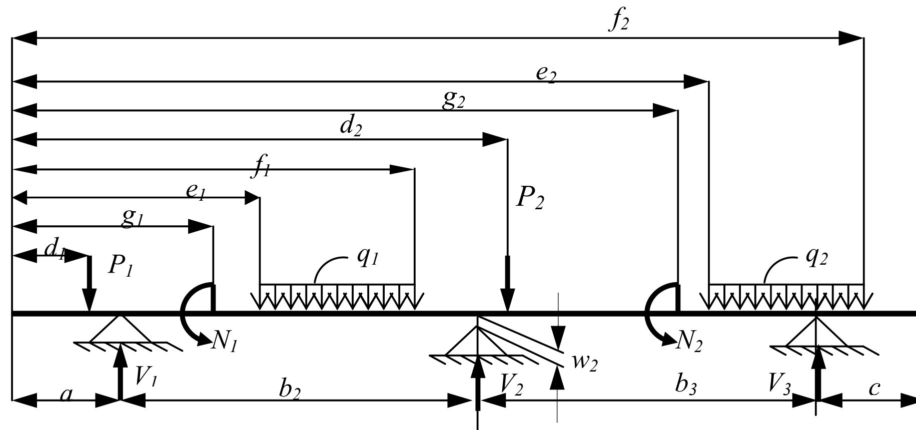


Fig. 10.20

Pentru determinarea reacţiunilor V_1, V_2 şi V_3 se utilizează cele două ecuaţii din Mecanică ($\sum F_z = 0;\ \sum M_y = 0$) precum şi ecuaţia celor trei săgeţi scrisă pentru reazemele *1-2-3*:

$$\sum F_{zs} \downarrow = V_1 + V_2 + V_3$$

$$\sum \overset{\leftarrow}{M}_{3s} = V_1(b_2 + b_3) + V_2 b_3 \qquad (10.92)$$

$$EI\left[w_1 b_3 - w_2(b_2 + b_3) + w_3 b_2\right] = \Psi_1 b_3 - \Psi_2(b_2 + b_3) + \Psi_3 b_2$$

în care:

- $\sum F_{zs} \downarrow$ este suma forţelor exterioare după direcţia axei *Oz;*
- $\sum \overset{\leftarrow}{M}_{3s}$ suma momentelor forţelor şi a cuplurilor exterioare după o axă paralelă cu *Oy* ce trece prin reazemul din dreapta (reazemul 3);
- Ψ_1, Ψ_2 *şi* Ψ_3 , funcţiile de încărcare corespunzătoare reazemelor *1, 2, 3*.

În ultima ecuație (10.92) se înlocuiesc valorile săgeților din rezemele punctuale rigide: $w_1= w_3=0$ și se scriu funcțiile de încărcare Ψ_1, Ψ_2 *și* Ψ_3 ca sumele corespunzătoare dintre funcțiile de încărcare pentru sarcinile exterioare Ψ_{1s}, Ψ_{2s} *și* Ψ_{3s} și cele corespunzătoare reacțiunilor necunoscute:

$$\Psi_1 = \Psi_{1s}\,;\qquad \Psi_2 = \Psi_{2s} - \frac{V_1 b_2^3}{6}\,;\qquad \Psi_3 = \Psi_{3s} - \frac{V_1(b_2+b_3)^3}{6} - \frac{V_2 b_3^3}{6} \tag{10.93}$$

Înlocuind relațiile (10.93) în ultima ecuația (10.92) se obține:

$$\Psi_{1s}\,b_3 - \left(\Psi_{2s} - \frac{V_1 b_2^3}{6}\right)(b_2+b_3) + \left(\Psi_{3s} - \frac{V_1(b_2+b_3)^3}{6} - \frac{V_2 b_3^3}{6}\right)b_2 = -EIw_2(b_2+b_3) \tag{10.94}$$

Notând:

$$A_{2s} = \Psi_{1s}b_3 - \Psi_{2s}(b_2+b_3) + \Psi_{3s}b_2 \qquad B = EIw_2(b_2+b_3) \tag{10.95}$$

atunci ecuația (10.94) se scrie:

$$\frac{V_1 b_2^3(b_2+b_3)}{6} - \frac{V_1(b_2+b_3)^3 b_2}{6} - \frac{V_2 b_2 b_3^3}{6} = -B - A_{2s} \tag{10.96}$$

Dacă se multiplică a doua a ecuație (10.92) cu $\left(b_3^2 b_2\right)/6$ și se adună cu ecuația (10.96) rezultă:

$$\frac{V_1 b_2(b_2+b_3)}{6}\left[b_2^2 - (b_2+b_3)^2 + b_3^2\right] = \frac{b_3^2 b_2}{6}\sum \overleftarrow{M}_{3S} - A_{3S} - B \tag{10.97}$$

Rezultă cele trei reacțiuni:

$$V_1 = \frac{1}{b_2(b_2+b_3)}\left(\frac{3(A_{2s}+B)}{b_2 b_3} - \frac{b_3}{2}\sum \overleftarrow{M}_{3s}\right) \qquad V_2 = \frac{1}{b_3}\sum \overleftarrow{M}_{3s} - \left(1+\frac{b_2}{b_3}\right)V_1 \qquad V_3 = \sum F_{zs}\downarrow - V_1 - V_2 \tag{10.98}$$

Observație:

În cazul particular în care nu acționează nici o sarcină exterioară asupra barei relațiile (10.98) pentru calculul reacțiunilor devin:

$$V_1 = \frac{3EIw_2}{b_2^2 b_3}\,;\quad V_2 = -\left(1+\frac{b_2}{b_3}\right)V_1\,;\quad V_3 = -V_1 - V_2 \tag{10.98'}$$

Reacțiunile V_1 și V_3 sunt positive iar reacțiiunea V_2 negativă.

10.5.2. Grinda continuă cu culisă la capăt şi un reazem punctual rigid denivelat faţă axa barei (IRd)

Modelul de calcul **IRd** este format dintr-o bară încastrată la un capăt sau cu o culisă coaxială cu axa barei, situată pe un reazem punctual rigid denivelat cu w_1 faţă de axa culisei. Bara are rigiditatea la încovoiere *EI* constantă pe lungimea ei şi este încărcată cu sarcinile exterioare P_1, P_2, q_1, q_2, N_1 şi N_2 , trebuind să facă contact cu reazemul 1, chiar dacă asupra ei nu acţionează nici o sarcină exterioară (fig.10.21).

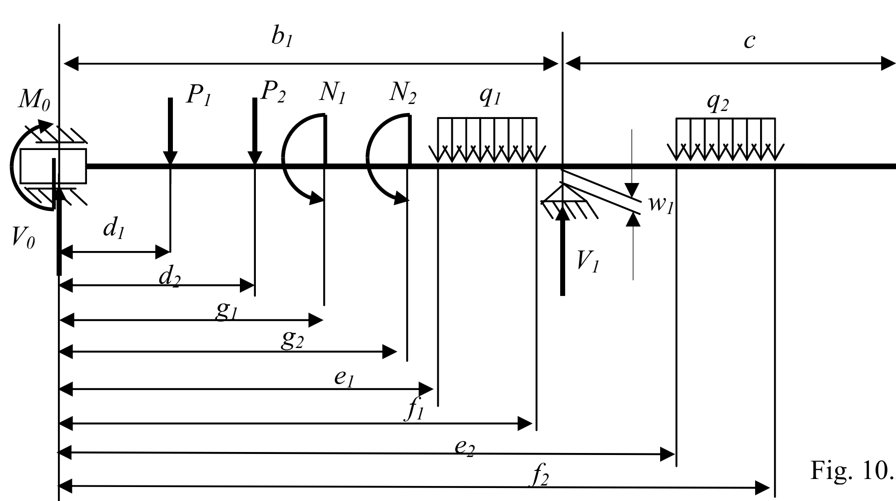


Fig. 10.21

Pentru determinarea reacţiunilor V_0, M_0 şi V_1 se utilizează cele două ecuaţii din Mecanică ($\sum F_z = 0;\ \sum M_y = 0$) precum şi ecuaţia de deformaţii din reazemul *1:*

$$\begin{aligned} &\Sigma F_{zs} \downarrow = V_0 + V_1 \\ &\Sigma \overleftarrow{M}_{1s} = M_0 + V_0 b_1 \\ &EIw_1 = \Psi_1 \end{aligned} \qquad (10.99)$$

Se scrie funcţia de încărcare Ψ_1 ca suma dintre funcţia de încărcare Ψ_{1s} a sarcinilor exterioare şi cele corespunzătoare reacţiunilor necunoscute:

$$\Psi_1 = \Psi_{1s} - \frac{M_0 b_1^2}{2} - \frac{V_0 b_1^3}{6} \qquad (10.100)$$

Notând $EIw_1 = B$ şi exprimând M_0 din a doua relaţie (10.99) în funcţie de V_0 şi înlocuind în relaţia (10.100) rezultă:

$$\Psi_{1s} - \frac{\Sigma \overleftarrow{M}_{1s} b_1^2}{2} + V_0\left(\frac{b_1^3}{2} - \frac{b_1^3}{6}\right) = B \qquad (10.101)$$

Rezultă reacţiunile:

$$\begin{aligned} &V_0 = \frac{3}{b_1}\left(\frac{\Sigma \overleftarrow{M}_{1s}}{2} - \frac{\Psi_{1s} - B}{b_1^2}\right) \\ &M_0 = \Sigma \overleftarrow{M}_{1s} - V_0 b_1; \quad V_1 = \Sigma F_{zs} \downarrow - V_0 \end{aligned} \qquad (10.102)$$

Observație:

În cazul particular în care nu acționează nici o sarcină exterioară asupra barei relațiile (10.102) pentru calculul reacțiunilor devin:

$$V_0 = \frac{3EIw_1}{b_1^3}; \quad M_0 = -V_0 b_1; \quad V_1 = -V_0 \tag{10.102'}$$

Reacțiunea V_0 este pozitivă iar reacțiunea V_1 negativă.

10.5.3. Grinda continuă cu o culisă coaxială la capăt și două reazeme punctuale rigide denivelate față de axa barei (2IRd)

Modelul de calcul **I2Rd** este format dintr-o bară încastrată la un capăt sau cu o culisă coaxială cu axa barei, situată pe două reazeme punctuale rigide denivelate cu w_1 și w_2 față de axa culisei. Bara are rigiditatea la încovoiere *EI* constantă pe lungimea ei și este încărcată cu sarcinile exterioare P_1, P_2, q_1, q_2, N_1 și N_2, trebuind să facă contact cu reazemele 1 și 2 chiar dacă asupra ei nu acționează nici o sarcină exterioară (fig.10.22).

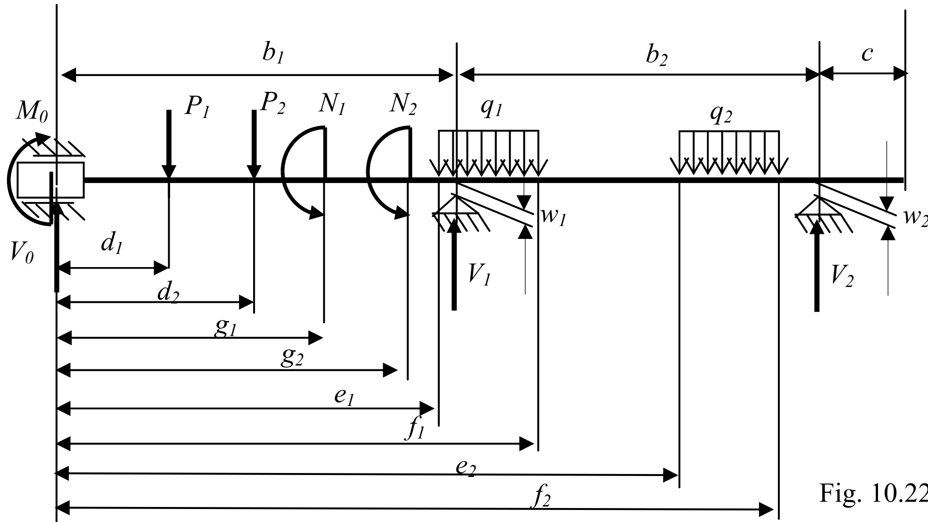


Fig. 10.22

Pentru determinarea reacțiunilor V_0, M_0 , V_1 și V_2 se utilizează cele două ecuații din Mecanică ($\sum F_z = 0;\ \sum M_y = 0$) precum și ecuațiile de deformații pentru reazemele *1 și 2:*

$$\begin{aligned} &\Sigma F_{zs} \downarrow = V_0 + V_1 \\ &\Sigma \bar{M}_{2s} = M_0 + V_0(b_1 + b_2) + V_1 b_2 \\ &EIw_1 = \Psi_1 = B \\ &EIw_2 = \Psi_2 = C \end{aligned} \tag{10.103}$$

Se scriu funcțiile de încărcare Ψ_1 şi Ψ_2 ca sume dintre funcțiile de încărcare Ψ_{1s} şi Ψ_{2s} ale sarcinilor exterioare şi cele ale reacțiunilor necunoscute:

$$\Psi_1 = \Psi_{1s} - \frac{M_0 b_1^2}{2} - \frac{V_0 b_1^3}{6}$$
$$\Psi_2 = \Psi_{2s} - \frac{M_0 (b_1 + b_2)^2}{2} - \frac{V_0 (b_1 + b_2)^3}{6} - \frac{V_1 b_2^3}{6} \qquad (10.104)$$

Ultimele două ecuații (10.103) se scriu:

$$\frac{M_0 b_1^2}{2} + \frac{V_0 b_1^3}{6} = \Psi_{1s} - B$$
$$\frac{M_0 (b_1 + b_2)^2}{2} + \frac{V_0 (b_1 + b_2)^3}{6} + \frac{V_1 b_2^3}{6} = \Psi_{2s} - C \qquad (10.105)$$

Exprimând V_0 în funcție de M_0 din prima relatie (10.105) şi V_1 din a doua relatie (10.63) în funcție de M_0 şi V_0 rezultă:

$$V_0 = \frac{1}{b_1}\left(\frac{6\Psi_{1s} - B}{b_1^2} - 3M_0\right)$$
$$V_1 = \frac{1}{b_1}\left[\Sigma \bar{M}_{2s} - M_0 - V_0 (b_1 + b_2)\right] \qquad (10.106)$$

Înlocuind V_0 si V_1 în a doua relație (10.105) rezultă reacțiunea M_0:

$$M_0 = \frac{6}{3b_1 + 4b_2}\left(\frac{\Psi_{1s} - B}{b_1}\left(3 + \frac{2b_2}{b_1} + \frac{b_1}{b_2}\right) + \frac{b_2}{6}\Sigma \bar{M}_{2s} - \frac{\Psi_{2s} - C}{b_2}\right) \qquad (10.107)$$

Reacțiunile V_0 şi V_1 rezultă din relația (10.106), iar reacțiunea V_2 rezultă din prima relație (10.103):

$$V_2 = \Sigma F_{zs} \downarrow - V_0 - V_1 \qquad (10.108)$$

Observație:

În cazul particular în care nu acționează nici o sarcină exterioară asupra barei relațiile (10.102) pentru calculul reacțiunilor devin:

$$M_0 = \frac{6}{3b_1 + 4b_2}\left(-\frac{B}{b_1}\left(3 + \frac{2b_2}{b_1} + \frac{b_1}{b_2}\right) + \frac{C}{b_2}\right)$$
$$V_0 = -\frac{1}{b_1}\left(\frac{B}{b_1^2} + 3M_0\right)$$
$$V_1 = \frac{1}{b_1}\left[-M_0 - V_0 (b_1 + b_2)\right] \qquad (10.108')$$
$$V_2 = -V_0 - V_1$$

10.5.4. Grinda continuă cu culise coaxiale la capete şi un reazem punctual rigid denivelat față de axa barei (2IRd)

Modelul de calcul **2IRd** este prezentat în figura 10.23 fiind format dintr-o bară încastrată la capete sau cu două culise coaxiale situată pe un reazem intermediar denivelat în raport cu axa barei cu w_1, având rigiditatea la încovoiere *EI* constantă pe toată lungimea ei şi este încărcată cu sarcinile exterioare P_1, P_2, q_1, q_2, N_1 şi N_2, trebuind să facă contact cu reazemul 1 chiar dacă asupra ei nu acționează nici o sarcină exterioară (fig.10.23).

Pentru determinarea reacțiunilor V_0, M_0, V_1, V_2 şi M_2 se utilizează cele două ecuații din Mecanică ($\sum F_z = 0;\ \sum M_y = 0$) precum şi ecuațiile de deformații pentru reazemul *1* (săgeata) respectiv reazemul *2* (săgeata şi rotirea):

$$\begin{aligned}
&\Sigma F_{zs} \downarrow = V_0 + V_1 + V_2 \\
&\Sigma \overset{\frown}{M}_{2s} = M_0 + M_2 + V_0(b_1 + b_2) + V_1 b_2 \\
&EIw_1 = \Psi_1 = B \\
&EIw_2 = \Psi_2 = 0 \\
&EI\varphi_2 = \Psi_2' = 0
\end{aligned} \tag{10.109}$$

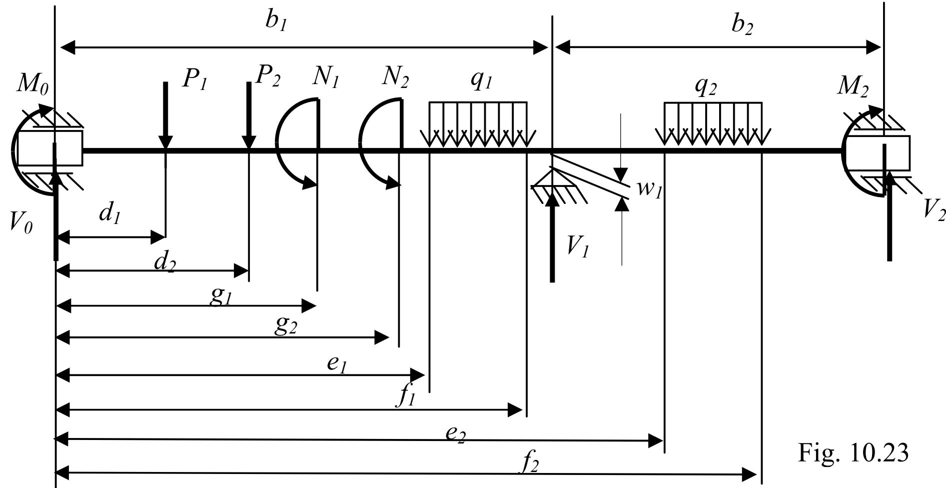


Fig. 10.23

Se scriu funcțiile Ψ_1, Ψ_2 şi Ψ'_2 ca sume dintre funcțiile de încărcare Ψ_{1s}, Ψ_{2s} şi Ψ'_{2s} ale sarcinilor exterioare şi cele ale reacțiunilor necunoscute:

$$\begin{aligned}
&\Psi_1 = \Psi_{1s} - \frac{M_0 b_1^2}{2} - \frac{V_0 b_1^3}{6} \\
&\Psi_2 = \Psi_{2s} - \frac{M_0(b_1 + b_2)^2}{2} - \frac{V_0(b_1 + b_2)^3}{6} - \frac{V_1 b_2^3}{6} \\
&\Psi_2' = \Psi_{2s}' - \frac{M_0(b_1 + b_2)}{1} - \frac{V_0(b_1 + b_2)^2}{2} - \frac{V_1 b_2^2}{2}
\end{aligned} \tag{10.110}$$

Ultimele trei ecuații (10.109) se mai scriu:

$$\frac{M_0 b_1^2}{2}+\frac{V_0 b_1^3}{6}=\Psi_{1s}-B$$
$$\frac{M_0(b_1+b_2)^2}{2}+\frac{V_0(b_1+b_2)^3}{6}+\frac{V_1 b_2^3}{6}=\Psi_{2s} \qquad (10.111)$$
$$\frac{M_0(b_1+b_2)}{1}+\frac{V_0(b_1+b_2)^2}{2}+\frac{V_1 b_2^2}{2}=\Psi'_{2s}$$

Din prima ecuație (10.111) rezultă M_0 în funcție de V_0:

$$M_0=\frac{1}{3b_1^2}\left[6(\Psi_{1s}-B)-V_0 b_1^3\right] \qquad (10.112)$$

Introducând expresia lui M_0 în a doua și a treia ecuație (10.112) rezultă:

$$V_0=\frac{3}{b_1}\left[\frac{3\Psi_{2s}}{b_2(b_1+b_2)}-\frac{\Psi'_{2s}}{(b_1+b_2)}-\frac{(\Psi_{1s}-B)(b_2+3b_1)}{b_1^2 b_2}\right]$$
$$V_1=\frac{1}{b_2^2}\left[2\Psi'_{2s}-2(b_1+b_2)M_0-(b_1+b_2)^2 V_0\right] \qquad (10.113)$$

Din primele două ecuații (10.109) rezultă reacțiunile V_2 și M_2:

$$V_2=\sum F_{zs}\downarrow -V_0-V_1;$$
$$M_2=\sum \bar{M}_{2s}-M_0-V_0(b_1+b_2)-V_1 b_2 \qquad (10.114)$$

Observație:

În cazul particular în care nu acționează nici o sarcină exterioară asupra barei relațiile (10.102) pentru calculul reacțiunilor devin:

$$V_0=\frac{3EIw_1(b_2+3b_1)}{b_1^3 b_2}$$
$$M_0=-\frac{2EIw_1}{b_1^2}-\frac{b_1}{3}V_0$$
$$V_1=-\frac{1}{b_2^2}\left[2(b_1+b_2)M_0+(b_1+b_2)^2 V_0\right] \qquad (10.114')$$
$$V_2=-V_0-V_1$$

Reacțiunile V_0 M_0 și V_2 sunt pozitive iar reacțiunea V_1 negativă.

10.6. Grinzi continue cu reazeme punctuale rigide şi elastice

În practica inginerească se întâlnesc şi probleme static nedeterminate de tipul grinzilor continue situate pe *reazeme rigide şi elastice*. Ca şi în cazul grinzilor continue situate pe reazeme rigide, bara are secțiunea şi rigiditatea la încovoiere *EI* constantă pe lungimea ei şi este supusă acțiunii unor tipuri de sarcini exterioare cunoscute ca mărimi, direcții şi poziție pe bară. Sunt prezentate trei modele de calcul.

10.6.1 Grinda continuă cu două reazeme punctuale rigide şi un reazem intermediar elastic (3Re)

Modelul de calcul **3Re** este format dintr-o bară pe trei reazeme punctuale: (1) şi (3) sunt două reazeme punctuale rigide iar (2) un reazem elastic. Reacțiunea V_2 este proporțională cu săgeata $w_2 = V_2 / k$ (fig.10.24). Bara are rigiditatea la încovoiere *EI* constantă pe lungimea ei şi este încărcată cu sarcinile exterioare P_1, P_2, q_1, q_2, N_1 şi N_2 (fig.10.24).

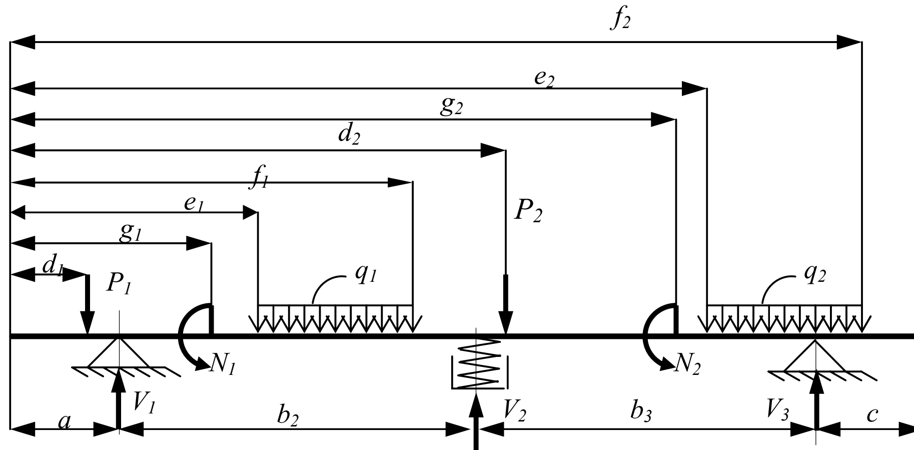


Fig. 10.24

Pentru determinarea reacțiunilor V_1, V_2, V_3 se utilizează două ecuații din Mecanică ($\sum F_z = 0;\ \sum M_y = 0$) precum şi ecuația celor trei săgeți pentru reazemele *1-2-3*:

$$\begin{aligned}&\sum F_{zs} \downarrow = V_1 + V_2 + V_3\\&\sum \bar{M}_{3s} = V_1(b_2 + b_3) + V_2 b_3\\&EI\left[w_1 b_3 - w_2(b_2 + b_3) + w_3 b_2\right] = \Psi_1 b_3 - \Psi_2(b_2 + b_3) + \Psi_3 b_2\end{aligned} \qquad (10.115)$$

în care

- $\sum F_{zs} \downarrow$ este suma forțelor exterioare după direcția axei *Oz;*
- $\sum \bar{M}_{3s}$ suma momentelor forțelor şi a cuplurilor exterioare după o axă paralelă cu *Oy* ce trece prin reazemul din dreapta (reazemul 3);
- Ψ_1, Ψ_2 *şi* Ψ_3 , funcțiile de încărcare corespunzătoare reazemelor *1, 2, 3*.

În ultima ecuație (10.115) se înlocuiesc valorile săgeților din reazemele punctuale rigide *(1)* şi *(3):* $w_1 = w_3 = 0$ şi săgeata în reazemul elastic *(2):* $w_2 = V_2 / k$ şi se scriu funcțiile de încărcare Ψ_1, Ψ_2 *şi* Ψ_3 ca sumele corespunzătoare dintre funcțiile de încărcare pentru sarcinile exterioare Ψ_{1s}, Ψ_{2s} *şi* Ψ_{3s} şi cele corespunzătoare reacțiunilor necunoscute:

$$\begin{aligned}
&\Psi_1 = \Psi_{1s}\ ;\\
&\Psi_2 = \Psi_{2s} - \frac{V_1 b_2^3}{6}\ ;\\
&\Psi_3 = \Psi_{3s} - \frac{V_1 (b_2 + b_3)^3}{6} - \frac{V_2 b_3^3}{6}
\end{aligned} \qquad (10.116)$$

Înlocuind relațiile (10.116) în ultima ecuația (10.115) se obține:

$$\Psi_{1s} b_3 - \left(\Psi_{2s} - \frac{V_1 b_2^3}{6} \right)(b_2 + b_3) + \left(\Psi_{3s} - \frac{V_1 (b_2 + b_3)^3}{6} - \frac{V_2 b_3^3}{6} \right) b_2 = -\frac{1}{k} EI (b_2 + b_3) V_2 \qquad (10.117)$$

Notând:

$$\begin{aligned}
&A_{2s} = \Psi_{1s} b_3 - \Psi_{2s} (b_2 + b_3) + \Psi_{3s} b_2\\
&B = \frac{1}{k} EI (b_2 + b_3)
\end{aligned} \qquad (10.118)$$

atunci ecuația (10.117) se scrie:

$$\frac{V_1 b_2^3 (b_2 + b_3)}{6} - \frac{V_1 (b_2 + b_3)^3 b_2}{6} + \left(-\frac{b_2 b_3^3}{6} + B \right) V_2 = -A_{2s} \qquad (10.119)$$

Dacă se multiplică a doua a ecuație (10.115) cu $\left(-\frac{b_2 b_3^2}{6} + \frac{B}{b_3} \right)$ şi se adună membru cu membru cu ecuația (10.119) rezultă reacțiunea V_1:

$$V_1 = \frac{1}{b_2 (b_2 + b_3)} \left(\frac{3 A_{2s}}{b_2 b_3 + \dfrac{3B}{b_2 b_3}} - \frac{b_3}{2} \sum \bar{M}_{3s} \cdot \frac{\dfrac{b_2 b_3}{3} - \dfrac{2B}{b_3^2}}{\dfrac{b_2 b_3}{3} + \dfrac{B}{b_2 b_3}} \right) \qquad (10.120)$$

Expresiile reacțiunilor V_2 şi V_3 sunt:

$$\begin{aligned}
&V_2 = \frac{1}{b_3} \sum \bar{M}_{3s} - \left(1 + \frac{b_2}{b_3} \right) V_1\\
&V_3 = \sum F_{zs} \downarrow - V_1 - V_2
\end{aligned} \qquad (10.121)$$

Deplasarea w_2 se determină cu ajutorul reacțiunii V_2: $w_2 = V_2 / k$

10.6.2. Grinda continuă cu culisă de capăt şi un reazem elastic (IRe)

Modelul de calcul **IRe** este format dintr-o bară încastrată la un capăt sau cu o culisă coaxială cu axa barei situată pe un reazem elastic. Reacţiunea V_1 este proporţională cu săgeata $w_1 = V_1 / k$ (fig.10.25). Bara are rigiditatea la încovoiere EI constantă pe lungimea ei şi este încărcată cu sarcinile exterioare P_1, P_2, q_1, q_2, N_1 şi N_2 (fig.10.25).

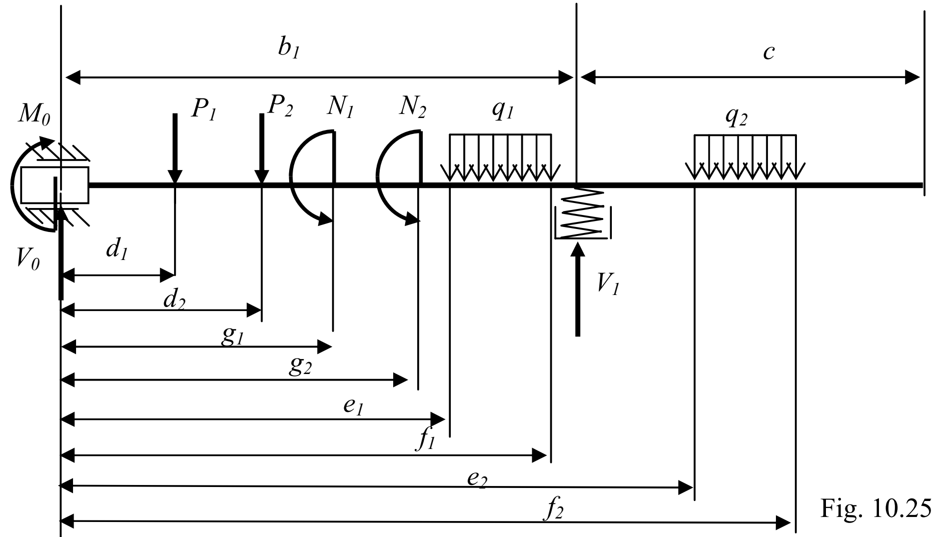


Fig. 10.25

Pentru determinarea reacţiunilor V_0, M_0 şi V_1 se utilizează cele două ecuaţii din Mecanică ($\sum F_z = 0; \ \sum M_y = 0$) precum şi ecuaţia de deformaţii din reazemul *1:*

$$\Sigma F_{zs} \downarrow = V_0 + V_1$$
$$\Sigma \overleftarrow{M}_{1s} = M_0 + V_0 b_1 \qquad (10.122)$$
$$EI \frac{V_1}{k} = \Psi_1$$

Se scrie funcţia de încărcare Ψ_1 ca suma dintre funcţia de încărcare Ψ_{1s} a sarcinilor exterioare şi cele corespunzătoare reacţiunilor necunoscute:

$$\Psi_1 = \Psi_{1s} - \frac{M_0 b_1^2}{2} - \frac{V_0 b_1^3}{6} \qquad (10.123)$$

Notând $B = \frac{EI}{k}$ şi exprimând M_0 din a doua relaţie (10.122) în funcţie de V_0 $M_0 = \Sigma \overleftarrow{M}_{1s} - V_0 b_1$ şi înlocuind în a treia relaţie (10.122) rezultă:

$$\Psi_{1s} - \frac{\Sigma \overleftarrow{M}_{1s} b_1^2}{2} + V_0 \left(\frac{b_1^3}{2} - \frac{b_1^3}{6} \right) = B V_1 \qquad (10.124)$$

Eliminând V_1 din prima ecuație (10.122) și ecuația (10.124) se obține:

$$V_0 = \frac{3}{b_1^3 + 3A}\left(\frac{b_1^2}{2}\sum\overleftarrow{M}_{1S} - \Psi_{1s} + A\sum F_{zs}\downarrow\right) \tag{10.125}$$

Celelalte două reacțiuni rezultă imediat:

$$\begin{aligned} V_1 &= \Sigma F_{zs}\downarrow - V_0 \\ M_0 &= \Sigma\overleftarrow{M}_{1s} - V_0 b_1 \end{aligned} \tag{10.126}$$

10.6.3. Grinda continuă cu două culise coaxiale la capete şi un reazem elastic intermediar (2IRe)

Modelul de calcul **2IRe** este format dintr-o bară încastrată la ambele capete sau cu două culise coaxiale cu axa barei situată pe un reazem elastic. Reacțiunea V_1 este proporțională cu săgeata $w_1 = V_1 / k$ (fig.10.26). Bara are rigiditatea la încovoiere EI constantă pe lungimea ei şi este încărcată cu sarcinile exterioare P_1, P_2, q_1, q_2, N_1 şi N_2 (fig.10.26).

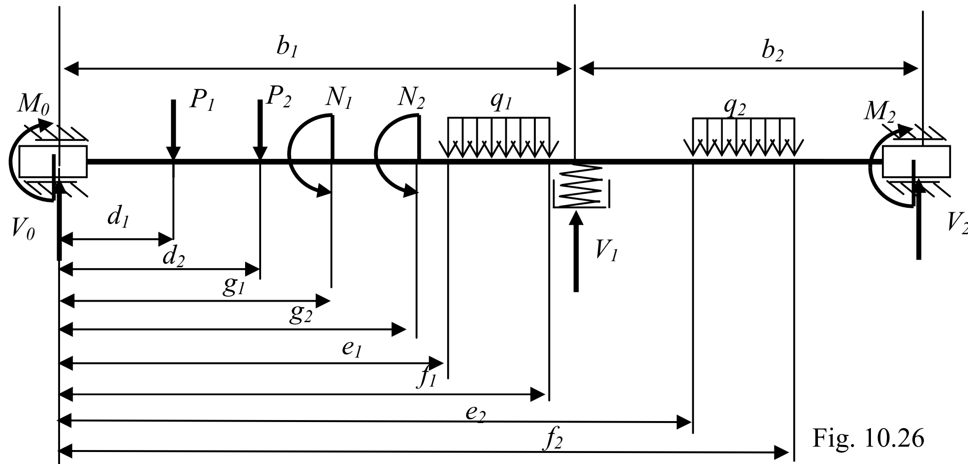


Fig. 10.26

Pentru determinarea reacțiunilor V_0, M_0, V_1, V_2 şi M_2 se utilizează cele două ecuații din Mecanică ($\sum F_z = 0;\ \sum M_y = 0$) precum şi ecuațiile de deformații pentru reazemul *1* (săgeata) respectiv reazemul *2* (săgeata şi rotirea):

$$\begin{aligned} \Sigma F_{zs}\downarrow &= V_0 + V_1 + V_2 \\ \Sigma\overleftarrow{M}_{2s} &= M_0 + M_2 + V_0(b_1 + b_2) + V_1 b_2 \\ EI\frac{V_1}{k} &= \Psi_1 \\ EIw_2 &= \Psi_2 = 0 \\ EI\varphi_2 &= \Psi_2' = 0 \end{aligned} \tag{10.127}$$

Se scriu funcțiile Ψ_1, Ψ_2 și Ψ'_2 ca sume dintre funcțiile de încărcare Ψ_{1s}, Ψ_{2s} și Ψ'_{2s} ale sarcinilor exterioare și cele ale reacțiunilor necunoscute:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &= \Psi_{1s} - \frac{M_0 b_1^2}{2} - \frac{V_0 b_1^3}{6} \\
\Psi_2 &= \Psi_{2s} - \frac{M_0(b_1+b_2)^2}{2} - \frac{V_0(b_1+b_2)^3}{6} - \frac{V_1 b_2^3}{6} \\
\Psi'_2 &= \Psi'_{2s} - \frac{M_0(b_1+b_2)}{1} - \frac{V_0(b_1+b_2)^2}{2} - \frac{V_1 b_2^2}{2}
\end{aligned} \tag{10.128}$$

Notând $B = \dfrac{EI}{k}$, ultimele trei ecuații (10.127) se mai scriu:

$$\begin{aligned}
&\frac{M_0 b_1^2}{2} + \frac{V_0 b_1^3}{6} + BV_1 = \Psi_{1s} \\
&\frac{M_0(b_1+b_2)^2}{2} + \frac{V_0(b_1+b_2)^3}{6} + \frac{V_1 b_2^3}{6} = \Psi_{2s} \\
&\frac{M_0(b_1+b_2)}{1} + \frac{V_0(b_1+b_2)^2}{2} + \frac{V_1 b_2^2}{2} = \Psi'_{2s}
\end{aligned} \tag{10.129}$$

Rezolvând acest sistem rezultă reacțiunile M_0, V_0 și V_1:

$$M_0 = \frac{3b_2\,\Psi_{1s} - \dfrac{3b_1^2 b_2}{(b_1+b_2)^2}\Psi_{2s} + \dfrac{b_1^2 b_2^2}{(b_1+b_2)^2}\Psi'_{2s} - 3B\left[\sum \bar{M}_{2S} - \dfrac{6\Psi_{2s} - 2b_2\Psi'_{2s}}{b_1(b_1+b_2)}\right]}{3B\dfrac{b_1+b_2}{b_1} + \dfrac{b_1^2 b_2^2}{b_1+b_2}}$$

$$\begin{aligned}
V_0 &= -M_0\frac{3b_1+b_2}{b_1(b_1+b_2)} + \frac{6\Psi_{2s} - 2b_2\Psi'_{2s}}{b_1(b_1+b_2)^2} \\
V_1 &= \frac{1}{b_2^2}\left[2\Phi'_{2s} - 2(b_1+b_2)M_0 - (b_1+b_2)^2 V_0\right]
\end{aligned} \tag{10.130}$$

Din ecuațiile (10.127) rezultă reacțiunile V_2 și M_2:

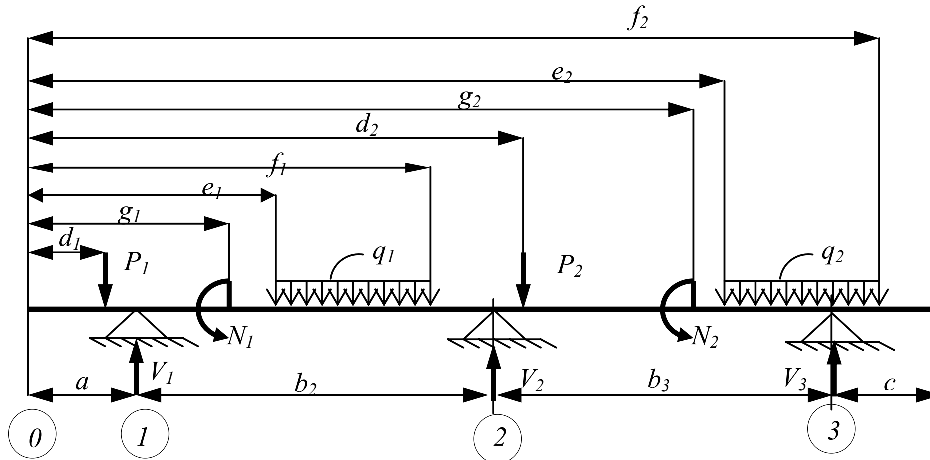
$$\begin{aligned}
V_2 &= \sum Y_s - V_0 - V_1; \\
M_2 &= \sum \bar{M}_{2s} - M_0 - V_0(b_1+b_2) - V_1 b_2.
\end{aligned} \tag{10.131}$$

Problema propusă

Se consideră o bară dreaptă situată pe trei reazeme punctuale rigide situate la distanțele b_1 şi b_2 cu două console de lungimi a şi c , având încărcarea generală din figura 1. Secțiunea barei este constantă de forma unei coroane circulare cu diametrul interior *3d* şi exterior *4d* (fig. 2). *Se cere:*

1. să se determine reacțiunile V_1 V_2 şi V_3 *;(2p)*
2. să se traseze diagramele de eforturi tăietoare *T* şi încovoietoare M_i ; *(2p)*
3. să se determine secțiunea periculoasă şi valoarea efortului încovoietor M_{max} ; *(1p)*
4. să se determine momentul de inerție I_y şi modulul de rezistență W_y al secțiunii în funcție de parametrul *d* şi să se dimensioneze bara dacă σ_a *=150 MPa ; (2p)*
5. să se determine săgeata w_0 şi rotirea φ_0 corespunzătoare capătului consolei din stânga, folosind ecuația celor trei săgeți (pentru secțiunile 0, 1 şi 2), dacă $E = 2 \cdot 10^5$ *MPa . (2p)*.

(Problemă examen, Model 2, Universitatea VALAHIA Târgoviste, 2006)



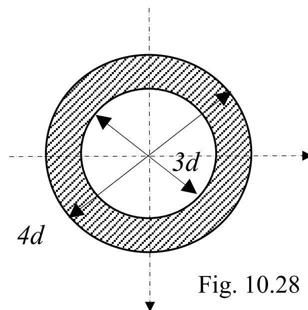


Fig. 10.28

DATE DE INTRARE

a (m)	b₂ (m)	b₃ (m)	c (m)	d₁ (m)	P₁ (kN)	d₂ (m)	P₂ (kN)
1	6	6	2	0	20	10	-20

g₁ (m)	N₁ (kNm)	g₂ (m)	N₂ (kNm)	e₁ (m)	f₁ (m)	q₁ (kN/m)
15	20	0	0	1	7	10

e₂ (m)	f₂ (m)	q₂ (kN/m)
7	13	-10

Răspuns :V_1*=55,208 kN;* V_2*=-13,75kN,* V_3*=-41,458kN.*

11

SISTEME PLANE DE BARE DREPTE ARTICULATE ÎN NODURI

11.1. Introducere

Modelele de calcul pentru studiul unor sisteme static determinate sau static nedeterminate formate din bare drepte articulate în noduri numite şi grinzi cu zăbrele, sunt sisteme deformabile, construite pe baza următoarelor ipoteze:

- barele drepte au secţiunea constantă şi lungimea mult mai mare în raport cu dimensiunile secţiunii;
- barele sistemului sunt articulate în noduri cu articulaţii perfecte (fără frecare): sferice (pentru sistemele spaţiale) sau cilindrice (pentru cele plane); articulaţiile sunt centrale (toate axele longitudinale ale barelor sunt concurente în centrul articulaţiei);
- datorită articulaţiilor barele sistemului sunt supuse numai la eforturi axiale de întindere sau compresiune.

Un sistem de bare articulate este *static nedeterminat interior* sau *hiperstatic* dacă eforturile din bare nu se pot determina folosind doar ecuaţiile de echilibru ale forţelor care concură în noduri, ecuaţii ce rezultă din metoda izolării nodurilor sau metoda secţiunilor.

Un sistem de bare articulate este *static nedeterminat exterior* dacă forţele de legătură cu mediul fix nu se pot determina folosind doar ecuaţiile de echilibru ale solidului rigid, ecuaţii ce rezultă aplicând teorema solidificării sau teorema echilibrului părţilor.

a. Un *sistem spaţial* format din bare articulate (*b* numărul de bare şi *n* de noduri) este *static determinat interior* dacă este îndeplinită condiţia:

$$b = 3n - 6 \qquad (11.1)$$

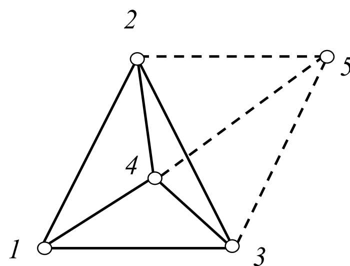


Fig. 11.1

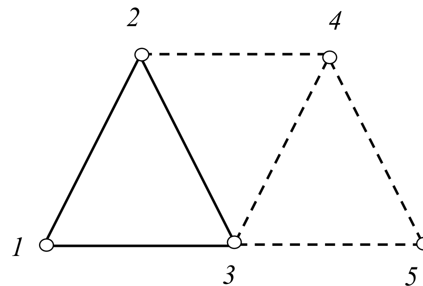


Fig. 11.2

Cel mai simplu sistem spaţial de bare articulate static determinat este sistemul tetraedric. Prin adăugarea unui nod (*n=1*) şi a trei bare (*b=3*) la acest sistem, conform relaţiei (11.1) nu îşi modifică starea static determinată (fig.11.1):

$$b+3=3(n+1)-6 \qquad (11.2)$$

Dacă $b > 3n - 6$ sistemul este static nedeterminat *interior sau hipersatic*. *Gradul de nedeterminare interior* se calculează cu ajutorul relaţiei:

$$GN_i=b - 3n+6 \qquad (11.3)$$

Dacă $b < 3n - 6$ sistemul devine cinematic (mecanism) având *gradul de mobilitate M* în funcţie de numărul de elemente şi clasa cuplelor cinematice ale sistemului. În

continuare se vor studia numai sistemele formate din bare drepte articulate *static determinate* şi *static nedeterminate interior sau exterior*.
b. Un *sistem plan* de bare articulate în noduri (*b* numărul de bare şi *n* de noduri) este *static determinat interior* dacă este îndeplinită condiția:

$$b=2n-3 \qquad (11.4)$$

Cel mai simplu sistem plan de bare articulate în noduri static determinat este format din trei bare (*b=3*) şi trei noduri (*n=3*) (fig. 11.2.). Prin adăugarea unui nod (*n=1*) şi a două bare (*b=2*), conform relației (11.4) sistemul nu îşi modifică starea static determinată (fig.11.2):

$$b+2=2(n+1)-3 \qquad (11.5)$$

Dacă $b > 2n-3$ sistemul plan de bare devine *static nedeterminat interior* sau *hiperstatic*. *Gradul de nedeterminare interior* se calculează cu ajutorul relației:

$$GN_i=b-2n+3 \qquad (11.6)$$

În cazul unui sistem *static nedeterminat exterior* gradul de nedeterminare se calculează ca diferența dintre numărul de necunoscute N_N introduse de legături şi numărul de ecuații de echilibru independente care se pot scrie. Astfel:

- pentru sistemele spațiale: $GN_e=N_N-6$ (11.7)
- pentru sisteme plane: $GN_e=N_N-3$ (11.8)

În cazul unui sistem plan de bare articulate ca cel din figura 11.3 : *n=5; b=8; N_N=5.* Acest sistem are gradul de nedeterminare interior: $GN_i= b-2n+3=1$
şi gradul de nedeterminare exterior: $GN_e=N_N-3=2$.

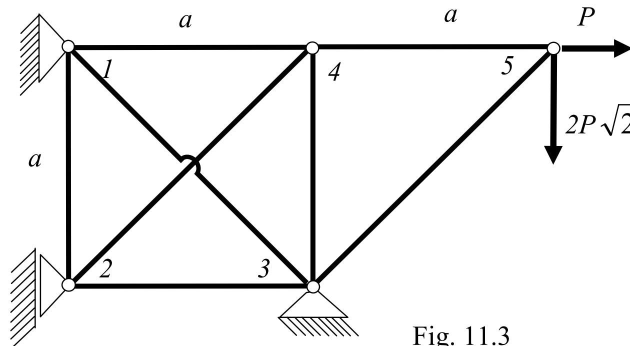


Fig. 11.3

11.2. Metoda eforturilor pentru sisteme static nedeterminate

Metoda eforturilor constă în transformarea sistemului static nedeterminat într-un sistem static determinat numit *sistem de bază* sau *fundamental* prin suprimarea unui număr de legături egal cu gradul de nedeterminare *GN* şi introducerea în locul acestora a necunoscutelor X_1, X_2, ... X_n numite *eforturi static nedeterminate*. Transformarea sistemului static nedeterminat în *sistem de bază* se poate realiza în mai multe moduri, astfel încât să nu se obțină un *sistem deformabil* sau *cinematic*.

Din punct de vedere mecanic sistemul real şi sistemul de bază sunt echivalente. Acestă echivalență se poate exprima prin identificarea deformațiilor şi deplasărilor secțiunilor corespunzătoare legăturilor suprimate.

Aceste deplasări se calculează pentru sistemul de bază folosind *principiul suprapunerii efectelor* atât pentru forțele exterioare cât și pentru eforturile static nedeterminate $X_1, X_2, ...$ obținându-se *ecuațiile canonice ale metodei eforturilor:*

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + ... + \delta_{1n}X_n = 0 \\
\delta_2 &= \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + ... + \delta_{2n}X_n = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_n &= \delta_{n0} + \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + ... + \delta_{nn}X_n = 0
\end{aligned} \qquad (11.9)$$

în care: δ_i este deplasarea secțiunii *i din sistemul real* pe direcția efortului static nedeterminat X_i sub acțiunea sarcinilor exterioare date *(i=1,2,...n)*;

δ_{i0} deplasarea secțiunii *i din sistemul de bază* pe direcția efortului X_i sub acțiunea sarcinilor exterioare date *(i=1,2,...n);*

δ_{ij} deplasarea secțiunii *i din sistemul de bază* pe direcția efortului X_i sub acțiunea sarcinii unitare $X_j=1$ *(i,j=1,2,...n).*

Deplasările δ_{io} *și* δ_{ij} se determină folosind metoda *MOHR-MAXWELL* :

$$\delta_{i0} = \sum_{k=1}^{n_b} \frac{N_{0k} n_{ik} \ell_k}{EA_k}; \quad \delta_{ij} = \sum_{k=1}^{n_b} \frac{n_{ik} n_{jk} \ell_k}{EA_k} \qquad (11.10)$$

în care : N_{0k} este efortul axial din bara *k* al sistemului de bază sub acțiunea sarcinilor exterioare ale sistemului real;

n_{ik} efortul axial din bara *k* al sistemului de bază sub acțiunea unei forțe unitare $X_i=1$.

Aplicația 11.1

Pentru sistemului plan de bare articulate din figura 11.3 să se determine, folosind metoda eforturilor, reacțiunile și eforturile din barele sistemului.

În figura 11.4 sunt prezentate două sisteme de bază. Se alege sistemul din figura 11.4.a, ca sistem de bază: acesta este un sistem nedeformabil, numărul de necunoscute static nedeterminate este egal cu gradul de nedeterminare (3) și deplasările pe direcțiile eforturilor necunoscute X_1, X_2 și X_3 sunt nule.

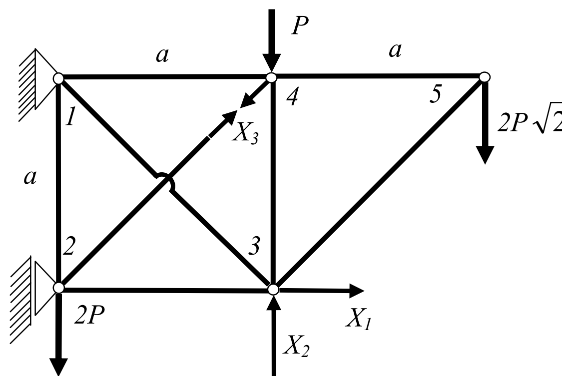


Fig. 11.4 a.

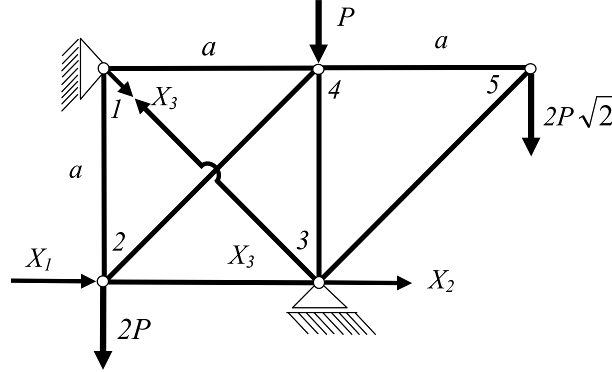


Fig. 11.4 b.

Ecuațiile canonice (11.9) se scriu în acest caz astfel:

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 = 0$$
$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 = 0 \qquad (11.11)$$
$$\delta_3 = \delta_{30} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 = 0$$

Deplasările δ_{i0} , δ_{ij} , *(i,j=1,2,3)* din sistemul de bază din figura 11.4.b. sunt prezentate în figurile 11.5.a, b, c, d :

δ_{10} , δ_{20} , δ_{30} – deplasările pe direcția eforturilor X_1 , X_2 , X_3 sub acțiunea forțelor date *P, 2P,* $2\sqrt{2}P$;

δ_{11}, δ_{21} , δ_{31} – deplasările pe direcțiile lui X_1 , X_2 , X_3 sub acțiunea forței $X_1=1;$

δ_{12}, δ_{22} , δ_{32} – deplasările pe direcțiile lui X_1 , X_2 , X_3 sub acțiunea forței $X_2=1;$

δ_{13}, δ_{23} , δ_{33} – deplasările pe direcțiile X_1 , X_2 , X_3 sub acțiunea forței $X_3=1;$

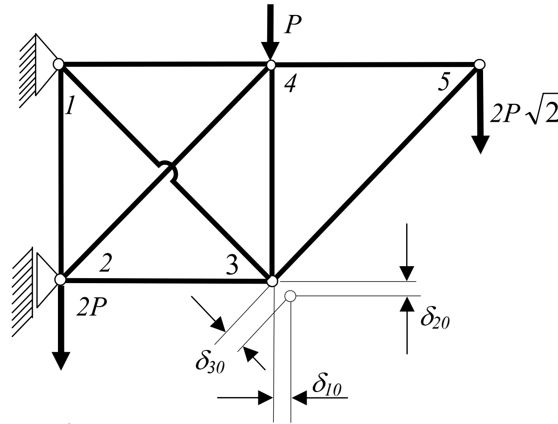


Fig. 11.5 *a.*

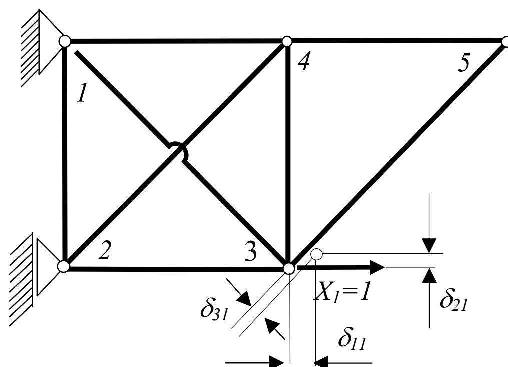


Fig.11.5 *b.*

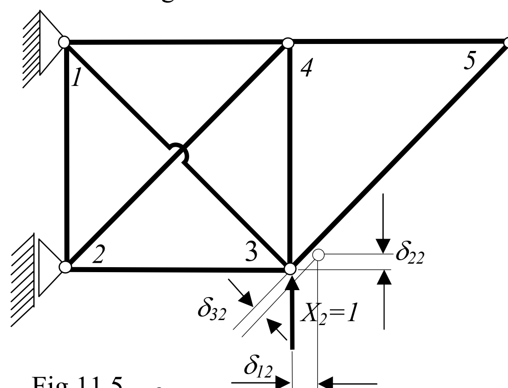


Fig.11.5 *c.*

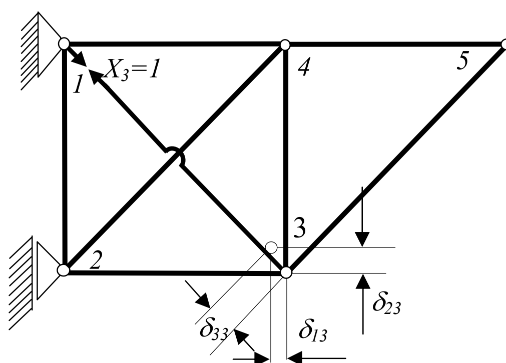
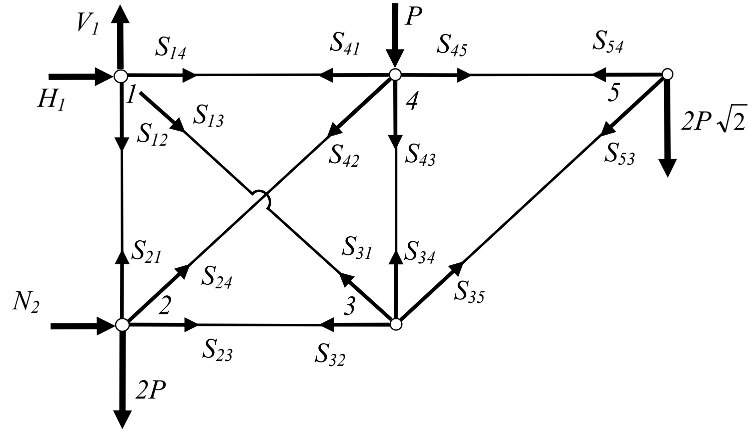


Fig.11.5 *d.*

Pentru a determina deplasările δ_{i0} , δ_{ij} se calculează eforturile din barele sistemului pentru cele patru cazuri de încărcare ale sistemului de bază folosind metoda izolării nodurilor. Rezultatele sunt prezentate în figurile 11.6, 11.7, 11.8 şi 11.9.



Nodul5: $S_{54}=S_{45}=2\sqrt{2}P$; $S_{53}=S_{35}=-4P$

Nodul3: $S_{34}=S_{43}=2\sqrt{2}P$; $S_{32}=S_{23}=-2\sqrt{2}P$; $S_{31}=S_{13}=0$

Nodul4: $S_{41}=S_{14}=(1+4\sqrt{2})P$; $S_{42}=S_{24}=(-4-\sqrt{2})P$

Nodul2: $S_{21}=S_{12}=(3+2\sqrt{2})P$; $N_2=(1+4\sqrt{2})P$

Fig.11.6 *Nodul1:* $H_1=(-1-4\sqrt{2})P$; $V_1=(3+2\sqrt{2})P$

Pentru verificarea rezultatelor obținute se folosește teorema solidificării și ecuațiile de echilibru pentru forțele exterioare direct aplicate și de legătură:

$$\sum F_x = 0: \quad N_2 + H_1 = 0$$
$$\sum F_y = 0: \quad V_1 - P - 2P - 2\sqrt{2}P = 0 \qquad (11.12)$$

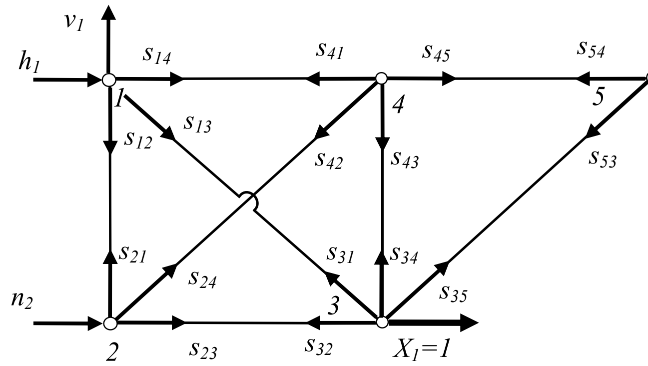
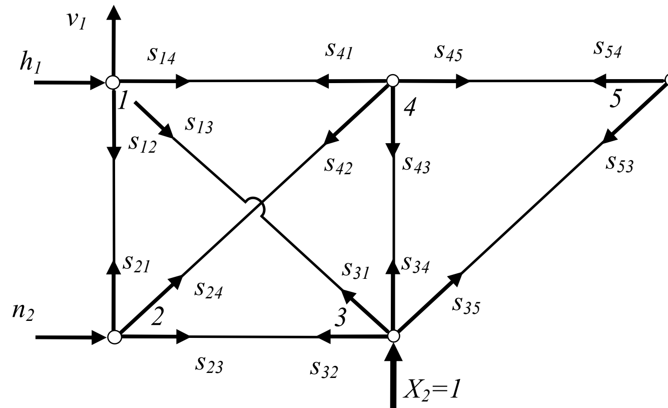


Fig.11.7 $s_{32}=s_{23}=1$; $n_2=-1$

Celelalte eforturi sunt nule



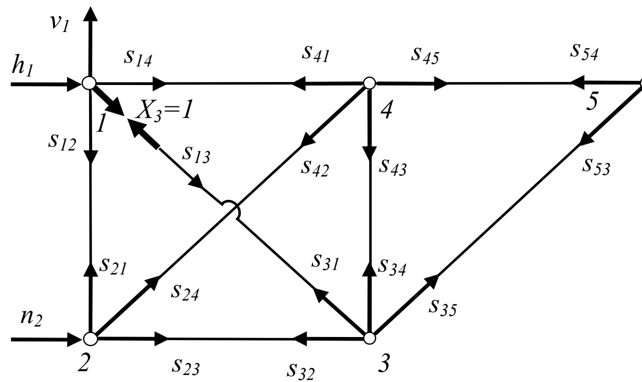
Nodul 3: $s_{34}= s_{43}= -1;\ s_{31}= s_{13}=0$

Nodul 4: $s_{42}= s_{24}=\sqrt{2}\ ;\ s_{41}= s_{14}= -1;$

Nodul 2: $s_{21}= s_{12}= -1;\ n_2= -1$

Nodul 1: $h_1= 1;\ v_1= -1$

Fig.11.8 *Celelalte eforturi sunt nule*



Nodul 3: $s_{34}= s_{43}=-\sqrt{2}/2\ ;\ s_{32}= s_{23}=-\sqrt{2}/2\ ;\ s_{31}= s_{13}=1;$

Nodul 4: $s_{42}= s_{24}=\sqrt{2}\ ;\ s_{41}= s_{14}= -\sqrt{2}/2\ ;$

Nodul 2: $s_{21}= s_{12}=-\sqrt{2}/2\ ;\ n_2= -1$

Nodul 1: $h_1= \sqrt{2}/2\ ;\ v_1= -\sqrt{2}/2\ .$

Fig.11.9 *Celelalte eforturi sunt nule*

Pentru cele patru cazuri de încărcare se obțin rezultatele în tabelul 11.1.

Tabelul 11.1

Bara *k* (i-j)	**Eforturile N_{0k}**	**Eforturile n_{1k}**	**Eforturile n_{2k}**	**Eforturile n_{3k}**	**Lungimea l_k**
1 (1-2)	$3+2\sqrt{2}\ P$	*0*	*-1*	$-\sqrt{2}/2$	*a*
2 (2-3)	$-2\sqrt{2}\ P$	*1*	*0*	$-\sqrt{2}/2$	*a*
3 (1-4)	$1+4\sqrt{2}\ P$	*0*	*-1*	$-\sqrt{2}/2$	*a*
4 (2-4)	$-4-\sqrt{2}\ P$	*0*	$\sqrt{2}$	*1*	$a\sqrt{2}$
5 (3-4)	$2\sqrt{2}\ P$	*0*	*-1*	$-\sqrt{2}/2$	*a*
6 (4-5)	$2\sqrt{2}\ P$	*0*	*0*	*0*	$a\sqrt{2}$
7 (3-5)	*- 4P*	*0*	*0*	*0*	*a*
8 (1-3)	*0*	*0*	*0*	*1*	$a\sqrt{2}$

Tabelul 11.2

Bara *k*	$N_{0k}\cdot n_{1k}\cdot l_k$	$N_{0k}\cdot n_{2k}\cdot l_k$	$N_{0k}\cdot n_{3k}\cdot l_k$	$n_{1k}\cdot n_{1k}\cdot l_k$	$n_{2k}\cdot n_{2k}\cdot l_k$
1 (1-2)	*0*	- $(3+2\sqrt{2})P$ *a*	$-(2+\frac{3}{2}\sqrt{2})\ P$ *a*	*0*	*a*
2 (2-3)	$-2\sqrt{2}\ Pa$	*0*	*2P*	*a*	*0*
3 (1-4)	*0*	- $(1+4\sqrt{2})Pa$	$-(4+\frac{\sqrt{2}}{2})\ Pa$	*0*	*a*
4 (2-4)	*0*	$-(8+2\sqrt{2})$ *Pa*	$-(2+4\sqrt{2})\ P$ *a*	*0*	$2\sqrt{2}\ a$
5 (3-4)	*0*	$-2\sqrt{2}\ Pa$	*-2P*	*0*	*a*
6 (4-5)	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
7 (3-5)	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*
8 (1-3)	*0*	*0*	*0*	*0*	*0*

Bara *k*	$n_{3k}\cdot n_{3k}\cdot l_k$	$n_{1k}\cdot n_{2k}\cdot l_k$	$n_{1k}\cdot n_{3k}\cdot l_k$	$n_{2k}\cdot n_{3k}\cdot l_k$
1 (1-2)	*a/2*	*0*	*0*	$\sqrt{2}/2\,a$
2 (2-3)	*a/2*	*0*	$-\sqrt{2}/2\,a$	*0*
3 (1-4)	*a/2*	*0*	*0*	$\sqrt{2}/2\,a$
4 (2-4)	$\sqrt{2}\ a$	*0*	*0*	*2a*
5 (3-4)	*a/2*	*0*	*0*	$\sqrt{2}/2\,a$
6 (4-5)	*0*	*0*	*0*	*0*
7 (3-5)	*0*	*0*	*0*	*0*
8 (1-3)	$\sqrt{2}\ a$	*0*	*0*	*0*

Înlocuind în relațiile (11.10) sumele din tabelul 11.2 rezultă deplasările δ_{i0} , δ_{ij}:

$$\delta_{10} = -2\sqrt{2}\,\frac{Pa}{EA};\quad \delta_{20} = \left(-12-10\sqrt{2}\right)\frac{Pa}{EA};\quad \delta_{30} = \left(-8-6\sqrt{2}\right)\frac{Pa}{EA};$$

$$\delta_{11} = \frac{a}{EA};\quad \delta_{22} = \left(3+2\sqrt{2}\right)\frac{a}{EA};\quad \delta_{33} = \left(2+2\sqrt{2}\right)\frac{a}{EA} \tag{11.13}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 0;\quad \delta_{13} = \delta_{31} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{a}{EA};\quad \delta_{23} = \delta_{32} = \left(2+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\frac{a}{EA}$$

Eforturile static nedeterminate X_1, X_2 și X_3 sunt soluțile ecuației matriceale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 3+2\sqrt{2} & 2+\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 2+\frac{3\sqrt{2}}{2} & 2+2\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = P \begin{Bmatrix} 2\sqrt{2} \\ 12+10\sqrt{2} \\ 8+6\sqrt{2} \end{Bmatrix} \tag{11.14}$$

Se obțin următoarele rezultate pentru eforturile static nedeterminate:

$$X_1 = 2\sqrt{2}P = 2{,}82843P;$$

$$X_2 = \frac{12+10\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = 4{,}48528\,P;\quad X_3 = 0\ . \tag{11.15}$$

Eforturile din barele sistemului și reacțiunile din legăturile 1 și 2 se determină din sistemul real după introducerea eforturilor static nedeterminate X_1, X_2 și X_3 sau din sistemul de bază prin suprapunerea efectelor pentru cele patru cazuri de încărcare conform relațiilor:

$$S_{ij} = S_{ij0} + s_{ij1}X_1 + s_{ij2}X_1 + s_{ij3}X_3 \tag{11.16}$$

Se obțin rezultatele din tabelul 11.3

Tabelul 11.3

Bara k (i-j , noduri de capăt)	**Eforturile N_k**
1 (1-2)	*1,343 P*
2 (2-3)	*0*
3 (1-4)	*2,172 P*
4 (2-4)	*0*
5 (3-4)	*-1,657 P*
6 (4-5)	*2,828 P*
7 (3-5)	*- 4P*

Reacțiunile se determină din sistemul real după introducerea eforturilor static nedeterminate X_1, X_2 și X_3 sau din sistemul de bază prin suprapunerea efectelor pentru cele patru cazuri de încărcare conform relațiilor:

$$H_1 = H_{10} + h_{11}X_1 + h_{12}X_2 + h_{13}X_3 = -2{,}17157\ P$$

$$V_1 = V_{10} + v_{11}X_1 + v_{12}X_2 + v_{13}X_3 = 1{,}34315\ P \tag{11.17}$$

$$N_2 = N_{20} + n_{21}X_1 + n_{22}X_2 + n_{23}X_3 = -0{,}657\,P$$

11.3. Metoda deplasărilor pentru sisteme plane din bare articulate

Metoda deplasărilor este o metodă de calcul matriceal a structurilor din bare articulate având la bază expresia matriceală a relației dintre forțele nodale şi deplasările nodale ale elementului de bară, în funcție matricea de rigiditate $[K^e]$:

$$\{F^e\} = [K^e] \cdot \{\delta^e\} \tag{11.18}$$

Expandarea, asamblarea acestor matrice şi scrierea ecuațiilor de echilibru ale forțelor nodale care concură în fiecare nod conduce la un sistem global de ecuații având ca necunoscute deplasările nodurilor.

Se consideră elementul de tip bară articulată la capete cuprins între nodurile *i* şi *j*, având secțiunea A^e constantă şi lungime L^e şi un sistem de axe local, astfel încât axa $\overline{O_1 x}$ să coincidă cu axa barei (fig. 11.10.a).

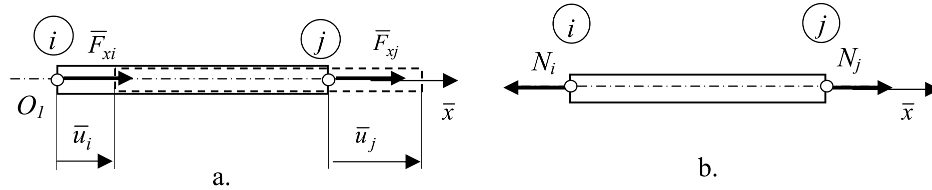


Fig. 11.10

Se exprimă *forțele nodale elementale* $\overline{F}_{xi}$, $\overline{F}_{xj}$ în funcție de *deplasările nodale* $\overline{u}_i$, $\overline{u}_j$ Forța nodală $\overline{F}_{xj}$ corespunzătoare nodului *j* coincide cu efortul axial N_j iar forța nodală $\overline{F}_{xi}$ este opusă efortului axial N_i (fig. 11.10.b):

$$\overline{F}_{xi} = -N_i ; \quad \overline{F}_{xj} = N_j ; \tag{11.19}$$

Deformația elementului de bară ΔL_{ij} se exprimă în funcție de deplasările nodale corespunzătoare $\overline{u}_i$ şi $\overline{u}_j$ astfel:

$$\Delta L_{i-j} = \overline{u}_j - \overline{u}_i = \frac{N_i L^e}{EA^e} = \frac{N_j L^e}{EA^e} \quad \Rightarrow N_i = N_j = -\frac{EA^e}{L^e}\left(\overline{u}_i - \overline{u}_j\right) \tag{11.20}$$

Ținând seama de relațiile (11.19) se scriu forțele nodale elementale $\overline{F}_{xi}$ şi $\overline{F}_{xj}$ în funcție de deplasările nodale corespunzătoare u_i şi u_j astfel:

$$\begin{cases} \overline{F}_{xi} = -N_i = \dfrac{EA^e}{L^e}\left(\overline{u}_i - \overline{u}_j\right) \\ \overline{F}_{xj} = N_j = -\dfrac{EA^e}{L^e}\left(\overline{u}_i - \overline{u}_j\right) \end{cases} \tag{11.21}$$

Relațiile (11.26) se mai scriu sub forma matriceală astfel:

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}_{xi} \\ \overline{F}_{xj} \end{Bmatrix} = \frac{EA^e}{L^e}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{u}_j \end{Bmatrix} \tag{11.22}$$

Se consideră un sistemul global de axe de coordonate Oxy şi unul local $\overline{O_1xy}$. Deplasările nodurilor i şi j după cele două direcții $\overline{O_1x}$ respectiv $\overline{O_1y}$ sunt notate $\overline{u}_i, \overline{v}_i, \overline{u}_j, \overline{v}_j$ iar forțele nodale cu $\overline{F}_{xi}, \overline{F}_{yi}, \overline{F}_{xj}, \overline{F}_{yj}$ ($\overline{F}_{yi}=0;\quad \overline{F}_{yj}=0$) (fig.11.11).

Relația matriceală între forțele şi deplasările nodale (11.22) se mai poate scrie în sistemul de axe local $\overline{O_1xy}$ astfel:

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}_{xi} \\ \overline{F}_{yi} \\ \overline{F}_{xj} \\ \overline{F}_{yj} \end{Bmatrix} = \frac{EA^e}{L^e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \\ \overline{u}_j \\ \overline{v}_j \end{Bmatrix} \tag{11.23}$$

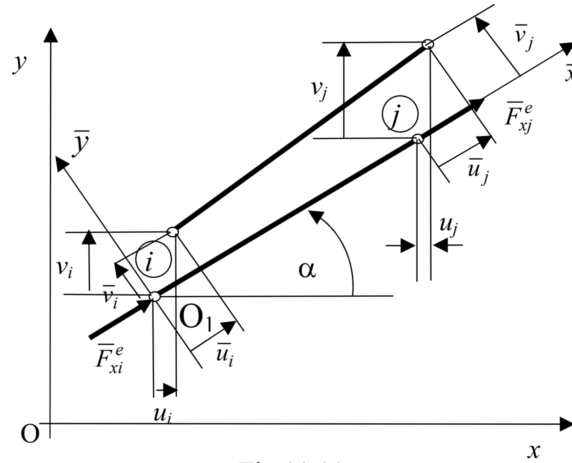


Fig.11.11

Relația (11.23) se mai scrie condensat sub forma:

$$\left\{\overline{F}^e\right\} = \left\lfloor \overline{K}^e \right\rfloor \cdot \left\{\overline{\delta}^e\right\} \tag{11.24}$$

unde: $\left\lfloor \overline{K}^e \right\rfloor$ este matricea de rigiditate a elementului e în coordonate locale;

$\left\{\overline{\delta}^e\right\}$ matricea coloană a deplasărilor nodale în coordonate locale;

$\left\{\overline{F}^e\right\}$ matricea coloană a forțelor nodale în coordonate locale.

Deplasările nodale locale $\overline{u}_i, \overline{v}_i, \overline{u}_j, \overline{v}_j$ se exprimă în funcție de deplasările *globale* u_i, v_i, u_j, v_j şi de unghiul α dintre axele $O\overline{x}$ şi Ox astfel (fig. 11.11):

$$\begin{aligned} \overline{u}_i &= u_i \cos\alpha + v_i \sin\alpha; & \overline{u}_j &= u_j \cos\alpha + v_j \sin\alpha \\ \overline{v}_i &= -u_i \sin\alpha + v_i \cos\alpha; & \overline{v}_j &= -u_j \sin\alpha + v_j \cos\alpha \end{aligned} \tag{11.25}$$

Notând cosinuşii directori $\cos\alpha = \ell,\ \sin\alpha = m$ relațiile (11.25) se scriu sub formă matriceală astfel:

$$\begin{Bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \\ \overline{u}_j \\ \overline{v}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell & m & 0 & 0 \\ -m & \ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell & m \\ 0 & 0 & -m & \ell \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \qquad (11.26)$$

sau sub forma: $\{\overline{\delta}^e\} = [T] \cdot \{\delta^e\}$ (11.27)

în care: $[T]$ este *matricea de transfer* din sistemul local $\overline{O_1xy}$ în cel global Oxy.

În mod analog se exprimă forțele nodale elementale din sistemul local $\overline{F}^e_{xi}, \overline{F}^e_{yi}, \overline{F}^e_{xj}, \overline{F}^e_{yj}$ în funcție de forțele nodale elementale *din sistemul global* $F^e_{xi}, F^e_{yi}, F^e_{xj}, F^e_{yj}$ (fig. 11.12):

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}^e_{xi} \\ \overline{F}^e_{yi} \\ \overline{F}^e_{xj} \\ \overline{F}^e_{yj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell & m & 0 & 0 \\ -m & \ell & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ell & m \\ 0 & 0 & -m & \ell \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F^e_{xi} \\ F^e_{xi} \\ F^e_{xi} \\ F^e_{xi} \end{Bmatrix} \qquad (11.28)$$

sau sub forma condensată: $\{\overline{F}^e\} = [T] \cdot \{F^e\}$ (11.29)

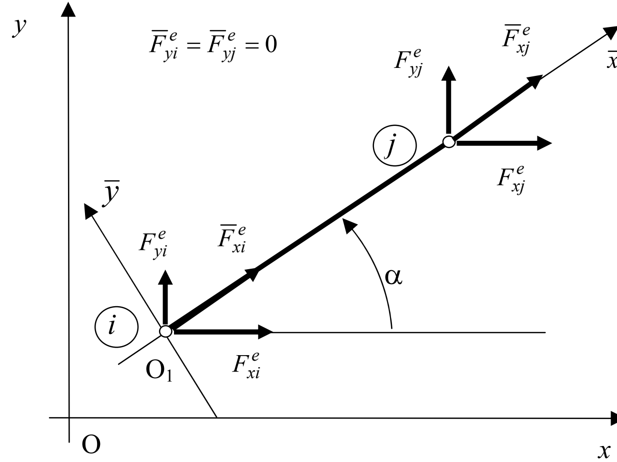


Fig. 11.11

Transpusa matricei de transfer [T] este identică cu inversa ei, întrucât verifică relația: $[T] \cdot [T]^t = [I]$ (11.30)

Introducând relațiile (11.27) și (11.29) în relația (11.24) se obține:

$$[T] \cdot \{F^e\} = \lfloor \overline{K}^e \rfloor \cdot [T] \cdot \{\delta^e\} \qquad (11.31)$$

Înmulțind la stânga relația (11.31) cu matricea inversă $[T]^{-1} = [T]^t$, se obține:

$$[T]^t \cdot [T] \cdot \{F^e\} = [T]^t \left[\overline{K}^e\right] \cdot [T] \cdot \{\delta^e\} \qquad (11.32)$$

S-a obținut *relația matriceală între forțele elementale și deplasările nodale globale* corespunzătoare sistemului de axe global *Oxy*:

$$\{F^e\} = \left[K^e\right] \cdot \{\delta^e\} \qquad (11.33)$$

în care: $\left[K^e\right]$ este *matricea de rigiditate a elementului în coordonate globale* având expresia:

$$\left[K^e\right] = [T]^t \left[\overline{K}^e\right] \cdot [T] = \frac{EA^e}{L^e} \begin{bmatrix} \ell^2 & \ell m & -\ell^2 & -\ell m \\ \ell m & m^2 & -\ell m & -m^2 \\ -\ell^2 & -\ell m & \ell^2 & \ell m \\ -\ell m & -m^2 & \ell m & m^2 \end{bmatrix} \qquad (11.34)$$

Matricea de rigiditate a elementului în coordonate globale (11.34) are următoarele proprietăți:

- toate elementele de pe diagonala principală sunt pozitive;
- matricea este simetrică în raport cu diagonala principală
- suma elementelor situate pe linii și pe coloane este nulă;

Algoritmul metodei deplasărilor cuprinde următorii pași:

1. Scrierea relațiilor matriceale dintre forțele nodale și deplasările corespunzătoare pentru fiecare dintre elementele sistemului.
2. Scrierea relațiilor matriceale între forțele elementale și deplasările nodale corespunzătoare, în dimensiunea deplasărilor globale (expandarea matricelor de rigiditate)
3. Scrierea ecuațiilor de echilibru dintre forțele nodale elementale și sarcinile exterioare care acționează asupra fiecărui nod (asamblarea matricelor), obținerea ecuației matriceale globale (introducerea încărcărilor);
4. Introducerea condițiilor la limită (deplasări impuse), rezolvarea ecuației matriceale globale și determinarea deplasărilor necunoscute.
5. Calculul reacțiunilor necunoscute și al eforturilor din bare

Aplicația 11.2

Pentru sistemul plan de bare articulate legată de mediul fix în nodurile *1, 2* şi *3* asupra căreia acționează în nodurile *2, 4* şi *5* forțele exterioare $2P$, P şi $2\sqrt{2}P$ ca în figura 11.12, să se determine, folosind metoda deplasărilor, reacțiunile şi eforturile din barele sistemului.

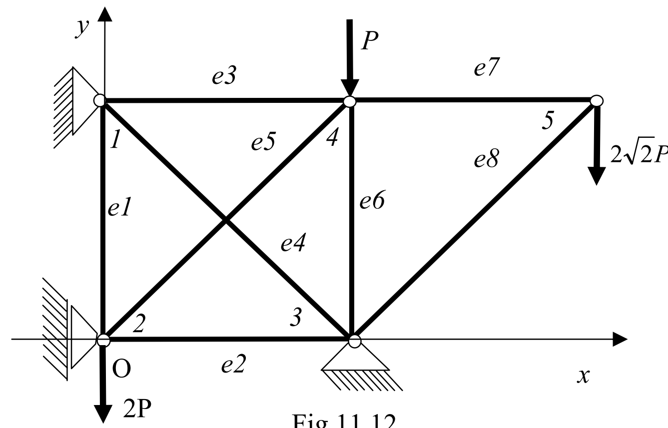


Fig.11.12

Algoritmul metodei deplasărilor cuprinde:

1. Scrierea relațiilor matriceale dintre forțele nodale şi deplasările corespunzătoare pentru fiecare dintre cele şapte elemente ale sistemului.

În tabelul 11.4 sunt definite elementele sistemului de bare articulate în raport cu sistemul de coordonate global *Oxy* (fig.11.12).

Tabelul 11.4

Element	*Nodurile i-j*		*Coordonatele nodurilor în Oxy*				ℓ	*m*	L^e
	i	*j*	x_i	y_i	x_j	y_j	$(\cos\alpha)$	$(\sin\alpha)$	
e1	*1*	*2*	*0*	*a*	*0*	*0*	*0*	*-1*	*a*
e2	*2*	*3*	*0*	*0*	*a*	*0*	*1*	*0*	*a*
e3	*1*	*4*	*0*	*a*	*a*	*a*	*1*	*0*	*a*
e4	*1*	*3*	*0*	*a*	*a*	*0*	$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}a$
e5	*2*	*4*	*0*	*0*	*a*	*a*	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}a$
e6	*3*	*4*	*a*	*0*	*a*	*a*	*0*	*1*	*a*
e7	*4*	*5*	*a*	*a*	*2a*	*a*	*1*	*0*	*a*
e8	*3*	*5*	*a*	*0*	*2a*	*a*	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}a$

Matricea de rigiditate în coordonate globale (11.34) se scrie:

- pentru elementele *e1* având : $\alpha = -90^0 \Rightarrow \ell = 0,\; m = -1$ şi *e6* având : $\alpha = 90^0 \Rightarrow \ell = 0,\; m = 1$, matricea de rigiditate are aceeaşi formă:

$$\left[K^{e1}\right] = \left[K^{e6}\right] = \frac{EA}{a}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (11.35)$$

- pentru elementele *e2, e3, e7* având : $\alpha = 0 \Rightarrow \ell = 1,\; m = 0$ rezultă:

$$\left[K^{e2}\right] = \left[K^{e3}\right] = \left[K^{e7}\right] = \frac{EA}{a}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (11.36)$$

- pentru elementele *e5, e8* având : $\alpha = 45^0 \Rightarrow \ell = \sqrt{2}/2;\; m = \sqrt{2}/2$ matricea de rigiditate are aceeaşi formă:

$$\left[K^{e5}\right] = \left[K^{e8}\right] = \frac{EA}{2\sqrt{2}a}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (11.37)$$

- pentru elementul *e4* având : $\alpha = -45^0 \Rightarrow \ell = \sqrt{2}/2;\; m = -\sqrt{2}/2$ matricea de rigiditate are forma:

$$\left[K^{e4}\right] = \frac{EA}{2\sqrt{2}a}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad (11.38)$$

2. Scrierea relațiilor matriceale între forțele elementale şi deplasările nodale corespunzătoare, în dimensiunea deplasărilor globale (expandarea matricelor) :

- elementul *e1 (1-2)*:

$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^{e1} \\ F_{y1}^{e1} \\ F_{x2}^{e1} \\ F_{y2}^{e1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & -1 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & -1 & 0 & 1 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \qquad (11.39)$$

- elementul *e2 (2-3)*:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{x2}^{e2} \\ F_{y2}^{e2} \\ F_{x3}^{e2} \\ F_{y3}^{e2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & 0 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -1 & 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \tag{11.41}$$

- elementul *e3 (1-4)*:

$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^{e3} \\ F_{y1}^{e3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{x4}^{e3} \\ F_{y4}^{e3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \tag{11.42}$$

- elementul *e4 (1-3)*:

$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^{e4} \\ F_{y1}^{e4} \\ 0 \\ 0 \\ F_{x3}^{e4} \\ F_{y3}^{e4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2\sqrt{2}a} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 1 & \cdot & \cdot & 1 & -1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & -1 & \cdot & \cdot & -1 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \tag{11.46}$$

- elementul *e5 (2-4)*:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{x2}^{e5} \\ F_{y2}^{e5} \\ F_{x3}^{e5} \\ F_{y3}^{e5} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2\sqrt{2}a} \begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & 1 & 1 & -1 & -1 & . & . & . & . \\ . & . & 1 & 1 & -1 & -1 & . & . & . & . \\ . & . & -1 & -1 & 1 & 1 & . & . & . & . \\ . & . & -1 & -1 & 1 & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \qquad (11.44)$$

- elementul *e6 (3-4)*:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{x3}^{e6} \\ F_{y3}^{e6} \\ F_{x4}^{e6} \\ F_{y4}^{e6} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & 0 & 1 & 0 & -1 & . & . \\ . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ . & . & . & . & 0 & -1 & 0 & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \qquad (11.40)$$

- elementul *e7 (4-5)*:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{x4}^{e7} \\ F_{y4}^{e7} \\ F_{x5}^{e7} \\ F_{y5}^{e7} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 1 & 0 & -1 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & -1 & 0 & 0 & 1 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \qquad (11.43)$$

- elementul *e8 (3-5)*:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{x3}^{e8} \\ F_{y3}^{e8} \\ 0 \\ 0 \\ F_{x5}^{e8} \\ F_{x5}^{e8} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{2\sqrt{2}a} \begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & -1 & -1 \\ . & . & . & . & 1 & 1 & . & . & -1 & -1 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & -1 & -1 & . & . & 1 & 1 \\ . & . & . & . & -1 & -1 & . & . & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} \qquad (11.45)$$

Prin însumarea membru cu membru a relațiilor matriceale (11.39) … (11.46) se obține ecuația matriceală globală:

$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^{e1}+F_{x1}^{e3}+F_{x1}^{e4} \\ F_{y1}^{e1}+F_{y1}^{e2}++F_{y1}^{e4} \\ F_{x2}^{e1}+F_{x2}^{e2}+F_{x2}^{e5} \\ F_{y2}^{e1}+F_{y2}^{e2}+F_{y2}^{e5} \\ F_{x3}^{e2}+F_{x3}^{e4}+F_{x3}^{e6}+F_{x3}^{e8} \\ F_{y3}^{e2}+F_{y3}^{e4}+F_{y3}^{e6}++F_{y3}^{e8} \\ F_{x4}^{e3}+F_{x4}^{e5}+F_{x4}^{e6}+F_{x4}^{e7} \\ F_{y4}^{e3}+F_{y4}^{e5}+F_{y4}^{e6}+F_{y4}^{e7} \\ F_{x5}^{e7}+F_{x5}^{e8} \\ F_{y5}^{e7}+F_{y5}^{e8} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{a} \begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 & . & . \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & . & . \\ 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & . & . \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 & 1+\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 1+\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 2+\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ . & . & . & . & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix}$$

(11.47)

3. Scrierea ecuațiilor de echilibru dintre forțele nodale elementale și sarcinile exterioare care acționează asupra fiecărui nod (asamblarea matricelor), obținerea ecuației matriceale globale.

La scrierea ecuațiilor, se ține seama că forțele ce acționează asupra nodurilor au sensuri opuse forțelor elementale. Ecuațiile de echilibru ale forțelor elementale şi a forțelor exterioare pentru fiecare nod se scriu pentru fiecare nod astfel (fig.11.13):

- nodul 1: $$F_{x1}^{e1} + F_{x1}^{e2} = H_1 \qquad F_{y1}^{e1} + F_{y1}^{e2} = V_1 \tag{11.48}$$
- nodul 2: $$F_{x2}^{e1} + F_{x2}^{e3} + F_{x2}^{e4} = H_2 \qquad F_{y2}^{e1} + F_{y2}^{e3} + F_{y2}^{e4} = V_2 \tag{11.49}$$
- nodul 3: $$F_{x3}^{e4} + F_{x3}^{e5} + F_{x3}^{e6} = 0 \qquad F_{y3}^{e4} + F_{y3}^{e5} + F_{y3}^{e6} = V_3 \tag{11.50}$$
- nodul 4: $$F_{x4}^{e2} + F_{x4}^{e3} + F_{x4}^{e5} + F_{x4}^{e7} = 0 \qquad F_{y4}^{e2} + F_{y4}^{e3} + F_{x4}^{e5} + F_{x4}^{e7} = 0 \tag{11.51}$$
- nodul 5: $$F_{x5}^{e6} + F_{x5}^{e7} = P \qquad F_{y5}^{e6} + F_{y5}^{e7} = -2P \tag{11.52}$$

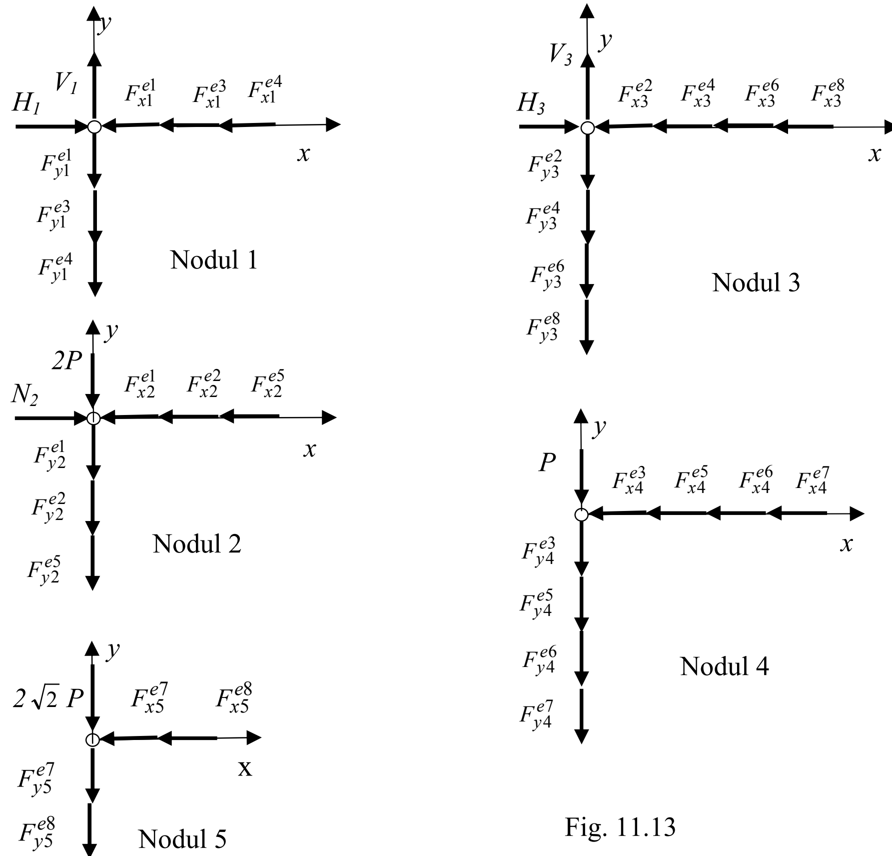


Fig. 11.13

Ecuațiile de echilibru (11.48) ... (11.52) dintre forțele nodale elementale şi forțele exterioare se pot scrie sub formă matriceală astfel:

$$\left\{\begin{array}{c} F_{x1}^{e1}+F_{x1}^{e2} \\ F_{y1}^{e1}+F_{y1}^{e2} \\ F_{x2}^{e1}+F_{x2}^{e3}+F_{x2}^{e4} \\ F_{y2}^{e1}+F_{y2}^{e3}+F_{y2}^{e4} \\ F_{x3}^{e3}+F_{x3}^{e4}+F_{x3}^{e5} \\ F_{y3}^{e3}+F_{y3}^{e4}+F_{y3}^{e5} \\ F_{x4}^{e2}+F_{x4}^{e3}+F_{x4}^{e5}+F_{x4}^{e7} \\ F_{y4}^{e2}+F_{y4}^{e3}+F_{y4}^{e5}+F_{y4}^{e7} \\ F_{x5}^{e6}+F_{x5}^{e7} \\ F_{y5}^{e6}+F_{y5}^{e7} \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} H_1 \\ V_1 \\ N_2 \\ -2P \\ H_3 \\ V_3 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ -2\sqrt{2}P \end{array}\right\} \tag{11.53}$$

Ținând seama de relația (11.47), relația matriceală (11.53) se scrie:

$$\frac{EA}{a}\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 & . & . \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & . & . \\ 0 & 0 & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & . & . \\ 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & . & . \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 & 1+\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 1+\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -1 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & 2+\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ . & . & . & . & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ . & . & . & . & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}\cdot\left\{\begin{array}{c} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} H_1 \\ V_1 \\ N_2 \\ -2P \\ H_3 \\ V_3 \\ 0 \\ -P \\ 0 \\ -2\sqrt{2}P \end{array}\right\}$$

(11.54)

Relația matriceală (11.54) între forțele exterioare şi deplasările nodale globale se scrie sub forma condensată astfel:

$$\{P\}=[K]\cdot\{\delta\} \tag{11.55}$$

unde: $[K]$ este matricea de rigiditate globală a sistemului;

$\{\delta\}$ matricea coloană a deplasărilor nodale în coordonate globale;

$\{P\}$ matricea coloană a forțelor exterioare.

Din expresia matricei de rigiditate globale a structurii (11.54) se observă că termenii de pe diagonala principală sunt pozitivi, suma termenilor de pe linii sau coloane este zero (matricea este singulară) și este simetrică în raport cu prima diagonală. Pentru ridicarea singularității matricei de rigiditate se elimină liniile și coloanele corespunzătoare legăturilor.

4. Introducerea condițiilor la limită (deplasări impuse), rezolvarea ecuației matriceale obținute și determinarea deplasărilor necunoscute.

Dacă în ecuația matriceală (11.54) se introduc condițiile la limită care corespund legăturilor sistemului cu mediul fix. Acestea sunt:

$$u_1=v_1=u_2=u_3=v_3=0 \tag{11.56}$$

Pentru ridicarea singularității matricei de rigiditate se elimină liniile *1, 2, 3, 5 și 6* corespunzătoare reacțiunilor necunoscute H_1, V_1, N_2, H_3, V_3 și coloanele *1, 2, 3, 5 și 6* corespunzătoare deplasărilor nule. Se obține ecuația matriceală care permite determinarea deplasărilor necunoscute v_2, u_4, v_4, u_5, v_5:

$$\begin{bmatrix} 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 2+\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1+\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_2 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{Bmatrix} = \frac{Pa}{EA} \begin{Bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -2\sqrt{2} \end{Bmatrix} \tag{11.57}$$

Rezolvând sistemul se obțin valorile deplasărilor necunoscute:

$$\begin{aligned} &v_2 = -1{,}34315\frac{Pa}{EA}; \quad u_4 = 2{,}17157\frac{Pa}{EA}; \quad v_4 = -1{,}65685\frac{Pa}{EA}; \\ &u_5 = 5\frac{Pa}{EA}; \qquad v_5 = -13\frac{Pa}{EA}. \end{aligned} \tag{11.58}$$

5. Calculul reacțiunilor și al eforturilor din bare

Din ecuațiile corespunzătoare liniilor 1, 2, 3, 4 și 6 ale ecuației matriceale globale (11.55) se determină reacțiunile necunoscute:

$$\begin{aligned} &H_1 = -u_4\frac{EA}{a} = 2{,}17157\,P; \qquad V_1 = -v_2\frac{EA}{a} = 1{,}34315\,P; \\ &N_2 = (v_2 - u_4 - v_4)\frac{EA}{2\sqrt{2}a} = -0{,}65685\,P; \\ &H_3 = -(u_5 + v_5)\frac{EA}{2\sqrt{2}a} = 2{,}82843\,P; \\ &V_3 = \left[-v_4 - \frac{1}{2\sqrt{2}}(u_5 + v_5)\right]\frac{EA}{a} = 4{,}48528\,P. \end{aligned} \tag{11.59}$$

11.4. Probleme propuse

Pentru sistemele plane de bare articulate rezemate şi legate la mediul fix ca în figurile 11.14 şi 11.15 se cunosc : *E, A, a,* şi *P*. Folosind metoda deplasărilor se cere:
1. să se determine deplasările nodurilor libere;
2. să se determine reacţiunile din legăturile barelor cu mediul fix.

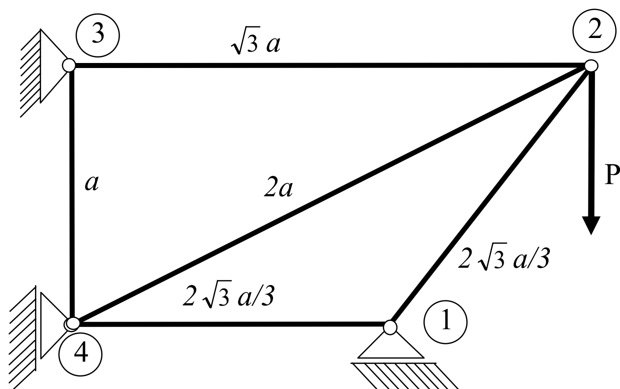


Fig.11.14

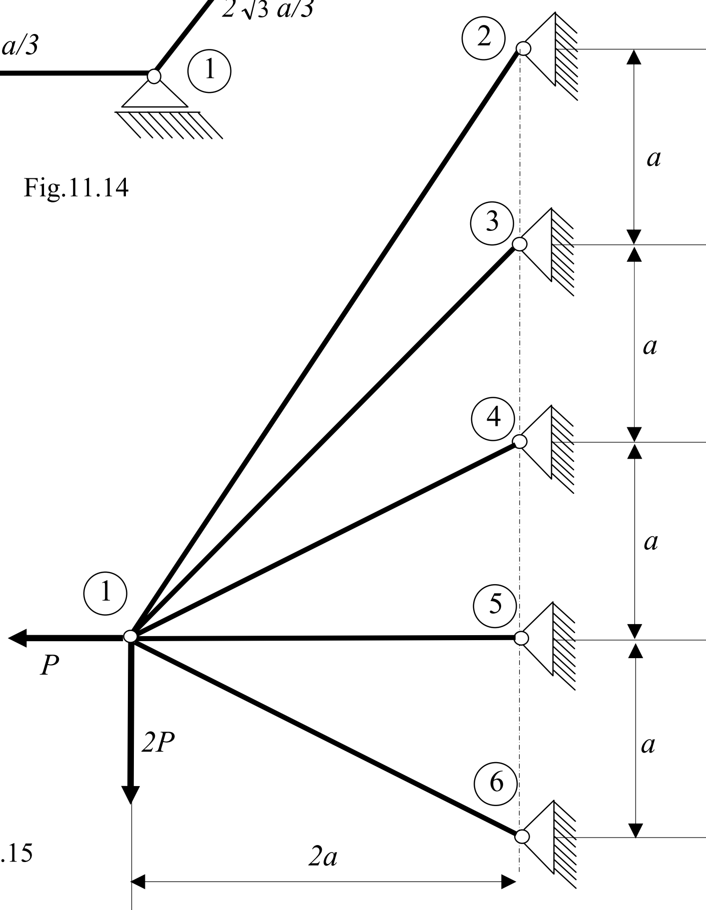


Fig.11.15

12

SISTEME PLANE DE BARE DREPTE CU NODURI RIGIDE

12.1. Introducere

Sistemul plan format din bare drepte cu noduri rigide este un sistem *static nedeterminat exterior* dacă nu se pot determina toate forțele de legătură cu mediul fix folosind ecuațiile de echilibru din Mecanica solidului, respectiv un sistem *static nedeterminat interior* dacă nu se pot determina toate eforturile din barele sale folosind ecuațiile de echilibru ale eforturilor şi forțelor exterioare.

Gradul de nedeterminare exterior GN_e pentru un sistem plan *static nedeterminat* este diferența dintre numărul de necunoscute N_N introduse de legături şi numărul de ecuații de echilibru independente ce se pot scrie din Mecanica solidului:

$$GN_e=N_N-3 \tag{12.1}$$

Gradul de nedeterminare interior GN_i pentru un sistem plan *static nedeterminat* se calculează astfel:

$$GN_i=3n \tag{12.2}$$

în care *n* este *numărul de contururi independente închise*.

Sistemul din figura 12.1.a este *static nedeterminat exterior şi interior* având $N_N=6$ necunoscute din legăturile cu mediul fix (12.1.b) şi $n=1$ numărul de contururi independente având următoarele grade de nedeterminare:

- interior: $GN_i =N_N-3$ (12.3)
- exterior: $GN_e = 3n =3$ (12.4)

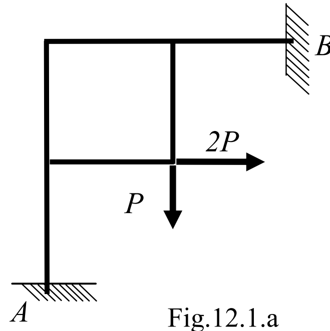


Fig.12.1.a

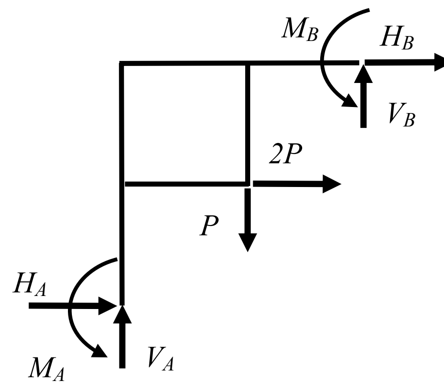


Fig.12.1.b

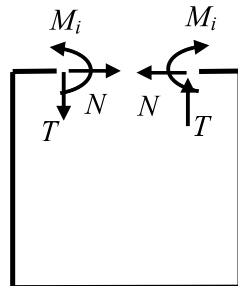


Fig.12.2

Conturul închis al sistemului plan de bare cu noduri rigide (un cadru dreptunghiular) introduce trei necunoscute care corespund celor trei eforturi într-o secţiune a acestui contur: *N* efortul axial, *T* efortul tăietor şi M_i efortul încovoietor, conform figurii 12.2. Pentru cadrul din figura 12.1.a gradul de nedeterminare total este:

$$GN = GN_e + GN_i = 6 \qquad (12.5)$$

Dacă se secţionează cadrul din figura 12.1 cu un pan imaginar se introduc eforturile secţionale corespunzătoare barelor secţionate: $N_1, T_1, M_{i1}, N_2, T_2, M_{i2}$ pentru fiecare din cele două subsisteme static determinate obţinute, ca în figura 12.3. Gradul de nedeterminare al sistemului este egal cu numărul de eforturi necunoscute static nedeterminate corespunzătoare barelor secţionate:

$$GN = 6 \qquad (12.6)$$

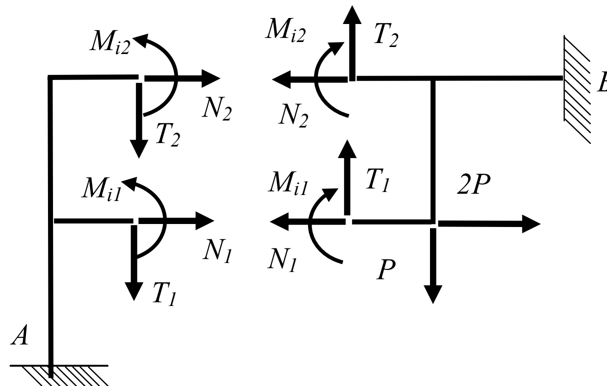


Fig.12.3

12.2 Metoda eforturilor pentru sisteme static nedeterminate

12.2.1.Algoritmul metodei eforturilor

1. Se alege un *sistem static determinat* care se obţine din sistemul real prin suprimarea unui număr de legături exterioare, numit *sistemul de bază sau fundamental*;
2. Se înlocuiesc legăturile suprimate cu *necunoscutele static nedeterminate* $X_1, X_2, X_3, \ldots$ conform axiomei legăturilor;
3. Se scriu deplasările pentru unele secţiuni ale sistemului de bază (în care acţionează eforturile static nedeterminate $X_1, X_2, X_3, \ldots$), deplasări care trebuie să fie identice cu cele ale sistemului dat (impuse sau nule). Aceste deplasări se determină prin suprapunerea efectelor forţelor exterioare şi a eforturilor static nedeterminate care acţionează asupra sistemului de bază:

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \ldots + \delta_{1n}X_n \\
\delta_2 &= \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \ldots + \delta_{2n}X_n \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\delta_n &= \delta_{n0} + \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \ldots + \delta_{nn}X_n
\end{aligned} \qquad (12.7)$$

în care: δ_i este deplasarea *din sistemul real* pe direcția efortului static nedeterminat X_i sub acțiunea sarcinilor exterioare (impuse sau nule);

δ_{i0} deplasarea *din sistemul de bază* pe direcția efortului X_i sub acțiunea aceloraşi sarcini exterioare *(i=1,2,...n);*

δ_{ij} deplasarea *din sistemul de bază* pe direcția efortului X_i sub acțiunea unei sarcini unitare $X_j=1(i=1,2,...n)$.

Deplasările δ_{i0} *şi* δ_{ij} se determină folosind metoda *MOHR-MAXWELL* luând în calcul eforturile axiale şi încovoietoare (s-a neglijat efectul eforturilor tăietoare asupra deformațiilor sistemului):

$$\delta_{i0} = \sum\left(\int \frac{n_i N_0}{EA}dx + \int \frac{m_i M_0}{EI}dx\right) \qquad i = 1,2,...$$

$$\delta_{ik} = \sum\left(\int \frac{n_i n_k}{EA}dx + \int \frac{m_i m_k}{EI}dx\right) \qquad i,k = 1,2 \tag{12.8}$$

în care: N_0, M_0 sunt eforturile axiale respectiv încovoietoare care se obțin în sistemul de bază sub acțiunea sarcinilor din sistemul real.

n_i, m_i , eforturile axiale respectiv încovoietoare care se obțin în sistemul de bază sub acțiunea eforturilor static nedeterminate unitare: $X_i=1$;

Se determină reacțiunile şi diagramele de eforturi *N, T şi M* direct:

$$N = N_0 + n_1X_1 + n_2X_2 + ...$$
$$T = T_0 + t_1X_1 + t_2X_2 + ... \tag{12.9}$$
$$M = M_0 + m_1X_1 + m_2X_2 + ...$$

sau prin aplicarea principului suprapunerii efectelor folosind relațiile:

$$H_A = H_{A0} + h_{A1}X_1 + h_{A2}X_2 + h_{A3}X_3 + ...$$
$$V_A = V_{A0} + v_{A1}X_1 + v_{A2}X_2 + v_{A3}X_3 + ... \tag{12.10}$$
$$M_A = N_{A0} + n_{A1}X_1 + n_{A2}X_2 + n_{A3}X_3 + ...$$

12.2.2. Simetrii în sisteme static nedeterminate

Metoda eforturilor constă în rezolvarea sistemului static determinat numit sistem de bază obținut prin suprimarea legăturilor exterioare sau a interioare având un număr mare de necunoscute X_1, X_2, X_3, ... Anumite sisteme prezintă simetrii care permit de la început eliminarea unor necunoscute (fie că sunt nule sau egale perechi), ceea ce micşorează numărul de necunoscute.

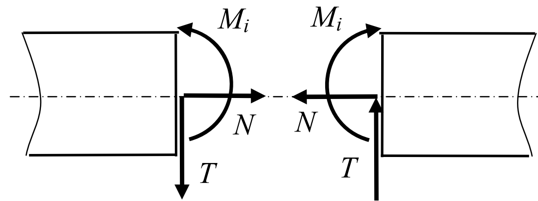


Fig.12.4

Dacă se secționează bara cu un plan imaginar şi se introduc eforturile secționale pe cele două fețe ale secțiunii se observă că eforturile *N* şi *M* sunt *eforturi simetrice* , iar efortul *T* este *antisimetric* (fig. 12.4).

În fig. 12.5 este prezentat un *sistem simetric* încărcat *simetric* şi diagramele de eforturi *T* şi *M*. Se observă din aceste diagrame că efortul antisimetric *T* este nul în planul de simetrie. Rezultă că *eforturile antisimetrice din planul de simetrie al unui cadru simetric încărcat simetric sunt nule.*

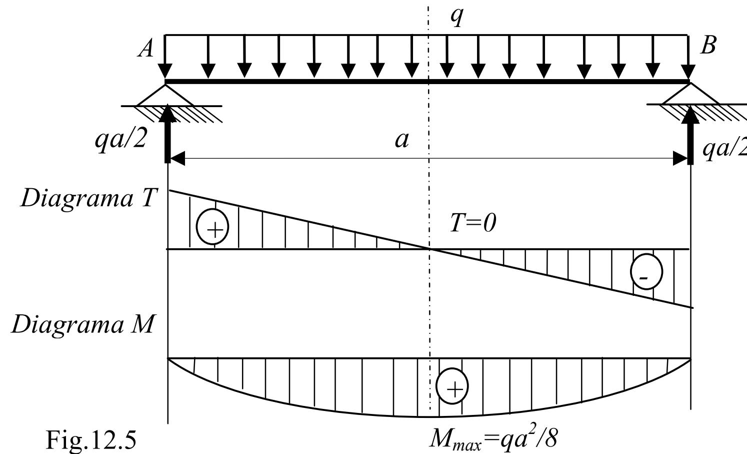


Fig.12.5

În fig. 12.6 este prezentat un *sistem simetric* încărcat *antisimetric* şi diagramele de eforturi *T* şi *M* corespunzătoare. Se observă în acest caz că efortul simetric *M* este nul în planul de simetrie. Rezultă că *eforturile simetrice din planul de simetrie al unui cadru simetric încărcat antisimetric sunt nule.*

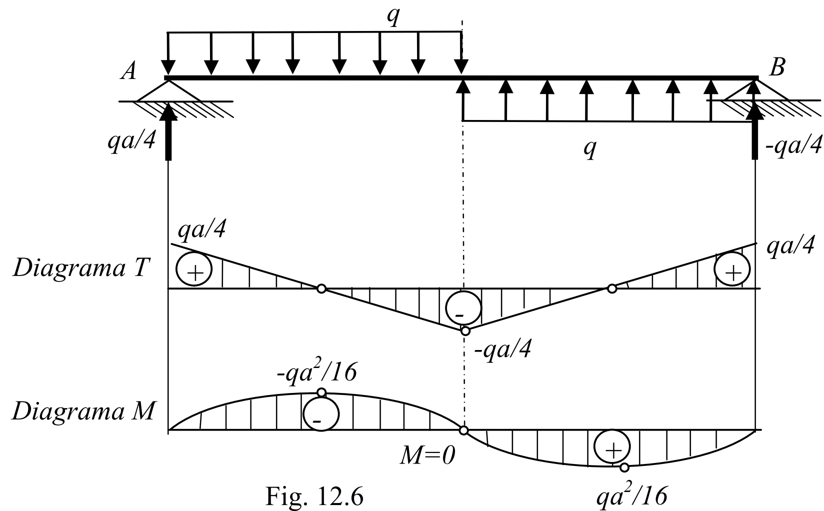


Fig. 12.6

12.2.3. Calculul deplasărilor în sisteme static nedeterminate

Deplasările şi rotirile unei secțiuni oarecare dintr-un sistem static determinat se pot calcula utilizând metode energetice (*MOHR MAXWELL*) prin suprapunerea efectelor forțelor exterioare şi a eforturilor static nedeterminate care au fost calculate anterior, care acționează *asupra sistemul de bază*. Sistemul de bază este echivalent din punct de vedere mecanic cu sistemul real întrucât acesta s-a determinat punând condițiile ca deformațiile sale să fie identice cu cele ale sistemului real . Deplasarea unei secțiuni A pe direcția forței F_A (reale sau fictive) se determină prin suprapunerea efectelor:

$$\delta_A = \delta_{A0} + \delta_{A1} X_1 + \delta_{A2} X_2 + ... \qquad (12.11)$$

în care: δ_{A0} este deplasarea punctului A pe direcția F_A *în sistemul de bază* sub acțiunea forțelor exterioare date $\delta_{A0} = \sum \int \frac{m_A M_0}{EI} dx$;

δ_{Ai} , deplasarea punctului A pe direcția forței F_A *în sistemul de bază* sub acțiunea forței unitare $X_i=1$: $\delta_{Ai} = \sum \int \frac{m_A m_i}{EI} dx \qquad i = 1,2,...$

Expresiile acestor deplasări se determină folosind metoda Mohr Maxwell.

Dacă se neglijează efectele eforturilor axiale şi tăietoare deplasarea unei secțiuni A pe direcția forței F_A se scrie:

$$\delta_A = \frac{1}{EI}\left[\int M^0 m_A dx + X_1 \int m_A m_1 dx + ...\right] = \frac{1}{EI}\left[\int (M^0 + X_1 m_1 + ...) m_A dx\right]$$
$$\Rightarrow \quad \delta_A = \frac{1}{EI}\int M m_A dx \qquad (12.12)$$

12.3. Metoda deplasărilor în cazul sistemelor plane formate din bare cu noduri rigide

12.3.1. Matricea de rigiditate în coordonate locale

Se consideră un element de bară al sistemului, delimitat de nodurile i şi j, având lungimea L^e, rigiditatea la întindere EA^e, la încovoiere EI^e şi un sistem de axe de coordonate local $O_1\overline{xy}$ astfel încât axa $O_1\overline{x}$ să coincidă cu axa barei, ca în figura 12.7.

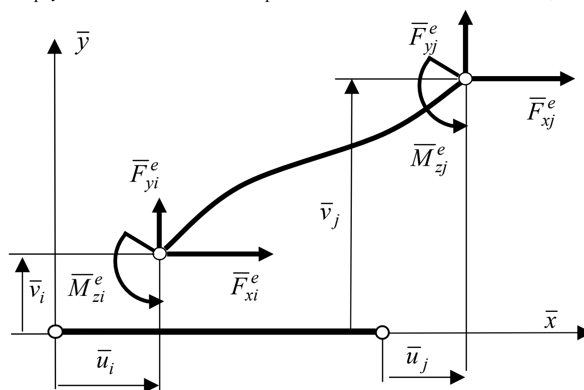


Fig.12.7

Se notează $\overline{u}_i, \overline{v}_i, \overline{\varphi}_{zi}, \overline{u}_j, \overline{v}_j, \overline{\varphi}_{zj}$ *deplasările nodale* (liniare şi unghiulare) ale nodurilor *i* şi *j* şi cu $\overline{F}^e_{xi}, \overline{F}^e_{yi}, \overline{M}^e_{zi}, \overline{F}^e_{xj}, \overline{F}^e_{yj}, \overline{M}^e_{zj}$ *forțele/cuplurile elementale* în sistemul local de axe $O_1\overline{xy}$ (fig.12.7). Forțele/cuplurile elementale se pot exprima în funcție de deplasările nodale corespunzătoare $\overline{u}_i, \overline{v}_i, \overline{\varphi}_{zi}, \overline{u}_j, \overline{v}_j, \overline{\varphi}_{zj}$, sub următoarea formă:

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}^e_{xi} \\ \overline{F}^e_{yi} \\ \overline{M}^e_{zi} \\ \overline{F}^e_{xj} \\ \overline{F}^e_{yj} \\ \overline{M}^e_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{K}_{11} & \overline{K}_{12} & \overline{K}_{13} & \overline{K}_{14} & \overline{K}_{15} & \overline{K}_{16} \\ \overline{K}_{21} & \overline{K}_{22} & \overline{K}_{23} & \overline{K}_{24} & \overline{K}_{25} & \overline{K}_{26} \\ \overline{K}_{31} & \overline{K}_{32} & \overline{K}_{33} & \overline{K}_{34} & \overline{K}_{35} & \overline{K}_{36} \\ \overline{K}_{41} & \overline{K}_{42} & \overline{K}_{43} & \overline{K}_{44} & \overline{K}_{45} & \overline{K}_{46} \\ \overline{K}_{51} & \overline{K}_{52} & \overline{K}_{53} & \overline{K}_{54} & \overline{K}_{55} & \overline{K}_{56} \\ \overline{K}_{61} & \overline{K}_{62} & \overline{K}_{63} & \overline{K}_{64} & \overline{K}_{65} & \overline{K}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overline{u}_i \\ \overline{v}_i \\ \overline{\varphi}_{zi} \\ \overline{u}_j \\ \overline{v}_j \\ \overline{\varphi}_{zj} \end{Bmatrix} \qquad (12.13)$$

sau:
$$\{\overline{F}^e\} = \lfloor \overline{K}^e \rfloor \cdot \{\overline{\delta}^e\} \qquad (12.14)$$

unde: $\lfloor \overline{K}^e \rfloor$ este matricea de rigiditate a elementului *e* în coordonate locale;
$\{\overline{\delta}^e\}$ - matricea coloană a deplasărilor nodale;
$\{\overline{F}^e\}$ - matricea coloană a forțelor/cuplurilor elementale.

Elementele matricei de rigiditate a elementului *e* în coordonate locale $\overline{K}_{ij}$ sunt egale cu sarcinile elementale corespunzătoare unor deplasări nodale unitare. Pentru determinarea elementelor matricei de rigiditate situate pe o coloană se consideră pe rând câte una dintre deplasări egală cu unitatea şi celelalte nule.

1. Deplasarea liniară $\overline{u}_i = 1$ (fig. 12.8)

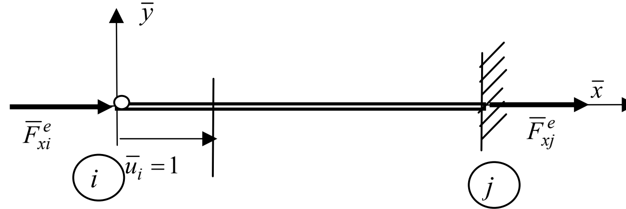


Fig.12.8

Se scriu următoarele ecuații de echilibru şi deformații:

- ecuații de echilibru: $\overline{F}^e_{xi} + \overline{F}^e_{xj} = 0$ (12.15)
- ecuații de deformații: $\overline{u}_i = 1; \overline{u}_j = 0$ (12.16)

$$\Rightarrow \overline{K}_{11} = \overline{F}^e_{xi} = \frac{EA}{L}\left(\overline{u}_i - \overline{u}_j\right) = \frac{EA}{L}$$
$$\Rightarrow \overline{K}_{41} = \overline{F}^e_{xj} = -\frac{EA}{L}\left(\overline{u}_i - \overline{u}_j\right) = -\frac{EA}{L} \qquad (12.17)$$
$$\Rightarrow \overline{K}_{21} = \overline{K}_{31} = \overline{K}_{51} = \overline{K}_{61} = 0$$

2. Deplasarea liniară $\overline{v}_i = 1$ (fig. 12.9)

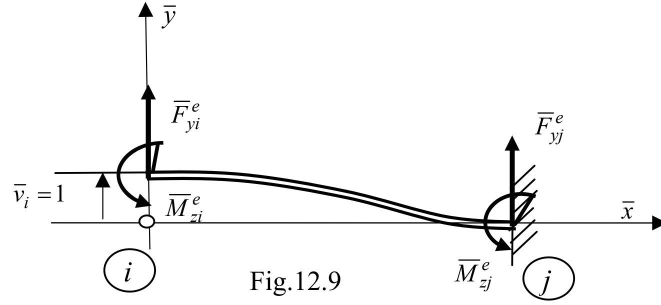


Fig.12.9

Se scriu următoarele ecuații de echilibru şi deformații:

- ecuații de echilibru: $$\begin{cases} \overline{F}^e_{yi} + \overline{F}^e_{yj} = 0 \\ \overline{M}^e_{zi} + \overline{M}^e_{zj} - \overline{F}^e_{yi} \cdot L = 0 \end{cases} \qquad (12.18)$$
- ecuații de deformații: $\overline{v}_i = 1;\ \overline{v}_j = 0;\ \varphi_{zi} = \varphi_{zj} = 0$ (12.19)

$$\begin{cases} EI\overline{v}_j = EI\overline{v}_i + EI\varphi_{zi}L - \overline{M}^e_{zi}L^2/2 + \overline{F}^e_{yi}L^3/6 = 0 \\ EI\varphi_{zj} = EI\varphi_{zi} - \overline{M}^e_{zi}L + \overline{F}^e_{yi}L^2/2 = 0 \end{cases} \qquad (12.20)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \overline{K}_{32} = \overline{M}^e_{zi} = 6EI/L^2;\ \Rightarrow \overline{K}_{22} = \overline{F}^e_{yi} = 12EI/L^3 \\ &\Rightarrow \overline{K}_{62} = \overline{M}^e_{zj} = 6EI/L^2;\ \Rightarrow \overline{K}_{52} = \overline{F}^e_{yj} = -12EI/L^3 \\ &\Rightarrow \overline{K}_{12} = \overline{K}_{42} = 0 \end{aligned} \qquad (12.21)$$

3. Deplasarea unghiulară $\varphi_{zi} = 1$ (fig. 12.10)

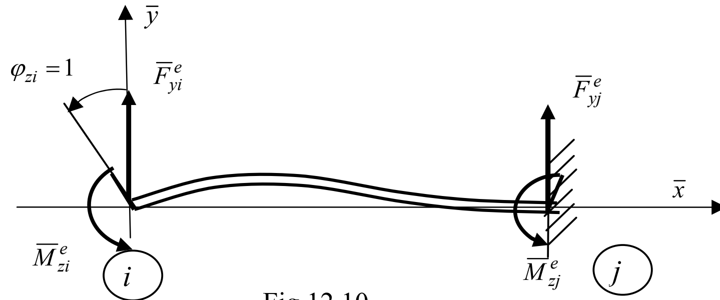


Fig.12.10

Se scriu următoarele ecuații de echilibru şi deformații:

- ecuații de echilibru: $$\begin{cases} \overline{F}^e_{yi} + \overline{F}^e_{yj} = 0 \\ \overline{M}^e_{zi} + \overline{M}^e_{zj} - \overline{F}^e_{yi}L = 0 \end{cases} \qquad (12.22)$$
- ecuații de deformații: $\varphi_{zi} = 1;\ \overline{v}_i = \overline{v}_j = 0;\ \varphi_{zj} = 0$ (12.23)

$$\begin{cases} EI\overline{v}_j = EI\overline{v}_i + EI\varphi_{zi}L - \overline{M}_{zi}^e L^2/2 + \overline{F}_{yi}^e L^3/6 = 0 \\ EI\varphi_{zj} = EI\varphi_{zi} - \overline{M}_{zi}^e L + \overline{F}_{yi}^e L^2/2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{33} = \overline{M}_{zi}^e = 4EI/L\ ;\ \ \Rightarrow \overline{K}_{23} = \overline{F}_{yi}^e = 6EI/L^2 \tag{12.24}$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{63} = \overline{M}_{zj}^e = 2EI/L\ ;\ \ \Rightarrow \overline{K}_{53} = \overline{F}_{yj}^e = -6EI/L^2$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{13} = \overline{K}_{43} = 0$$

4. Deplasarea liniară $\overline{u}_j = 1$ (fig. 12.11)

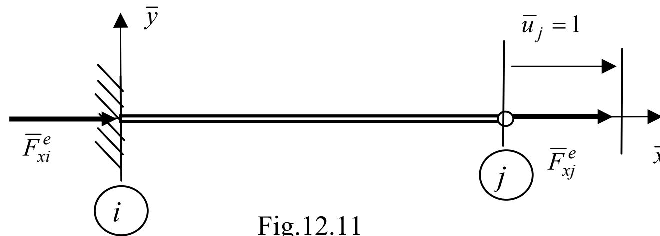


Fig.12.11

Se scriu următoarele ecuații de echilibru şi deformații:

- ecuații de echilibru: $\overline{F}_{xi}^e + \overline{F}_{xj}^e = 0$ (12.25)
- ecuații de deformații: $\overline{u}_i = 0;\ \ \overline{u}_j = 1$ (12.26)

$$\Rightarrow \overline{K}_{14} = \overline{F}_{xi}^e = \frac{EA^e}{L^e}\left(\overline{u}_i - \overline{u}_j\right) = -\frac{EA}{L}$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{44} = \overline{F}_{xj}^e = -\frac{EA^e}{L^e}\left(\overline{u}_i - \overline{u}_j\right) = \frac{EA}{L} \tag{12.27}$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{24} = \overline{K}_{34} = \overline{K}_{54} = \overline{K}_{64} = 0$$

5.Deplasarea liniară $\overline{v}_j = 1$ (fig. 12.12)

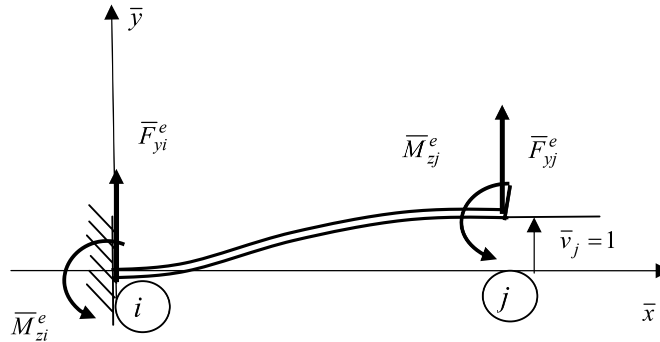


Fig.12.12

Se scriu următoarele ecuații de echilibru şi deformații:

- ecuații de echilibru: $$\begin{cases} \overline{F}^e_{yi} + \overline{F}^e_{yj} = 0 \\ \overline{M}^e_{zi} + \overline{M}^e_{zj} - \overline{F}^e_{yi} L = 0 \end{cases} \qquad (12.28)$$
- ecuații de deformații: $\overline{v}_i = 0;\ \overline{v}_j = 1;\ \varphi_{zi} = \varphi_{zj} = 0$ (12.29)

$$\begin{cases} EI\overline{v}_j = EI\overline{v}_i + EI\varphi_{zi} L - \overline{M}^e_{zi} L^2/2 + \overline{F}^e_{yi} L^3/6 = EI \\ EI\varphi_{zj} = EI\varphi_{zi} - \overline{M}^e_{zi} L + \overline{F}^e_{yi} L^2/2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{35} = \overline{M}^e_{zi} = -6EI/L^2;\ \Rightarrow \overline{K}_{25} = \overline{F}^e_{yi} = -12EI/L^3 \qquad (12.30)$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{65} = \overline{M}^e_{zj} = -6EI/L^2;\ \Rightarrow \overline{K}_{55} = \overline{F}^e_{yj} = 12EI/L^3$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{15} = \overline{K}_{45} = 0$$

6.Deplasarea unghiulară $\varphi_{zj} = 1$ (fig. 12.13)

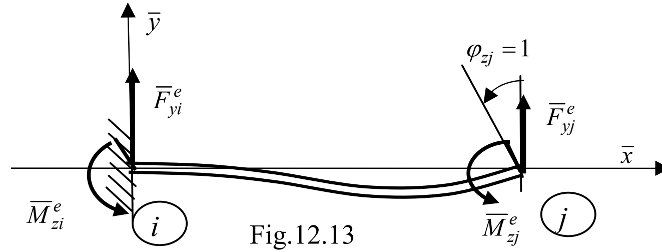


Fig.12.13

Se scriu următoarele ecuații de echilibru şi deformații:

- ecuații de echilibru: $$\begin{cases} \overline{F}^e_{yi} + \overline{F}^e_{yj} = 0 \\ \overline{M}^e_{zi} + \overline{M}^e_{zj} - \overline{F}^e_{yi} L = 0 \end{cases} \qquad (12.31)$$
- ecuații de deformații: $\varphi_{zj} = 1;\ \overline{v}_i = \overline{v}_j = 0;\ \varphi_{zi} = 0$ (12.32)

$$\begin{cases} EI\overline{v}_j = EI\overline{v}_i + EI\varphi_{zi} L - \overline{M}^e_{zi} L^2/2 + \overline{F}^e_{yi} L^3/6 = 0 \\ EI\varphi_{zj} = EI\varphi_{zi} - \overline{M}^e_{zi} L + \overline{F}^e_{yi} L^2/2 = EI \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{36} = \overline{M}^e_{zi} = 2EI/L;\ \Rightarrow \overline{K}_{26} = \overline{F}^e_{yi} = 6EI/L^2 \qquad (12.33)$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{66} = \overline{M}^e_{zj} = 4EI/L;\ \Rightarrow \overline{K}_{56} = \overline{F}^e_{yj} = -6EI/L^2;$$

$$\Rightarrow \overline{K}_{16} = \overline{K}_{46} = 0$$

Matricea de rigiditate din relația (12.13) în sistemul de axe local are forma:

$$\left[\overline{K}^e\right] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} & 0 & -12\frac{EI}{L^3} & 6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} & 0 & 12\frac{EI}{L^3} & -6\frac{EI}{L^2} \\ 0 & 6\frac{EI}{L^2} & 2\frac{EI}{L} & 0 & -6\frac{EI}{L^2} & 4\frac{EI}{L} \end{bmatrix} \tag{12.34}$$

Notând $EAL^2/EI = \alpha$ atunci relația matriceală forțe elementale - deplasări nodale (12.13) se scrie ținând seama de relație (12.34) sub forma *normalizată:*

$$\begin{Bmatrix} \overline{F}^e_{xi} \\ \overline{F}^e_{yi} \\ \overline{M}^e_{zi}/L \\ \overline{F}^e_{xj} \\ \overline{F}^e_{yj} \\ \overline{M}^e_{zj}/L \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & -6 & 2 \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \overline{u}_i/L \\ \overline{v}_i/L \\ \overline{\varphi}_{zi} \\ \overline{u}_j/L \\ \overline{v}_j/L \\ \overline{\varphi}_{zj} \end{Bmatrix} \tag{12.35}$$

sau condensat:

$$\left\{\overline{F}^{en}\right\} = \left[\overline{K}^{en}\right] \cdot \left\{\overline{\delta}^{en}\right\} \tag{12.36}$$

12.3.2. Matricea de rigiditate în coordonate globale

Se exprimă deplasările nodale din sistemul de axe local $\overline{u}_i, \overline{v}_i, \overline{\varphi}_{zi}, \overline{u}_j, \overline{v}_j, \overline{\varphi}_{zj}$ în funcție de deplasările nodale din sistemul de axe global $u_i, v_i, \varphi_{zi}, u_j, v_j, \varphi_{zj}$ și de unghiul α dintre axa $O_1\overline{x}$ și axa Ox (fig.12.14) sub forma:

$$\begin{aligned} &\overline{u}_i = u_i \cos\alpha + v_i \sin\alpha; && \overline{u}_j = u_j \cos\alpha + v_j \sin\alpha \\ &\overline{v}_i = -u_i \sin\alpha + v_i \cos\alpha; && \overline{v}_j = -u_j \sin\alpha + v_j \cos\alpha \\ &\overline{\varphi}_{zi} = \varphi_{zi}; && \overline{\varphi}_{zj} = \varphi_{zj} \end{aligned} \tag{12.37}$$

Dacă se notează $\cos\alpha = \ell$ si $\sin\alpha = m$, relațiile (12.37) se scriu:

$$\begin{Bmatrix} \overline{u}_i/L \\ \overline{v}_i/L \\ \overline{\varphi}_{zi} \\ \overline{u}_j/L \\ \overline{v}_j/L \\ \overline{\varphi}_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & \ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & \ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_i/L \\ v_i/L \\ \varphi_{zi} \\ u_j/L \\ v_j/L \\ \varphi_{zj} \end{Bmatrix} \tag{12.38}$$

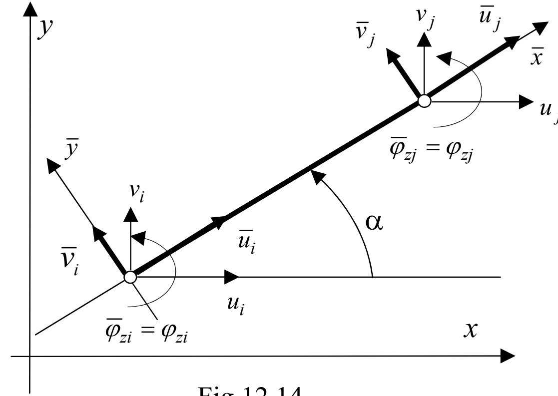


Fig.12.14

Relația (13.38) se poate scrie condensat:

$$\left\{\bar{\delta}^{en}\right\} = [T] \cdot \left\{\delta^{en}\right\} \tag{12.39}$$

în care s-a notat cu $[T]$ matricea de transfer din sistemul de axe global Oxy în sistemul de axe local $O_1\overline{xy}$. Inversa acestei matrice este identică cu transpusa ei:

$$[T] \cdot [T]^{t} = [I] \tag{12.40}$$

Forțele/cuplurile elementale în sistemul de axe local $O_1\overline{xy}$ se exprimă în acelaşi mod cu deplasările nodale în funcție de sarcinile nodale ale elementelor din sistemul de axe global Oxy . Se obține analog:

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}^e_{xi} \\ \bar{F}^e_{yi} \\ \bar{M}^e_{zi}/L \\ \bar{F}^e_{xj} \\ \bar{F}^e_{yj} \\ \bar{M}^e_{zj}/L \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & \ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ell & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & \ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} F^e_{xi} \\ F^e_{yi} \\ M^e_{zi}/L \\ F^e_{xj} \\ F^e_{yj} \\ M^e_{zj}/L \end{Bmatrix} \tag{12.41}$$

sau sub forma condensată:

$$\left\{\bar{F}^{en}\right\} = [T] \cdot \left\{F^{en}\right\} \tag{12.42}$$

Ținând seama de relațiile (12.39) şi (12.42) relația (12.36) se scrie:

$$[T] \cdot \left\{F^{en}\right\} = \left[\bar{K}^{en}\right] \cdot [T] \cdot \left\{\delta^{en}\right\} \tag{12.43}$$

Înmulțind la stânga relația matriceală (12.43) cu matricea $[T]^{-1} = [T]^t$ se obține:

$$\begin{gathered} [T]^t \cdot [T] \cdot \left\{F^{en}\right\} = [T]^t \cdot \left[\bar{K}^{en}\right] \cdot [T] \cdot \left\{\delta^{en}\right\} \quad \Rightarrow \\ \left\{F^{en}\right\} = [T]^t \cdot \left[\bar{K}^{en}\right] \cdot [T] \cdot \left\{\delta^{en}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{F^{en}\right\} = \left[K^{en}\right] \cdot \left\{\delta^{en}\right\} \end{gathered} \tag{12.44}$$

În relația (12.44) s-a notat cu: $\left[K^{en}\right] = [T]^t \cdot \left[\bar{K}^{en}\right] \cdot [T]$ (12.45)

matricea de rigiditate a elementului sub forma normalizată în coordonate globale.

12.3.3. Algoritmul metodei deplasărilor

Algoritmul metodei deplasărilor constă în parcurgerea următorilor paşi:

1. se descompune sistemul plan de bare în elemente având aceeaşi rigiditate la întindere-compresiune (EA) respectiv la încovoiere (EI) şi se scriu relațiile matriceale dintre forțele elementale şi deplasările nodale corespunzătoare sub formă normalizată în sistemul de axe local, conform relației (12.35);
2. se scriu matricele de transfer [T] din sistemul de axe local în cel global cu ajutorul cosinuşilor directori: $\ell = cos\,\alpha;\ \ m = cos(90-\alpha)$ pentru fiecare dintre elementele sistemului;
3. se scriu relațiile matriceale dintre forțele elementale şi deplasările nodale corespunzătoare sub formă normalizată în sistemul de axe global pentru fiecare dintre elementele sistemului, conform relației (12.45);
4. se scriu relațiile matriceale globale dintre forțele elementale şi deplasările nodale corespunzătoare sub formă normalizată în sistemul de axe global în deplasări globale, pentru fiecare element:
$$\{F_G^{en}\} = [K_G^{en}]\cdot\{\delta_G^n\} \tag{12.46}$$
5. se însumează relațiile matriceale globale membru cu membru obținându-se în stânga matricea coloană a sumei forțelor/cuplurilor nodale corespunzătoare fiecărui nod, iar în dreapta produsul dintre matricea de rigiditate globală a structurii şi matricea coloană a deplasărilor globale:
$$\{\sum F_G^{en}\} = [K_G^n]\cdot\{\delta_G^n\} \tag{12.47}$$
6. se scriu ecuațiile de echilibru dintre forțele/cuplurile nodale (care sunt egale cu forțele elementale şi de sens opus) şi sarcinile exterioare care acționează în fiecare nod: $\{\sum F_G^{en}\} = \{P\}$
7. se introduc condițiile la limită şi se rezolvă ecuația matriceală obținută obținându-se deplasările nodurilor sistemului: $[K_G^{en}]\cdot\{\delta_G^n\} = \{P\}$ (12.48)
   Matricea sistemului este nesingulară $det[K_G^{en}] = 0$. Ridicarea nesingularității se face prin eliminarea coloanelor corespunzătoare deplasărilor nule şi respectiv a liniilor corespunzătoare reacțiunilor necunoscute .
8. Postprocesarea rezultatelor constă în calculul reacțiunilor, al eforturilor din barele sistemului şi trasarea diagramelor de eforturi.

Aplicație

Folosind metoda eforturilor şi metoda deplasărilor, pentru sistemul static nedeterminat format din trei bare rigide în noduri încastrat în nodurile *(1)* şi *(4)* şi încărcat din figura 12.15 cu forța *P* şi cuplul *Pa* în nodul *(3)*, se cere:

- să se determine reacțiunile şi eforturile din bare;
- să se traseze diagramele de eforturi *N, T* şi M_i;
- să se calculeze deplasarea pe verticală a nodului *(3)* .

Se cunosc valorile parametrilor: $L=a=1000\ mm;\ P=1000\ N;\ A=10^2\ mm^2;\ I=10^5\ mm^4;\ E=2\cdot10^5\ MPa$

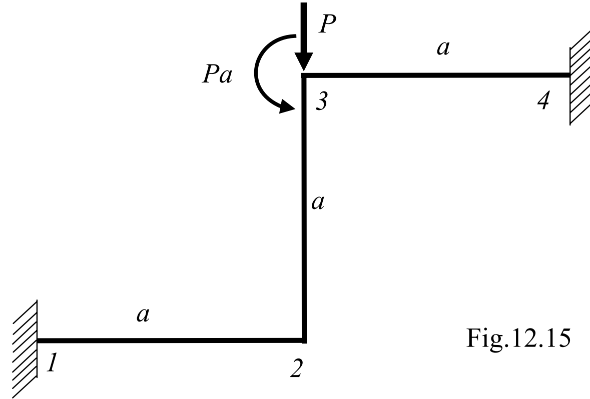


Fig.12.15

a. Metoda eforturilor

1. Se alege sistemul de bază prin suprimarea încastrării (4) şi introducerea *necunoscutelor static nedeterminate* X_1, X_2 *şi* X_3 ca în figura 12.16.

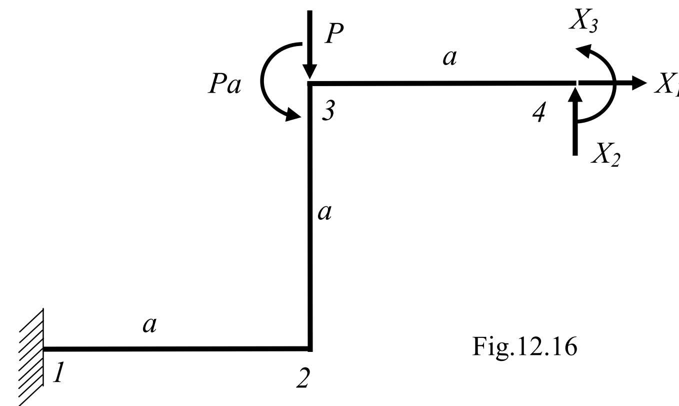


Fig.12.16

2. Se scriu deplasările şi rotirea secțiunii (4) a sistemului de bază sub acțiunea sarcinilor din sistemul real *(P şi Pa)* şi a eforturilor necunoscute X_1, X_2 şi X_3. Cele două deplasări (după direcția efortului X_1 şi respectiv a lui X_2) şi rotirea (după direcția lui X_3) trebuie să fie identice cu cele din sistemul real adică nule. Acestea se calculează separat pentru cele patru seturi de sarcini cunoscute *(P, Pa)* sau necunoscute (X_1; X_2 ; X_3) şi se aplică principiul suprapunerii efectelor:

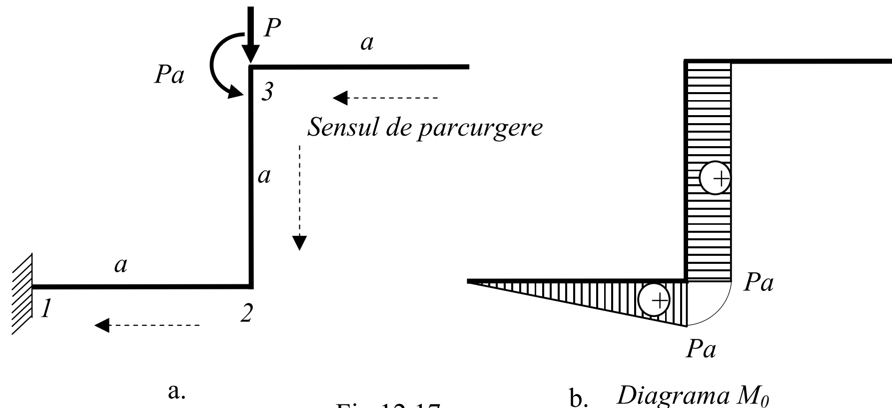
$$\begin{aligned}\delta_1 &= \delta_{10} + \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3\\ \delta_2 &= \delta_{20} + \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3\\ \delta_3 &= \delta_{30} + \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3\end{aligned} \qquad (12.49)$$

Deplasările δ_{i0} *şi* δ_{ij} se determină folosind metoda *MOHR-MAXWELL* numai pentru solicitarea de încovoietoare (se neglijează efectul eforturilor axiale şi tăietoare):

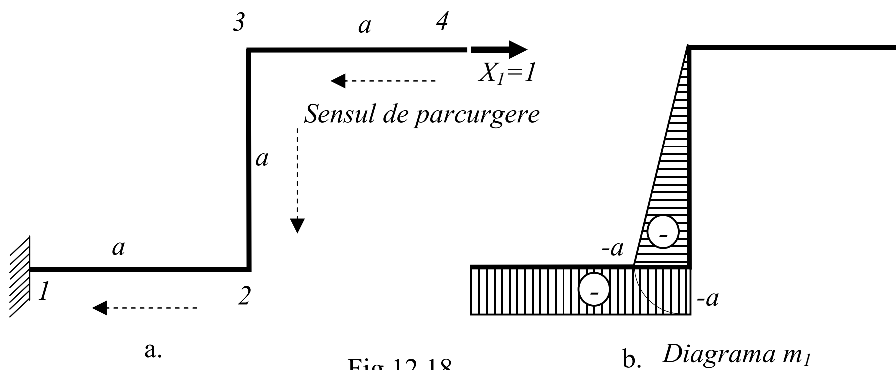
$$\delta_{i0} = \sum \int \frac{m_i M_0}{EI} dx \qquad \delta_{ik} = \sum \int \frac{m_i m_k}{EI} dx \qquad i,k = 1,2,3 \qquad (12.50)$$

în care: $M_0(x)$ sunt funcțiile eforturilor încovoietoare din barele sistemului corespunzătoare sarcinilor reale care acționează în sistemul de bază;
m_i, funcțiile eforturilor încovoietoare din barele sistemului corespunzătoare unui efort static nedeterminat unitar: $X_i=1$ în sistemul de bază.

Diagramele de eforturi încovoietoare M_0, m_1, m_2 şi m_3 sunt prezentate în figurile 12.17, 12.18,. 12.19 şi respectiv 12.20.



a. Fig.12.17 b. *Diagrama M_0*



a. Fig.12.18 b. *Diagrama m_1*

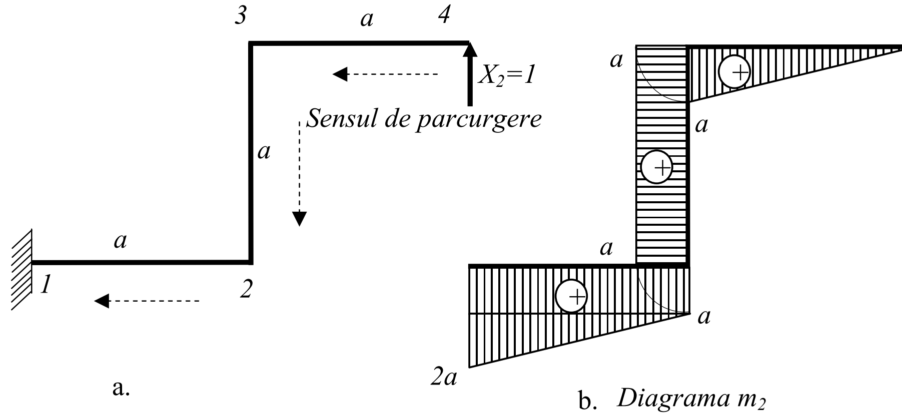


Fig.12.19

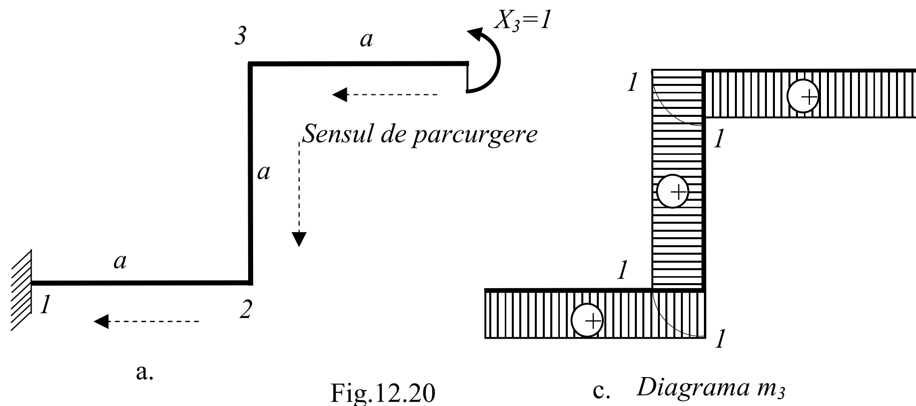


Fig.12.20

Deplasările δ_{i0} *şi* δ_{ij} se determină folosind metoda *MOHR-MAXWELL* şi regula de integrare *VEREŞCEAGHIN*. S-au obținut rezultatele:

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\left(Pa\cdot a\cdot\left(-\frac{a}{2}\right)+\frac{1}{2}Pa\cdot a\cdot(-a)\right) = -\frac{Pa^3}{EI};$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\left(Pa\cdot a\cdot a+\frac{1}{2}Pa\cdot a\cdot\left(a+\frac{a}{2}\right)\right) = \frac{5}{3}\frac{Pa^3}{EI}; \qquad (12.51)$$

$$\delta_{30} = \frac{1}{EI}\left(Pa\cdot a\cdot 1+\frac{1}{2}Pa\cdot a\cdot 1\right) = \frac{3}{2}\frac{Pa^3}{EI}\ ;$$

$$\delta_{11}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}a\cdot(-a)\cdot\left(-\frac{2a}{3}\right)+a\cdot(-a)\cdot(-a)\right)=\frac{4}{3}\frac{a^3}{EI};$$

$$\delta_{12}=\delta_{21}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}a\cdot(-a)\cdot a+a\cdot(-a)\cdot\left(\frac{3a}{2}\right)\right)=-2\frac{a^3}{EI};$$

$$\delta_{13}=\delta_{31}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}a\cdot(-a)\cdot 1+a\cdot(-a)\cdot 1\right)=-\frac{3}{2}\frac{a^2}{EI};$$

$$\delta_{22}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}a\cdot a\cdot\frac{2a}{3}+a\cdot a\cdot a+a\cdot a\cdot\frac{3}{2}a+\frac{1}{2}a\cdot a\cdot\frac{5a}{3}\right)=\frac{11}{3}\frac{a^2}{EI} \quad (12.51)$$

$$\delta_{23}=\delta_{32}=\frac{1}{EI}\left(\frac{1}{2}a\cdot a\cdot 1+a\cdot a\cdot 1+a\cdot a\cdot 1+\frac{1}{2}a\cdot a\cdot 1\right)=3\frac{a^2}{EI};$$

$$\delta_{33}=\frac{1}{EI}(3\cdot 1\cdot a)=3\frac{a}{EI}$$

Rezultă următorul sistem de trei ecuații:

$$\begin{cases}\frac{4}{3}\frac{a^3}{EI}X_1-2\frac{a^3}{EI}X_2-\frac{3}{2}\frac{a^2}{EI}X_3=\frac{Pa^3}{EI}\\ -2\frac{a^3}{EI}X_1+\frac{11}{3}\frac{a^3}{EI}X_2+3\frac{a^2}{EI}X_3=-\frac{5}{3}\frac{Pa^3}{EI}\\ -\frac{3}{2}\frac{a^2}{EI}X_1+3\frac{a^2}{EI}X_2+3\frac{a}{EI}X_3=-\frac{3}{2}\frac{Pa^2}{EI}\end{cases} \quad (12.52)$$

Rezolvând sistemul (12.52) se obțin necunoscutele static nedeterminate:

$$X_1=0{,}6\,P;\quad X_2=0{,}2\,P;\quad X_3=-0{,}4\,Pa \quad (12.53)$$

3. Se calculează reacțiunile pentru sistemul de bază (fig.12.21) în care acționează forțele date *(P, Pa)* şi necunoscutele static determinate calculate (X_1; X_2 ; X_3).

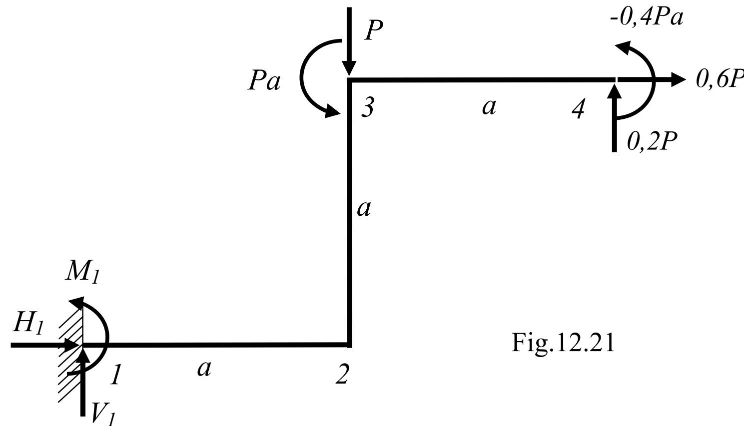


Fig.12.21

Se obține:

$$V_1 = P - 0{,}2P = 0{,}8P$$
$$H_1 = -0{,}6P \qquad (12.54)$$
$$M_1 = -Pa + P \cdot a - 0{,}2P \cdot 2a + 0{,}6P \cdot a + 0{,}4Pa = 0{,}6Pa$$

4. *Se trasează diagramele de eforturi N, T* şi M_i din figurile 12.22. 12.23 şi 12.24.

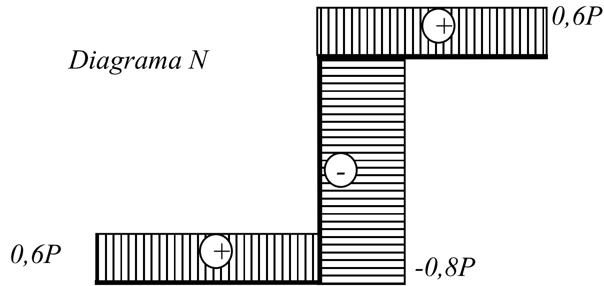


Fig.12.22

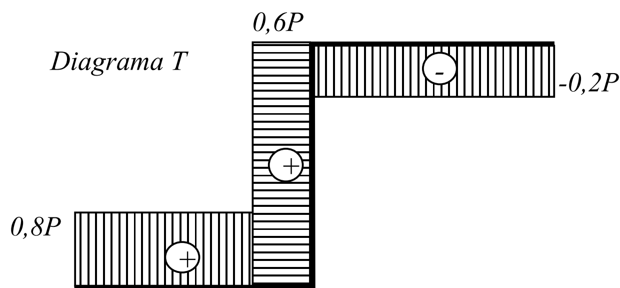


Fig.12.23

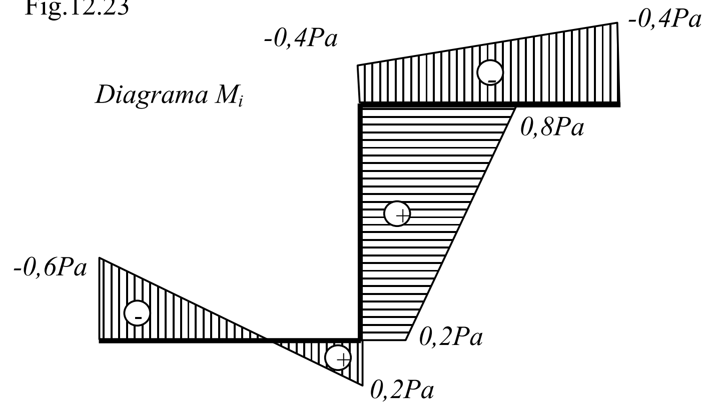


Fig.12.24

5. *Se calculează deplasarea verticală a punctului de aplicație al forței P*

Pentru calculul deplasării nodului 3 pe verticală se foloseşte metoda *MOHR MAXWELL:*

$$\delta_A = \frac{1}{EI}\int M m_A dx \qquad (12.55)$$

în care M este funcția momentelor încovoietoare din sistemul de bază sub acțiunea cele patru seturi de forțe $(P, Pa, X_1; X_2; X_3)$:

m_A , funcția momentelor încovoietoare din sistemul de bază sub acțiunea unei forțe unitare $X_A = 1$ aplicată în punctul A pe direcția lui P (fig. 12.25.a)

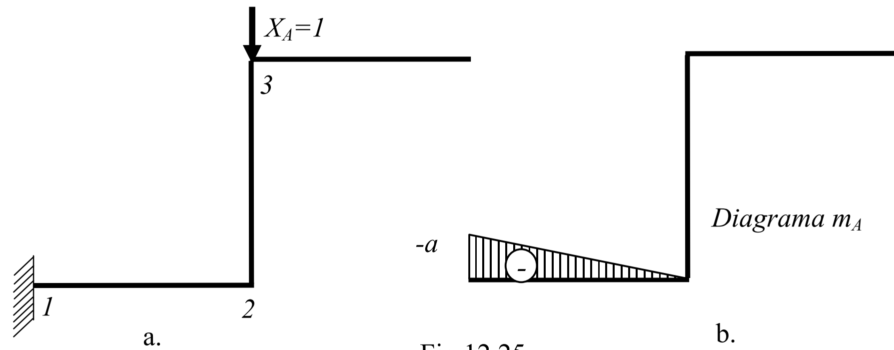


Fig.12.25

Pentru calculul integralei (12.55) se utilizează formula lui 1/3 *SIMPSON:*

$$\delta_A = \frac{1}{EI}\frac{a}{6}\left(h_1k_1 + 4hk + h_2k_2\right) \qquad (12.56)$$

în care h_1, h_2 şi h sunt ordonatele din diagrama M corespunzătoare capetelor şi respectiv mijlocului segmentului de lungime a;

k_1, k_2 şi k sunt ordonatele din diagrama m_A corespunzătoare capetelor şi respectiv mijlocului segmentului de lungime a;

$$\delta_A = \frac{1}{EI}\frac{a}{6}\left[(-0{,}6Pa)\cdot(-a) + 4(-0{,}2Pa)\cdot(-0{,}5a) + (0{,}2Pa)\cdot 0\right] = 0{,}166\frac{Pa^3}{EI} \qquad (12.57)$$

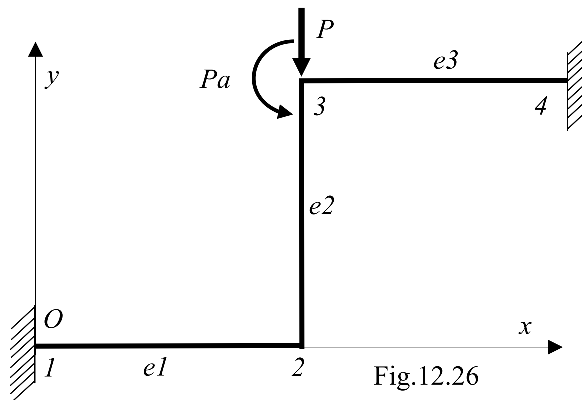


Fig.12.26

b. Metoda deplasărilor

Se alege sistemul de axe global *Oxy* şi se definesc elementele (fig. 12.26).

Pentru elementele *e1* şi *e3* matricea de transfer este matricea unitate:

Pentru elementul *e2*: $\ell = cos\,90 = 0;\ \ m = sin\,90 = 1$ şi conform (12.38) matricea de transfer are forma:

$$\left[T^{e2}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & . & . & . \\ -1 & 0 & 0 & . & . & . \\ 0 & 0 & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 1 & 0 \\ . & . & . & -1 & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (12.59)$$

$$\left[T^{e1}\right] = \left[T^{e3}\right] = \left[I_6\right] \qquad (12.58)$$

Conform relației (12.35) matricea de rigiditate pentru elementele *e1* şi *e3* se scriu în sistemul global astfel:

$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^{e1} \\ F_{y1}^{e1} \\ M_{z1}^{e1}/a \\ F_{x2}^{e1} \\ F_{y2}^{e1} \\ M_{z2}^{e1}/a \end{Bmatrix} = \frac{EI}{a^2} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & -6 & 2 \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1/a \\ v_1/a \\ \varphi_{z1} \\ u_2/a \\ v_2/a \\ \varphi_{z2} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{x3}^{e3} \\ F_{y3}^{e3} \\ M_{z3}^{e3}/a \\ F_{x4}^{e3} \\ F_{y4}^{e3} \\ M_{z4}^{e3}/a \end{Bmatrix} = \frac{EI}{a^2} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & -6 & 2 \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_3/a \\ v_3/a \\ \varphi_{z3} \\ u_4/a \\ v_4/a \\ \varphi_{z4} \end{Bmatrix} \qquad (12.60)$$

Matricea de rigiditate pentru elementul *e2* se scrie ținând seama de relația (12.45):

$$\left[K^{e2n}\right] = \left[T^{e2}\right]^t \cdot \left[\overline{K}^{e2n}\right] \cdot \left[T^{e2}\right] \qquad (12.61)$$

$$\begin{Bmatrix} F_{x2}^{e2} \\ F_{y2}^{e2} \\ M_{z2}^{e2}/a \\ F_{x3}^{e2} \\ F_{y3}^{e2} \\ M_{z3}^{e2}/a \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^2} \left[T^{e2}\right]^t \cdot \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 & 0 & -12 & 6 \\ 0 & 6 & 4 & 0 & -6 & 2 \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 6 & 2 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \cdot \left[T^{e2}\right] \cdot \begin{Bmatrix} u_2/a \\ v_2/a \\ {}_{z2} \\ u_3/a \\ v_3/a \\ {}_{z3} \end{Bmatrix} \qquad (12.62)$$

Efectuând calculele în relația matriceală (12.62) se obține:

$$\begin{Bmatrix} F_{x2}^{e2} \\ F_{y2}^{e2} \\ M_{z2}^{e2}/a \\ F_{x3}^{e2} \\ F_{y3}^{e2} \\ M_{z3}^{e2}/a \end{Bmatrix} = \frac{EI}{a^2} \begin{bmatrix} 12 & 0 & -6 & -12 & 0 & -6 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 \\ -6 & 0 & 4 & 6 & 0 & 2 \\ -12 & 0 & 6 & 12 & 0 & 6 \\ 0 & -\alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 \\ -6 & 0 & 2 & 6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_2/a \\ v_2/a \\ \varphi_{z2} \\ u_3/a \\ v_3/a \\ \varphi_{z3} \end{Bmatrix} \tag{12.63}$$

Pentru fiecare dintre elementele sistemului se scriu relațiile matriceale (12.60) şi (12.63) sub formă expandată în sistemul de axe global, conform relației (12.45):

- elementul *e1*:

$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^{e1} \\ F_{y1}^{e1} \\ M_{z1}^{e1}/a \\ F_{x2}^{e1} \\ F_{x2}^{e1} \\ M_{z2}^{e1}/a \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \end{Bmatrix} = \frac{EI}{a^2} \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 12 & 6 & 0 & -12 & 6 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 6 & 4 & 0 & -6 & 2 & . & . & . & . & . & . \\ \alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & -12 & -6 & 0 & 12 & -6 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 6 & 2 & 0 & -6 & 4 & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1/a \\ v_1/a \\ \varphi_{z1} \\ u_2/a \\ v_2/a \\ \varphi_{z2} \\ u_3/a \\ v_3/a \\ \varphi_{z3} \\ u_4/a \\ v_4/a \\ \varphi_{z4} \end{Bmatrix} \tag{12.64}$$

- elementul *e2*:

$$\begin{Bmatrix} . \\ . \\ . \\ F_{x2}^{e2} \\ F_{x2}^{e2} \\ M_{z2}^{e2}/a \\ F_{x3}^{e2} \\ F_{y3}^{e2} \\ M_{z3}^{e2}/a \\ . \\ . \\ . \end{Bmatrix} = \frac{EI}{a^2} \begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & 12 & 0 & -6 & -12 & 0 & -6 & . & . & . \\ . & . & . & 0 & \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 & . & . & . \\ . & . & . & -6 & 0 & 4 & 6 & 0. & 2 & . & . & . \\ . & . & . & -12 & 0 & 6 & 12 & 0 & 6 & . & . & . \\ . & . & . & 0 & -\alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & . & . & . \\ . & . & . & -6 & 0 & 2 & 6 & 0 & 4 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1/a \\ v_1/a \\ \varphi_{z1} \\ u_2/a \\ v_2/a \\ \varphi_{z2} \\ u_3/a \\ v_3/a \\ \varphi_{z3} \\ u_4/a \\ v_4/a \\ \varphi_{z4} \end{Bmatrix} \tag{12.65}$$

- elementul *e3*:

$$\begin{Bmatrix} . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ . \\ F_{x3}^{e3} \\ F_{y3}^{e3} \\ M_{z3}^{e3}/a \\ F_{x4}^{e3} \\ F_{x4}^{e3} \\ M_{z4}^{e3}/a \end{Bmatrix} = \frac{EI}{a^2} \begin{bmatrix} . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & \alpha & 0 & 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 12 & 6 & 0 & -12 & 6 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 6 & 4 & 0 & -6 & 2 \\ . & . & . & . & . & . & -\alpha & 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & -12 & -6 & 0 & 12 & -6 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 6 & 2 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1/a \\ v_1/a \\ \varphi_{z1} \\ u_2/a \\ v_2/a \\ \varphi_{z2} \\ u_3/a \\ v_3/a \\ \varphi_{z3} \\ u_4/a \\ v_4/a \\ \varphi_{z4} \end{Bmatrix} \qquad (12.66)$$

Înlocuind în $EAL^2/EI = \alpha$ valorile parametrilor rezultă: $\alpha = 1000$ (12.67)

Însumând membru cu membru relațiile matriceale globale (12.64), (12.65) şi (12.66) se obține matricea de rigiditate globală a structurii:

$$\begin{Bmatrix} F_{x1}^{e1} \\ F_{y1}^{e3} \\ M_{z1}^{e1}/a \\ F_{x2}^{e1}+F_{x2}^{e2} \\ F_{y2}^{e1}+F_{y2}^{e2} \\ \left(M_{z2}^{e1}+M_{z2}^{e2}\right)/a \\ F_{x3}^{e2}+F_{x3}^{e3} \\ F_{y3}^{e2}+F_{y3}^{e3} \\ \left(M_{z3}^{e2}+M_{z3}^{e3}\right)/a \\ F_{x4}^{e3} \\ F_{x4}^{e3} \\ M_{z4}^{e3}/a \end{Bmatrix} = \frac{EI}{a^2} \begin{bmatrix} 10^3 & 0 & 0 & -10^3 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 12 & 6 & 0 & -12 & 6 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 6 & 4 & 0 & -6 & 2 & . & . & . & . & . & . \\ -10^3 & 0 & 0 & 1012 & 0 & -6 & -12 & 0 & -6 & . & . & . \\ 0 & -12 & -6 & 0 & 1012 & -6 & 0 & -10^3 & 0 & . & . & . \\ 0 & 6 & 2 & -6 & -6 & 8 & 6 & 0 & 2 & . & . & . \\ . & . & . & -12 & 0 & 6 & 1012 & 0 & 6 & -10^3 & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 & -10^3 & 0 & 0 & 1012 & 6 & 0 & -12 & 6 \\ . & . & . & -6 & 0 & 2 & 6 & 6 & 8 & 0 & -6 & 2 \\ . & . & . & . & . & . & -10^3 & 0 & 0 & 10^3 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & -12 & -6 & 0 & 12 & -6 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 6 & 2 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1/a \\ v_1/a \\ \varphi_{z1} \\ u_2/a \\ v_2/a \\ \varphi_{z2} \\ u_3/a \\ v_3/a \\ \varphi_{z3} \\ u_4/a \\ v_4/a \\ \varphi_{z4} \end{Bmatrix}$$

(12.68)

Se scriu ecuațiile de echilibru dintre forțele/cuplurile nodale (care sunt egale cu forțele elementale şi de sens opus) şi sarcinile exterioare care acționează în fiecare nod conform relației (12.48) şi figurii 12.27:

- nodul 1: $F_{x1}^{e1} = H_1;\quad F_{y1}^{el} = V_1$; $M_{z1}^{el}/a = M_1/a$ (12.69)

- nodul 2: $$F_{x2}^{e1} + F_{x2}^{e2} = 0; \quad F_{y2}^{e1} + F_{y2}^{e2} = 0$$ $$\left(M_{z2}^{e1} + M_{z2}^{e2}\right)/\, a = 0 \tag{12.70}$$
- nodul 3: $$F_{x3}^{e2} + F_{x3}^{e3} = 0; \quad F_{y3}^{e2} + F_{y3}^{e3} = 0$$ $$\left(M_{z3}^{e2} + M_{z3}^{e3}\right)/\, a = 0 \tag{12.71}$$
- nodul 4: $$F_{x4}^{e3} = H_4; \quad F_{y4}^{e3} = V_4;$$ $$M_{z4}^{e3} / a = M_4 / a \tag{12.72}$$

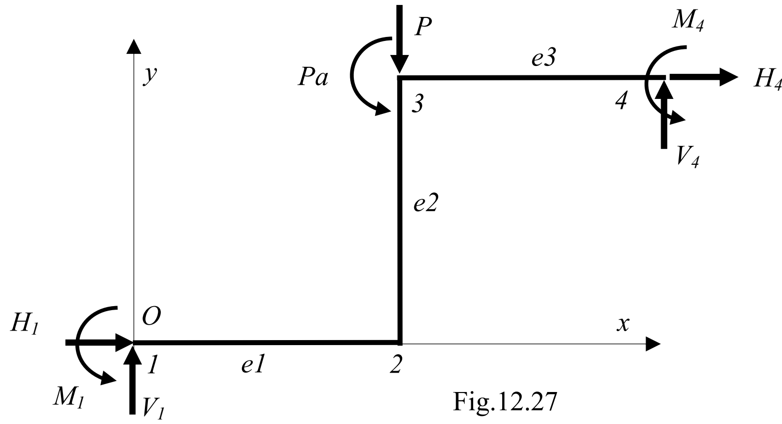


Fig.12.27

Ecuațiile de echilibru ale forțelor din noduri se introduc în relația (12.67) obținându-se:

$$\frac{EI}{a^2}\begin{bmatrix} 10^3 & 0 & 0 & -10^3 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 12 & 6 & 0 & -12 & 6 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 6 & 4 & 0 & -6 & 2 & . & . & . & . & . & . \\ -10^3 & 0 & 0 & 1012 & 0 & -6 & -12 & 0 & -6 & . & . & . \\ 0 & -12 & -6 & 0 & 1012 & -6 & 0 & -10^3 & 0 & . & . & . \\ 0 & 6 & 2 & -6 & -6 & 8 & 6 & 0 & 2 & . & . & . \\ . & . & . & -12 & 0 & 6 & 1012 & 0 & 6 & -10^3 & 0 & 0 \\ . & . & . & 0 & -10^3 & 0 & 0 & 1012 & 6 & 0 & -12 & 6 \\ . & . & . & -6 & 0 & 2 & 6 & 6 & 8 & 0 & -6 & 2 \\ . & . & . & . & . & . & -10^3 & 0 & 0 & 10^3 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & -12 & -6 & 0 & 12 & -6 \\ . & . & . & . & . & . & 0 & 6 & 2 & 0 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1/a \\ v_1/a \\ \varphi_{z1} \\ u_2/a \\ v_2/a \\ \varphi_{z2} \\ u_3/a \\ v_3/a \\ \varphi_{z3} \\ u_4/a \\ v_4/a \\ \varphi_{z4} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ V_1 \\ M_1/a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ Pa/a \\ H_4 \\ V_4 \\ M_4/a \end{Bmatrix}$$

(12.73)

Se introduc condițiile la limită $u_1=v_1=v_4=v_4=0$ şi $\varphi_{z1}=\varphi_{z4}=0$ obținându-se un sistem nesingular. Pentru a ridica nesingularitatea acestui sistem se elimină coloanele corespunzătoare deplasărilor nule, respectiv liniile corespunzătoare reacțiunilor necunoscute H_1, V_1, M_1/a, H_4, V_4, M_4/a.

Se obține următorul sistem:

$$\frac{EI}{a^2}\begin{bmatrix} 1012 & 0 & -6 & -12 & 0 & -6 \\ 0 & 1012 & -6 & 0 & -1000 & 0 \\ -6 & -6 & 8 & 6 & 0 & 2 \\ -12 & 0 & 6 & 1012 & 0 & 6 \\ 0 & -1000 & 0 & 0 & 1012 & 6 \\ -6 & 0 & 2 & 6 & 6 & 8 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_2/a \\ v_2/a \\ \varphi_{z2} \\ u_3/a \\ v_3/a \\ \varphi_{z3} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P \\ P \end{Bmatrix} \tag{12.74}$$

Rezolvând acest sistem rezultă deplasările nodurilor *2* şi *3*:

$$\begin{aligned} &\frac{u_2}{a}=5{,}972\cdot 10^{-4}\frac{Pa^2}{EI}\Rightarrow u_2=2{,}986\cdot 10^{-4}mm; \\ &\frac{v_2}{a}=-0{,}166\frac{Pa^2}{EI}\Rightarrow v_2=8{,}300\ mm \\ &\varphi_{z2}=-0{,}199\frac{Pa^2}{EI}\Rightarrow \varphi_{z2}=9{,}95\cdot 10^{-3}rad \\ &\frac{u_3}{a}=-5{,}972\cdot 10^{-4}\frac{Pa^2}{EI}\Rightarrow u_3=-2{,}986\cdot 10^{-4}mm; \\ &\frac{v_3}{a}=-0{,}167\frac{Pa^2}{EI}\Rightarrow v_2=8{,}350\ mm \\ &\varphi_{z3}=0{,}301\frac{Pa^2}{EI}\Rightarrow \varphi_{z2}=1{,}505\cdot 10^{-2}rad \end{aligned} \tag{12.75}$$

Ultima etapă constă în calculul reacțiunilor, şi trasarea diagramelor de eforturi:

- *Reacțiunile se calculează* utilizând ecuațiile 1, 2, 3, 7, 8 şi 9 ale sistemului (12.68):

$$\begin{aligned} &H_1=-1000\frac{u_2}{a}P\cong -600\,N;\quad V_1=\left(-12\frac{v_2}{a}+6\varphi_{z2}\right)P\cong 800\,N \\ &M_1=\left(-6\frac{v_2}{a}+2\varphi_{z2}\right)Pa\cong 600000\,Nmm \\ &H_4=-1000\frac{u_3}{a}P\cong 600\,N;\quad V_4=\left(-12\frac{v_3}{a}-6\varphi_{z3}\right)P\cong 200\,N \\ &M_4=\left(6\frac{v_3}{a}+2\varphi_{z3}\right)Pa=-400000\,Nmm \end{aligned} \tag{12.76}$$

- *Diagramele de eforturi* axiale N, tăietoare T şi încovoietoare M_i sunt trasate în figurile 12.28, 12.29 şi 12.30.

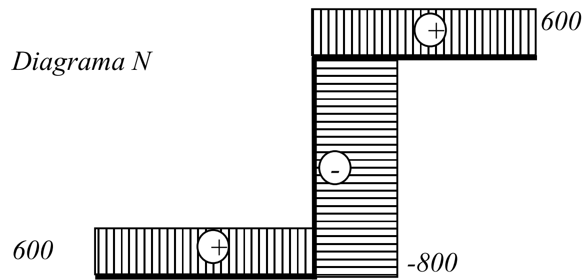


Fig.12.28

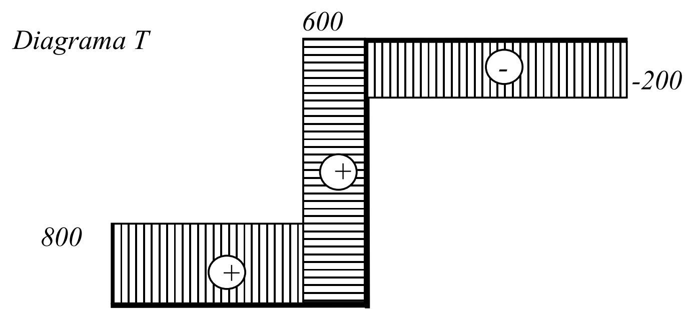


Fig.12.29

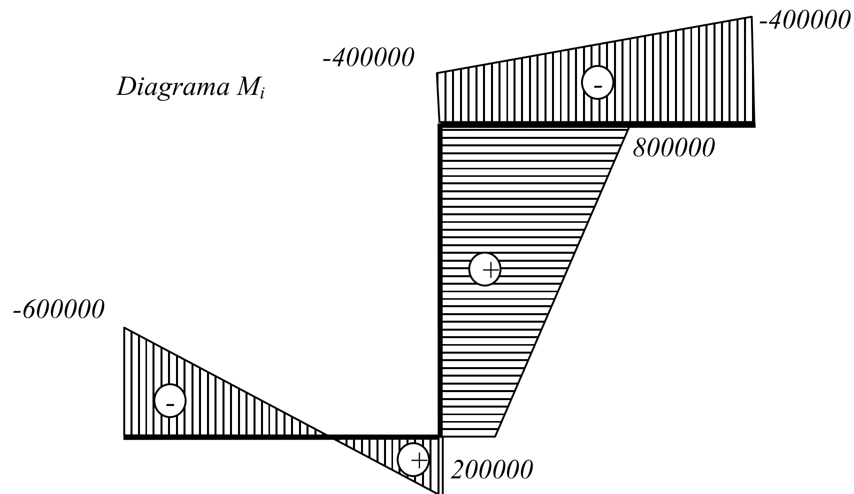


Fig.12.30

12.4. Probleme propuse

Folosind metoda eforturilor şi metoda deplasărilor, pentru sistemele static nedeterminate plane formate din bare cu noduri rigide, încărcate ca în figurile 12.31...12.34 , se cere:

- să se determine reacțiunile şi eforturile din bare;
- să se traseze diagramele de eforturi *N, T* şi M_i;
- să se calculeze deplasarea pe verticală a nodului liber (*2*).

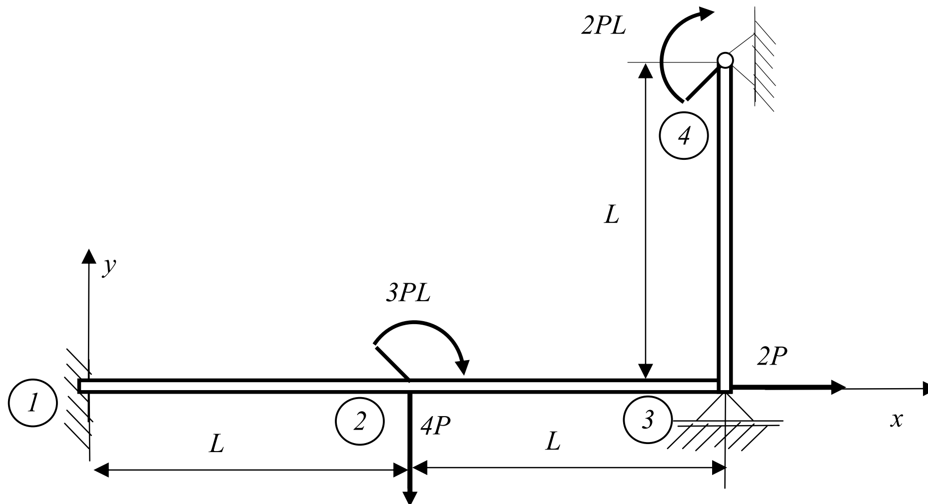


Fig. 12.31

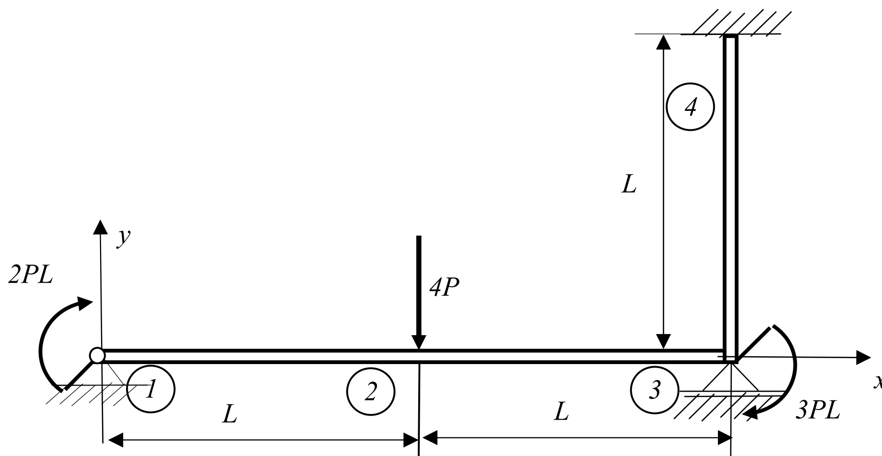


Fig.12.32

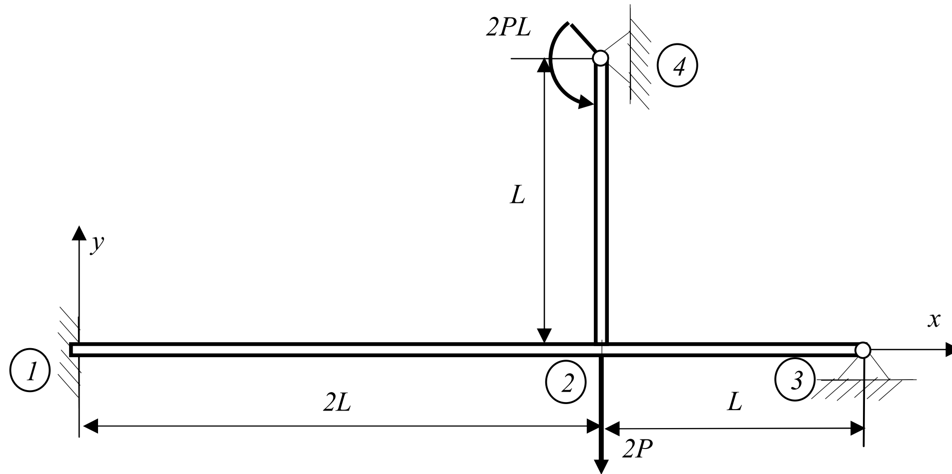


Fig.12.33

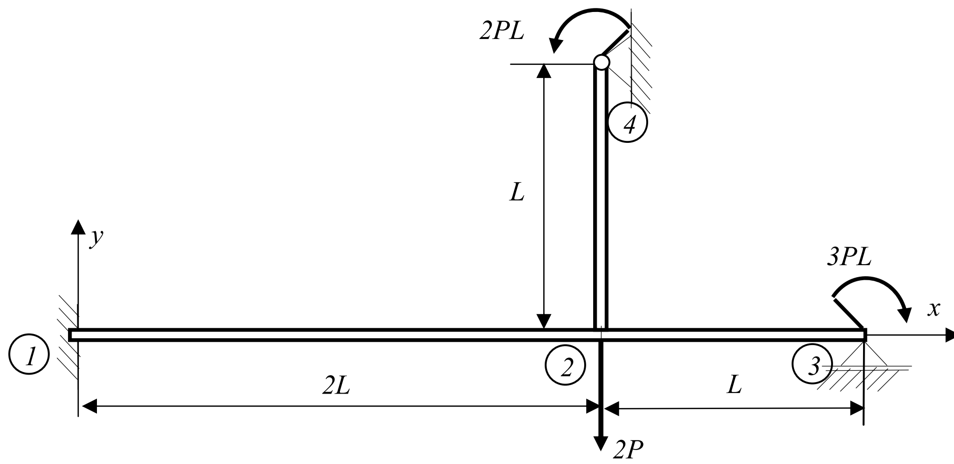


Fig.12.34

13

STAREA PLANĂ DE TENSIUNI ŞI DEFORMAŢII

13.1. Starea plană de tensiuni

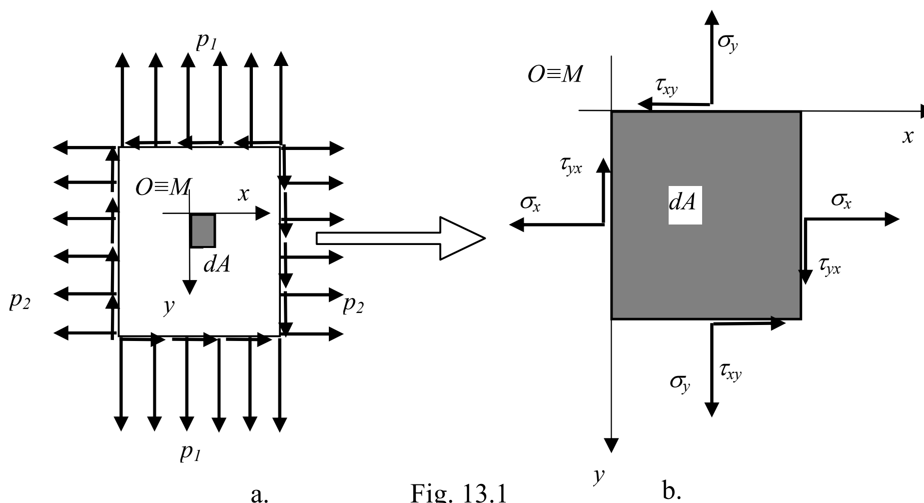
Starea plană de tensiuni într-un corp elastic omogen şi izotrop se obține atunci când există aceeaşi distribuție a tensiunilor în diferite plane paralele cu planul dat iar tensiunile după o direcție perpendiculară la planul respectiv sunt nule. Exemple de stări plane de tensiuni :

- placă plană subțire supusă acțiunii unor forțe conținute în planul ei (fig.13.1);
- bară prismatică solicitată la încovoiere pură simetrică sau încovoiere simplă simetrică ;
- placă plană circulară supusă acțiunii unor forțe de inerție axial simetrice ;
- un tub cilindric cu pereți groşi de lungime infinită supus acțiunii unor forțe de presiune.

Datorită fenomenului contracției transversale specific materialelor elastice omogene şi izotrope, unei stări plane de tensiune îi corespunde totdeauna o stare spațială de deformații.

13.1.1. Tensorul tensiunilor

Se consideră o placă plană dreptunghiulară subțire, având grosimea g mult mai mică în raport cu dimensiunile ei solicitată pe conturul ei de sarcinile uniform distribuite p_1 şi p_2 , ca în figura 13.1.a.



a. Fig. 13.1 b.

Se defineşte tensorul tensiunilor în cazul stării plane de tensiuni din planul *Oxy,* matricea formată din componentele tensiunilor ce acționează asupra elementului de suprafață dA (fig.13.1.b):

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \tag{13.1}$$

Unei stări plane de tensiune îi corespunde o stare de deformații spațială, caracterizată de tensorul deformațiilor T_ε :

$$T_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{13.2}$$

13.1.2. Variația tensiunilor σ şi τ cu unghiul α al normalei planului cu axa *Ox*

Se consideră un punct *M* al plăcii dreptunghiulare de grosime *g* din planul *Oxy* şi un element de forma unui triunghi dreptunghic având vârful de 90^0 în originea sistemului de axe (*O≡M*) şi catetele orientate după axele *Ox* şi *Oy* (fig.13.2.a).

Pe fețele laterale ale elementului (corespunzătoare catetelor *OA* şi *OB*) avem tensiunile σ_x, σ_y, τ_{yx} şi τ_{xy}, iar pe suprafața laterală a ipotenuzei *BC*, tensiunile σ şi τ (fig. 13.2.a). Această față are normala *On* înclinată cu unghiul α față de axa *Ox* Forțele elementare corespunzătoare acestor tensiuni (fig. 13.2.b) se scriu:

$$\begin{aligned} &dF_x = \sigma_x \cdot g \cdot ds \cdot cos\,\alpha; \quad && dF_y = \sigma_y \cdot g \cdot ds \cdot sin\,\alpha; \\ &dF_{yx} = \tau_{yx} \cdot g \cdot ds \cdot cos\,\alpha; \quad && dF_{xy} = \sigma_{xy} \cdot g \cdot ds \cdot sin\,\alpha; \\ &dF_\tau = \tau \cdot g \cdot ds; \quad && dF_\sigma = \sigma \cdot g \cdot ds \end{aligned} \tag{13.3}$$

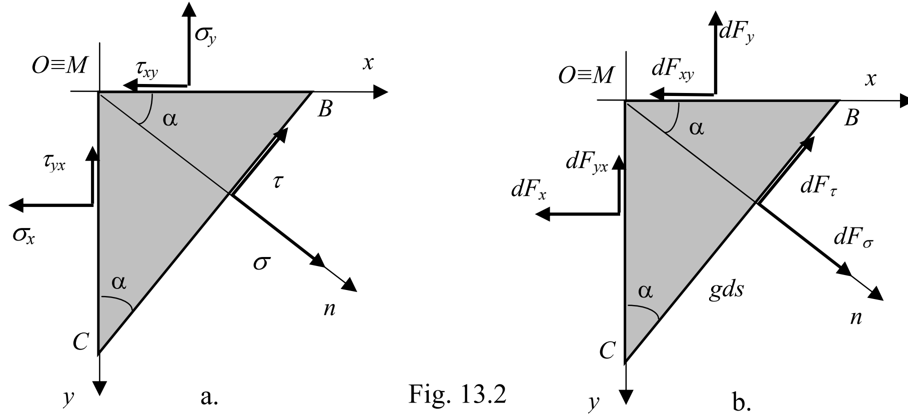


Fig. 13.2

Ecuațiile de echilibru a forțelor care acționează asupra elementului triunghiular după cele două direcții *On* (direcția lui σ) şi *BC* (direcția lui τ) se scriu:

$$\sum F_\sigma = 0 \Rightarrow \quad \tau \cdot gds - \sigma_x \cdot gds \cos\alpha \cdot \cos\alpha + \sigma_y \cdot gds \sin\alpha \cdot \sin\alpha + \\ + \tau_{yx} \cdot gds \cos\alpha \cdot \sin\alpha - \tau_{xy} \cdot gds \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0 \\ \sum F_\tau = 0 \Rightarrow \quad \tau \cdot gds - \sigma_x \cdot gds \cos\alpha \cdot \sin\alpha + \sigma_y \cdot gds \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \\ + \tau_{yx} \cdot gds \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \tau_{xy} \cdot gds \sin\alpha \cdot \sin\alpha = 0 \qquad (13.4)$$

Dacă se reduc termenii şi se ține seama de *teorema dualității tensiunilor tangențiale* ($\tau_{yx} = \tau_{xy}$) se obțin expresiile tensiunilor σ şi τ în funcție de unghiul α :

$$\sigma = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + 2\tau_{xy} \sin\alpha \cdot \cos\alpha; \\ \tau = (\sigma_x - \sigma_y)\sin\alpha \cdot \cos\alpha - \tau_{xy}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha). \qquad (13.5)$$

Dacă se scriu expresiile (13.5) în funcție de unghiul 2α se obține:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha; \\ \tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha - \tau_{xy} \cos 2\alpha. \qquad (13.6)$$

Expresiile (13.6) se mai scriu sub forma echivalentă:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \psi \cos(2\alpha - 2\theta); \qquad \tau = \psi \cos(2\alpha - 2\varphi); \\ \psi = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}; \qquad (13.7) \\ \theta = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\right); \quad \varphi = \frac{1}{2} arctg\left(-\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}\right)$$

Se observă că tensiunile normale σ şi tensiunile tangențiale τ admit valori maxime sau minime a căror expresii se deduc din relația (13.7):

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}, \quad pentru \quad \alpha = \theta \\ \tau_{1,2} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad , \quad pentru \quad \alpha = \varphi \qquad (13.8)$$

Aceleaşi expresii se pot obține prin anularea derivatelor de ordinul întâi a funcțiilor tensiunilor de unghiului 2α.

13.1.3. Direcţii şi tensiuni principale

Pentru determinarea valorilor unghiului θ corespunzătoare tensiunilor normale maxime sau minime se anulează derivata expresiei tensiunii (13.6) în raport cu 2α:

$$\frac{d\sigma}{d(2\alpha)} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = 0 \tag{13.9}$$

Comparând rezultatul (13.9) cu expresia (13.6) se observă că derivata tensiunii normale în raport cu 2α este egală cu tensiunea tangenţială τ cu semnul minus:

$$\frac{d\sigma}{d(2\alpha)} = -\tau \tag{13.10}$$

Rezultă o proprietate importantă : *în secţiunile în care tensiunile normale devin maxime sau minime, tensiunile tangenţiale se anulează.* Reciproca nu este adevărată. Tensiunile normale maxime sau minime se mai numesc *tensiuni normale principale*, iar direcţiile normalelor la planele respective se numesc *direcţii principale.*

Unghiurile direcţiilor principale sunt date de soluţiile ecuaţiei trigonometrice :

$$tg 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{13.11}$$

Soluţiile sunt de forma: $2\theta_k = arctg \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} + k\pi$, *k=1, 2, 3, ...* (13.12)

Numai primele două soluţii (13.12) sunt distincte:

$$\theta_1 = \frac{1}{2} arctg \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$
$$\theta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} arctg \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \tag{13.12'}$$

Din expresiile soluţiilor (13.12') rezultă că *direcţiile principale sunt perpendiculare între ele*.

Expresiile *tensiunilor principale* σ_1 sau σ_2 se obţin înlocuind soluţiile (13.12') în relaţia (13.6) obţinându-se aceleaşi expresii (13.8):

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{13.13}$$

Din expresiile (13.13) se observă că suma tensiunilor normale principale nu depinde de unghiul α fiind *un invariant al stării plane de tensiune*:

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_1 + \sigma_2 \tag{13.14}$$

Ţinând seama de relaţia (13.8) se observă că diferenţa tensiunilor principale (13.13) este dublul tensiunii tangenţiale maxime:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{yx}^2} = 2\tau_1 \tag{13.15}$$

Conform relaţiei (13.10) tensiunile tangenţiale cuprinse în planele corespunzătoare tensiunilor principale, sunt nule.

În figura 13.3 sunt reprezentate direcțiile principale θ_1, θ_2 şi tensiunile principale corespunzătoare σ_1 şi σ_2 deduse conform relațiilor mai sus.

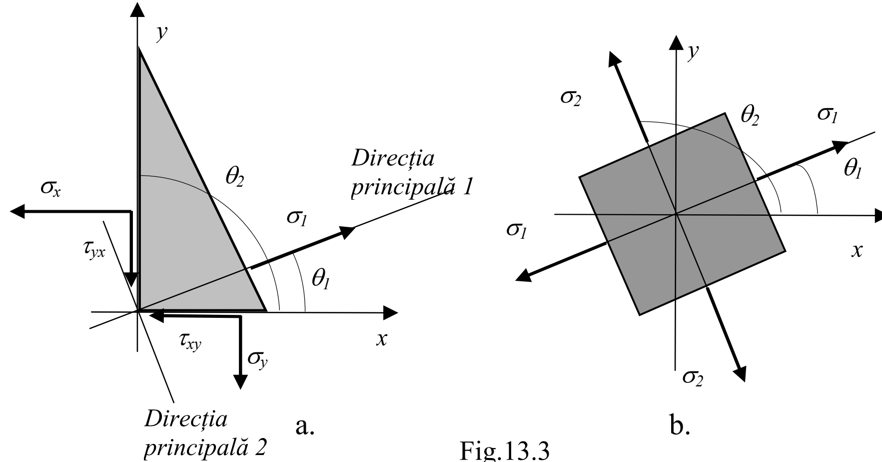


Fig.13.3

13.1.4. Tensiuni tangențiale maxime sau minime

Pentru determinarea valorilor unghiului φ corespunzătoare tensiunilor tangențiale maxime sau minime se anulează derivata expresiei tensiunii (13.6) în raport cu 2α:

$$\frac{d\tau}{d(2\alpha)} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} cos\, 2\alpha + \tau_{xy}\, sin\, 2\alpha = 0 \qquad (13.16)$$

Direcțiile normalelor la planele corespunzătoare *tensiunilor tangențiale maxime sau minime* sunt date de soluțiile ecuației trigonometrice:

$$tg 2\varphi = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}; \qquad (13.17)$$

Soluțiile ecuației trigonometrice (13.17) sunt de forma:

$$2\varphi_k = arctg \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} + k\pi, \qquad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad (13.18)$$

Doar primele două soluții sunt distincte:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} arctg \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}}$$
$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} arctg \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2\tau_{xy}} \qquad (13.19)$$

Se observă din relația (13.19) că direcțiile normalelor la planele în care tensiunile tangențiale sunt maxime sau minime, sunt perpendiculare între ele.

Două drepte având pantele m_1 şi m_2 sunt perpendiculare între ele dacă există relaţia:

$$m_1 m_2 = -1 \tag{13.20}$$

Efectuând produsul relaţiilor (13.11) şi (13.17) se obţine :

$$tg2\theta \cdot tg2\varphi = -1\,, \tag{13.21}$$

deci cele două direcţii având pantele respectiv : $m_1 = tg2\theta$ şi $m_2 = tg2\varphi$ sunt perpendiculare între ele şi se poate scrie:

$$2\varphi = 2\theta \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{sau} \quad \varphi = \theta \pm \frac{\pi}{4} \tag{13.22}$$

Rezultă următoarea proprietate: *planele corespunzătoare tensiunilor tangenţiale maxime sau minime sunt înclinate cu 45^0 faţă de cele corespunzătoare tensiunilor normale principale.*

Expresiile tensiunilor tangenţiale maxime sau minime se obţin înlocuind expresiile (13.19) ale unghiurilor φ_1 şi φ_2 în (13.6):

$$\tau_{1,2} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{13.23}$$

Tensiunile tangenţiale maxime sau minime sunt egale ca valoare absolută dar au semne opuse, ceea ce confirmă *principiul dualităţii tensiunilor*.

Ţinând seama de relaţia (13.15) tensiunile tangenţiale maxime şi minime se scriu:

$$\tau_{1,2} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \tag{13.24}$$

Tensiunile normale corespunzătoare planelor în care tensiunile tangenţiale sunt maxime sau minime extreme se obţin înlocuind expresiile (13.19) ale unghiurilor φ_1 şi φ_2 în expresia tensiunii normale (13.6):

$$\sigma_{1,2}^* = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \tag{13.25}$$

În figura 13.4 sunt reprezentate cele două direcţii înclinate cu 45^0 faţă de cele principale pentru care tensiunile tangenţiale corespunzătoare sunt maxime respectiv minime.

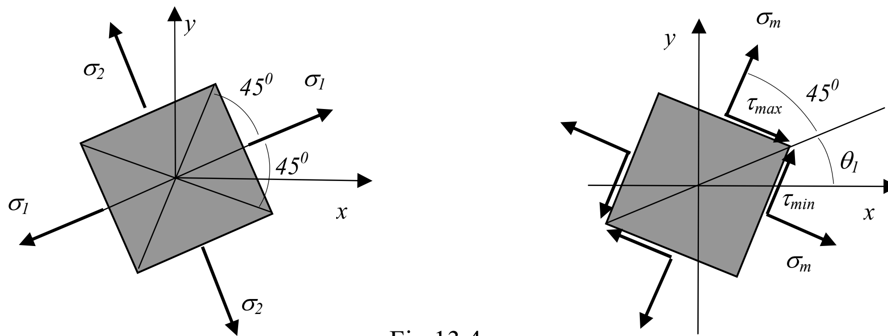


Fig.13.4

13.2. Cercul lui MOHR

Relațiile (13.6) pentru calculul tensiunilor σ şi τ (ecuațiile parametrice) se scriu:

$$\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} cos\, 2\alpha + \tau_{xy}\, sin\, 2\alpha$$
$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} sin\, 2\alpha - \tau_{xy}\, cos\, 2\alpha \qquad (13.26)$$

Pentru a elimina parametrul α se ridică la pătrat relațiile (13.26) şi se însumează membru cu membru obținându-se:

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \qquad (13.27)$$

În figura 13.5.a s-a reprezentat în coordonate σ - τ curba (13.27) ce reprezintă ecuația cercului lui MOHR având :

- centrul $C\left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2},\ 0\right)$, raza $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ (13.28)

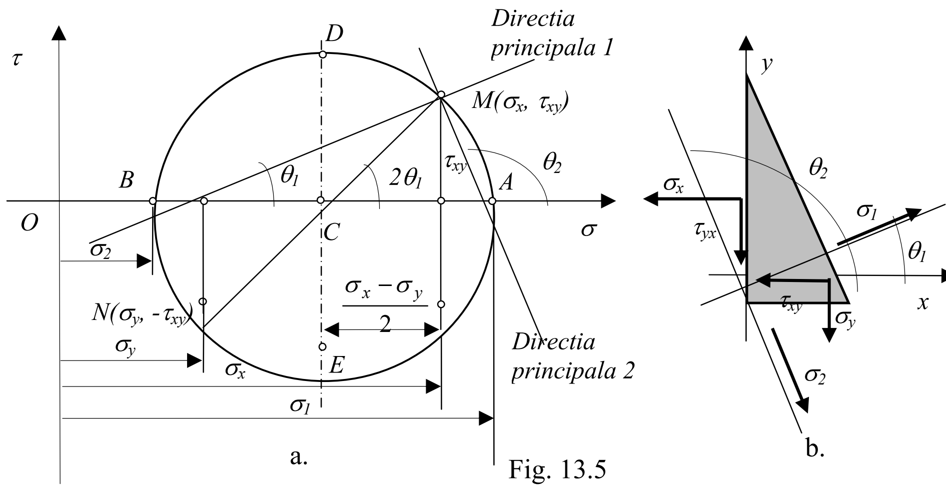


Fig. 13.5

Valorile tensiunilor normale principale σ_1 şi σ_2 sunt abscisele punctelor de intersecție A şi B ale cercului lui MOHR cu axa Oσ (fig.13.5) şi au expresiile:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Valorile unghiurilor direcțiilor principale θ_1 şi θ_2 pentru o stare oarecare de tensiuni dată de σ_x, σ_y *şi* τ_{yx} se obține folosind cercul lui MOHR (fig.13.5.a) :

$$2\theta_1 = arctg\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad si \quad \theta_2 = \theta_1 + \frac{\pi}{2}$$

Punctele *A* şi *B* de pe cercul lui *MOHR* corespund unor tensiuni tangențiale nule: $\tau_{xy}=0$ şi unor direcții principale $2\theta_1=0$ respectiv $2\theta_2=180^0$, deci axele *Ox* şi *Oy* sunt direcții principale. În acest caz : $\sigma_x \equiv \sigma_1$, $\sigma_y \equiv \sigma_2$.

Punctele *D* şi *E* de pe cercul lui *MOHR* corespund unor plane înclinate cu 45^0 față de direcțiile principale : $2\varphi_1=90^0$ şi $2\varphi_2=270^0$ şi unor tensiuni tangențiale maximă respectiv minimă: $\tau_{1,2} = \pm\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$; tensiunile normale sunt: $\sigma^*_{1,2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$.

În cazul particular când axele sistemului *Oxy* sunt orientate după direcțiile principale : $\sigma_x \equiv \sigma_1$, $\sigma_y \equiv \sigma_2$, $\tau_{xy}=0$ şi ecuațiile parametrice (13.26) se scriu:

$$\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} cos\, 2\alpha$$
$$\tau = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} cos\, 2\alpha \qquad (13.29)$$

Eliminând parametrul α se obține ecuația cercului lui MOHR :

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \qquad (13.30)$$

Cercul lui *MOHR* (13.30) reprezentat în figura 13.6, are centrul de coordonate $C\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, 0\right)$ şi raza $R=\left|\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right|$. O stare plană de tensiuni σ - τ este reprezentată pe cercul lui MOHR prin punctul $M(\sigma, \tau)$, în funcție de unghiul α dintre planul respectiv şi axa *Ox* (fig.13.6).

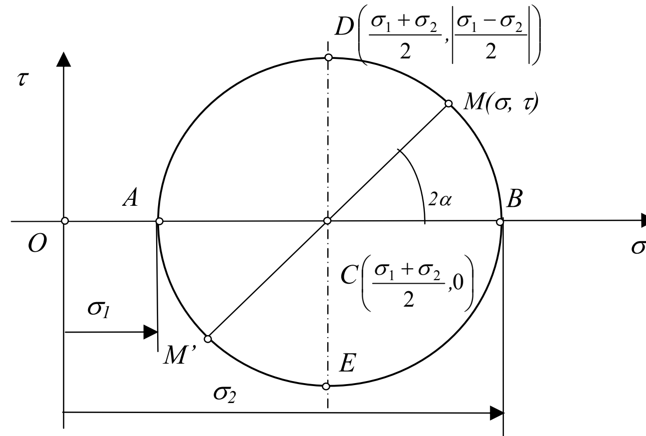


Fig. 13.6

13.3. Cercul lui LAND

Cercul tensiunilor lui LAND este o reprezentare a tensiunilor principale σ_1, σ_2 şi a tensiunii tangențiale maxime τ_{max} în sistemul de coordonate σ - τ în funcție de tensiunile date: σ_x, σ_y, τ_{xy}. Direcțiile principale şi cercul lui LAND se obțin reprezentând în coordonatele σ - τ punctele *A*, *B* şi *D* (punctul *O* este originea sistemului de axe, conform figurii 13.7) astfel:

- segmentul $OA = |\sigma_x|$ se reprezintă pe axa $O\sigma$ din origine în sensul pozitiv al axei dacă $\sigma_x > 0$ şi în sens negativ dacă $\sigma_x < 0$;
- segmentul $AB = |\sigma_y|$ se reprezintă pe axa $O\sigma$ din punctul *A* în sensul pozitiv al axei dacă $\sigma_y > 0$ şi în sens negativ dacă $\sigma_y < 0$;
- punctul *D* se reprezintă pe verticala dusă în punctul *A* în sens pozitiv al axei $O\tau$ dacă $\tau_{xy} > 0$ şi în sens negativ al axei dacă $\tau_{xy} < 0$, astfel încât $AD = \tau_{xy}$;

Cu ajutorul cercul lui LAND având diametrul *OB* se obțin :

- Direcțiile principale: $tg(2\theta) = \dfrac{DA}{CA} = \dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$ (13.31)

- Tensiunile principale : $\sigma_1 = M'C + CD = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$; (13.32)

$$\sigma_2 = MC - CD = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}; \quad (13.33)$$

- Tensiunea tangențială maximă : $\tau_{max} = CD = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$ (13.34)

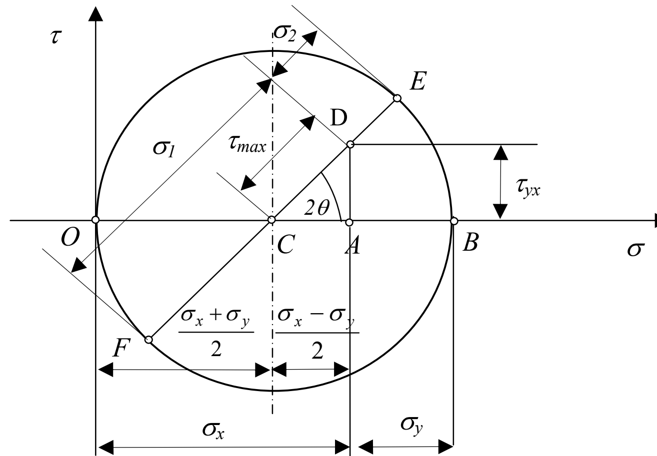


Fig. 13.7

13.4. Cazuri particulare ale stării plane de tensiuni

13.4.1. Întinderea *sau* compresiunea monoaxială

Se consideră o placă dreptunghiulară supusă unei stări de tensiuni de întindere după direcţia axei *Ox* ca în figura 13.8.a. Starea de tensiuni din jurul punctului *O* este caracterizată numai de componenta σ_x (fig.13.8.b).

Într-un plan înclinat cu unghiul α tensiunile σ şi τ au expresiile particulare:

$$\sigma = \frac{\sigma_x}{2}(1 + cos\,2\alpha); \qquad \tau = \frac{\sigma_x}{2} sin\,2\alpha \tag{13.35}$$

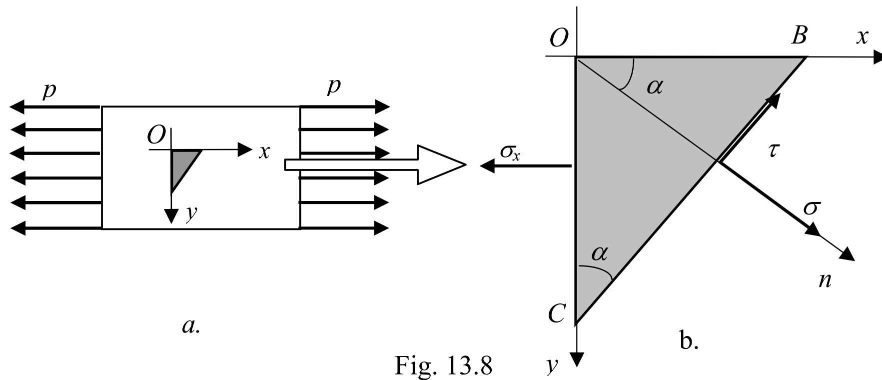


Fig. 13.8

Tensiunile principale σ_1 şi σ_2 , tensiunile tangenţiale maximă şi minimă şi tensiunea $\sigma_{1,2}^*$ date de relaţiile (13.13), (13.23) şi (13.25) devin:

$$\sigma_1 = \sigma_x; \ \sigma_2 = 0; \qquad \tau_{max,min} = \pm\frac{\sigma_x}{2}; \ \sigma_{1,2}^* = \frac{\sigma_x}{2} \tag{13.36}$$

Direcţiile principale şi direcţiile corespunzătoare tensiunilor tangenţiale maxime date de relaţiile (13.11) (13.17) sunt în acest caz date de:

$$tg2\theta = 0 \quad \Rightarrow \theta_1 = 0; \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}; \qquad tg2\varphi = \infty \quad \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}; \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}; \tag{13.37}$$

În cazul compresiunii uniaxiale $\sigma_x < 0$ şi relaţiile (13.36) şi (13.37) devin:

$$\sigma_1 = 0; \quad \sigma_2 = \sigma_x \qquad \tau_{max,min} = \pm\frac{\sigma_x}{2}; \ \sigma_{1,2}^* = \frac{\sigma_x}{2} < 0 \tag{13.38}$$

$$tg2\theta = 0 \quad \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{2}; \quad \theta_2 = 0; \qquad tg2\varphi = \infty \quad \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{4}; \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{4}; \tag{13.39}$$

13.4.2. Întinderea *sau* compresiunea biaxială

Se consideră o placă dreptunghiulară de grosime *g* solicitată la întindere după două direcții perpendiculare *Ox* şi *Oy* ca în figura 13.9.a. Starea de tensiuni din jurul punctului O este caracterizată numai de $\sigma_x > 0$ şi $\sigma_y > 0$, tensiunile tangențiale pe cele două fețe laterale sunt nule : $\tau_{yx} = \tau_{xy} = 0$ (fig. 13.9.b).

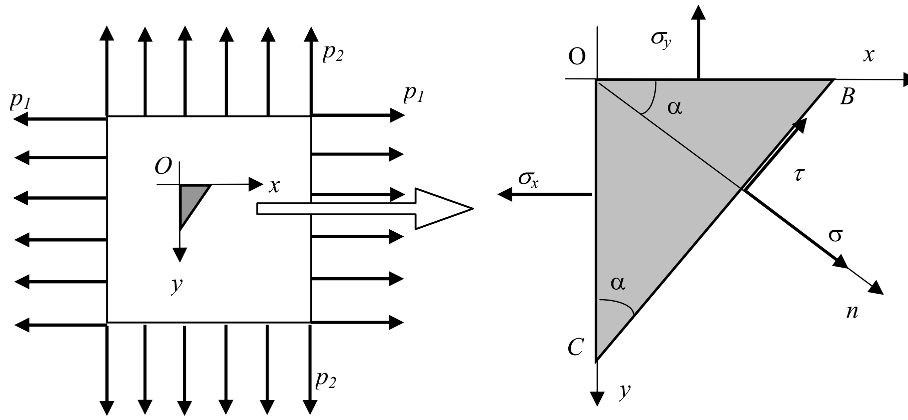


Fig. 13.9

Tensiunile pe o suprafață având normala înclinată cu unghiul α față de axa Ox au pentru acest caz particular expresiile:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} cos\, 2\alpha; \tag{13.40}$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} sin\, 2\alpha. \tag{13.41}$$

Tensiunile principale σ_1 şi σ_2, tensiunile tangențiale maximă şi minimă şi tensiunea $\sigma^*_{1,2}$ date de relațiile (13.13) , (13.23) şi (13.25) devin:

$$\sigma_1 = \sigma_x;\ \sigma_2 = \sigma_y;\ (\sigma_x > \sigma_y)$$
$$\tau_{max,min} = \pm\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2};\quad \sigma^*_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} > 0 \tag{13.42}$$

Direcțiile principale şi direcțiile corespunzătoare tensiunilor tangențiale maxime date de relațiile (13.11) (13.17) sunt în acest caz date de:

$$tg2\theta = 0 \quad \Rightarrow \theta_1 = 0;\quad \theta_2 = \frac{\pi}{2};$$
$$tg2\varphi = \infty \quad \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4};\quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}; \tag{13.43}$$

În cazul compresiunii biaxiale (σ_x , $\sigma_y < 0$) relațiile (13.42), (13.43) devin:

$$\sigma_1 = \sigma_y ;\ \sigma_2 = \sigma_x ;\ (|\sigma_x| > |\sigma_z|)$$

$$\tau_{max,min} = \pm \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} ;\ \sigma_{1,2}^* = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} < 0 \tag{13.44}$$

$$tg 2\theta = 0 \quad \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{2} ;\quad \theta_2 = 0;$$

$$tg 2\varphi = \infty \quad \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{4} ;\quad \varphi_2 = \frac{\pi}{4} ; \tag{13.45}$$

Direcțiile principale coincid cu direcțiile *Ox* şi *Oy* de acțiune a forțelor exterioare iar direcțiile planelor tensiunilor tangențiale maxime sunt înclinate cu un unghi de 45^0 față de direcțiile principale

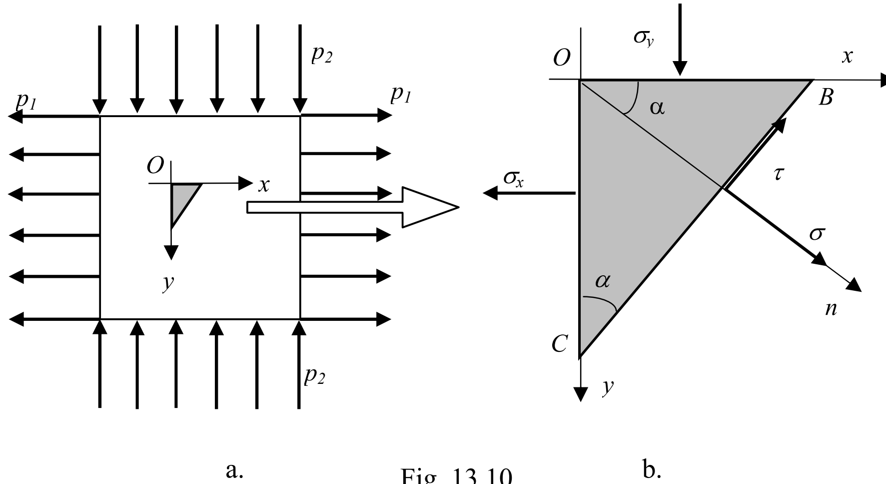
În cazul particular al *întinderii sau compresiunii biaxiale uniforme* ($\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0$) relațiile (13.40) şi (13.41) devin:

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_0 \\ \tau = 0 \end{cases} \tag{13.46}$$

Dacă elementul este solicitat la întindere sau compresiune biaxială uniformă după două direcții perpendiculare, atunci orice punct al său se obține o *stare de tensiuni de întindere sau compresiune uniformă,* indiferent de direcția normalei.

13.4.3. Întinderea *şi* compresiunea biaxială

Se consideră cazul plăcii dreptunghiulare de grosime *g* solicitată la întindere şi compresiune biaxială după două direcții perpendiculare *Ox* şi *Oy* ca în figura 13.10.a. Starea de tensiuni din jurul punctului O este caracterizată numai de tensiunile $\sigma_x > 0$ şi $\sigma_y < 0$ (cu $|\sigma_x| > |\sigma_y|$), tensiunile tangențiale pe cele două fețe laterale fiind nule : $\tau_{yx} = \tau_{xy} = 0$ (fig. 13.10.b).



a. Fig. 13.10 b.

Tensiunile pe o suprafață având normala înclinată cu unghiul α față de axa *Ox* au pentru acest caz expresiile particulare:

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} cos\, 2\alpha; \tag{13.47}$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} sin\, 2\alpha. \tag{13.48}$$

Tensiunile principale σ_1 şi σ_2 , tensiunile tangențiale maximă şi minimă şi tensiunea $\sigma_{1,2}^*$ date de relațiile (13.13) , (13.23) şi (13.25) devin:

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = \sigma_x;\ \ \sigma_2 = \sigma_y;\ \ (\sigma_x > 0; \sigma_y < 0) \\ &\tau_{max,min} = \pm\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2};\quad \sigma_{1,2}^* = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \end{aligned} \tag{13.49}$$

Direcțiile principale şi direcțiile corespunzătoare tensiunilor tangențiale maxime date de relațiile (13.11) (13.17) sunt în acest caz date de:

$$\begin{aligned} &tg 2\theta = 0 \qquad \Rightarrow \theta_1 = 0;\quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}; \\ &tg 2\varphi = \infty \qquad \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4};\quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}; \end{aligned} \tag{13.50}$$

În cazul particular al *întinderii şi compresiunii biaxial uniforme* ($|\sigma_x| = |\sigma_y| = \sigma_0$) relațiile (13.47) şi (13.48) devin:

$$\begin{aligned} &\sigma = \sigma_0 \, cos\, 2\alpha; \\ &\tau = \sigma_0 \, sin\, 2\alpha \end{aligned} \tag{13.51}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = +\sigma_0;\ \ \sigma_2 = -\sigma_0 \\ &\tau_{max,min} = \pm\sigma_0;\qquad \sigma_{1,2}^* = 0 \end{aligned} \tag{13.52}$$

Dacă elementul de placă este solicitat la întindere şi compresiune biaxial uniformă după două direcții perpendiculare, atunci orice punct al său se obține :

- *stare de întindere şi compresiune uniformă* dacă direcția normalei planului coincide cu una din direcțiile *Ox* sau *Oy*,
- *stare de forfecare pură* dacă direcția normalei planului este înclinată cu 45^0 față de direcțiile principale *Ox* sau *Oy*.

13.4.4. Forfecarea pură

Se consideră o placă dreptunghiulară de grosime *g* solicitată la forfecare după două direcții perpendiculare *Ox* şi *Oy* ca în figura 13.11.a. Starea de tensiuni din jurul punctului O este caracterizată numai de tensiunile tangențiale $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, tensiunile normale pe cele două fețe laterale fiind nule $\sigma_x = 0$, $\sigma_y = 0$ (fig. 13.11.b).

Formulele pentru calculul tensiunilor σ şi τ pe o secțiune a cărei normală este înclinată cu α față de axa *Ox*, pentru acest caz particular devin:

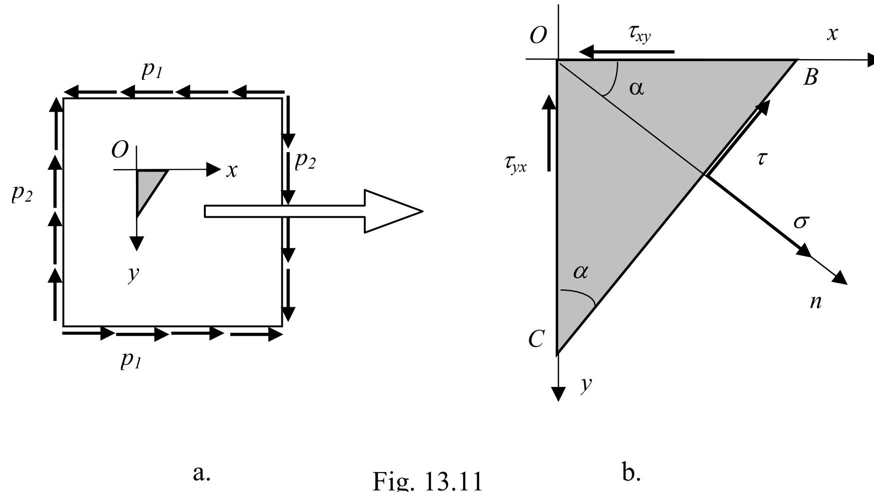
$$\sigma = \tau_{xy} \cdot sin\, 2\alpha \tag{13.53}$$

$$\tau = -\tau_{xy} \cdot cos\,2\alpha \tag{13.54}$$

Tensiunile principale σ_1 şi σ_2 , tensiunile tangenţiale maximă şi minimă şi tensiunea $\sigma^*_{1,2}$ date de relaţiile (13.13) , (13.23) şi (13.25) devin:

$$\sigma_1 = +\tau_{xy}; \quad \sigma_2 = -\tau_{xy} \tag{13.55}$$

$$\tau_{max,min} = \pm\tau_{xy}; \quad \sigma^*_{1,2} = 0 \tag{13.56}$$



a. Fig. 13.11 b.

Direcţiile principale şi direcţiile corespunzătoare tensiunilor tangenţiale maxime date de relaţiile (13.11) (13.17) sunt în acest caz date de:

$$\begin{aligned} tg2\theta = \infty \quad &\Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}; \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{4}; \\ tg2\varphi = 0 \quad &\Rightarrow \varphi_1 = 0; \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}; \end{aligned} \tag{13.57}$$

În concluzie, dacă elementul de placă este solicitat la forfecare pură atunci orice punct al său, în funcţie de poziţia planului secţiunii, se obţine :

- *stare de întindere şi compresiune uniformă,* dacă direcţia normalei planului care este înclinată cu un unghi de 45^0 faţă de direcţiile principale *Ox* sau *Oy* ;
- *stare de forfecare pură,* dacă direcţia normalei planului coincide cu una din direcţiile *Ox* sau *Oy*.

Faţă de cazul precedent - unde elementul de placă era supus pe contur la întindere şi compresiune uniformă după două direcţii perpendiculare şi într-un plan înclinat cu un unghi de 45^0 s-a obţinut o stare de *forfecare pură* - în acest caz elementul de placă este supus unei solicitări de forfecare pură pe contur iar în plane înclinate cu 45^0 s-au obţinut stări de *întindere şi compresiune uniformă.*

13.4.5. Încovoierea simplă simetrică

Se consideră o bară prismatică de secțiune simetrică (având axa de simetrie Oy) solicitată de un sistem de forțe în planul de simetrie axială al barei *Oxy.* Sub acțiunea momentului de încovoiere M_{iz}, respectiv a forței tăietoare T_y , în acest plan se produce o stare plană de tensiuni (fig. 13.12.a).

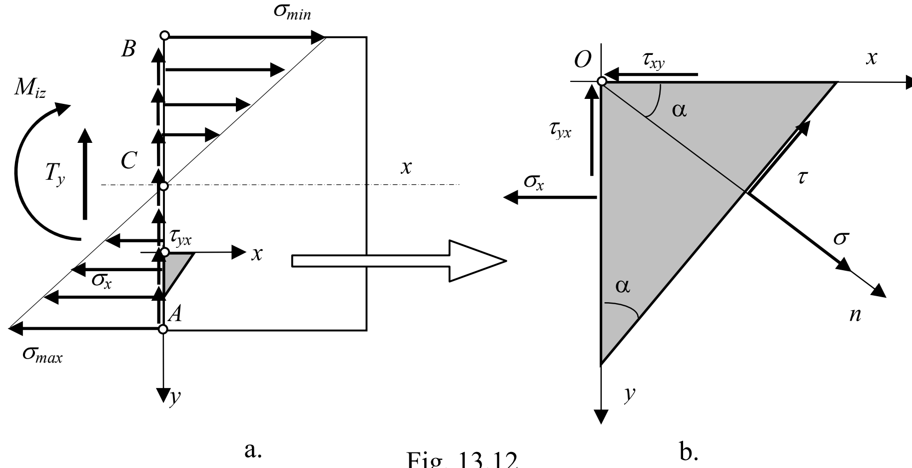


Fig. 13.12

În jurul unui punct oarecare *O* al secțiunii avem o stare plană de tensiuni este caracterizată de tensiunea normală σ_x dată de relația lui Navier și tensiunea tangențială $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ dată de formula lui Juravski:

$$\sigma_x = \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y \,; \qquad \tau_{yx} = \tau_{xy} = \frac{T_y S_z{}^*}{b I_z} \tag{13.58}$$

Tensiunile pe o suprafață plană având normala înclinată cu unghiul α față de axa *Ox* (fig.13.12.b) pentru acest caz particular au expresiile:

$$\sigma = \frac{\sigma_x}{2}\left(1 + cos\, 2\alpha\right) + \tau_{xy}\, sin\, 2\alpha \tag{13.59}$$

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2} sin\, 2\alpha - \tau_{xy}\, cos\, 2\alpha \tag{13.60}$$

Tensiunile principale σ_1 și σ_2 , tensiunile tangențiale maximă și minimă și tensiunea $\sigma_{1,2}^*$ date de relațiile (13.13) , (13.23) și (13.25) devin:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\,;$$
$$\tau_{max,min} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\,; \qquad \sigma_{1,2}^* = \frac{\sigma_x}{2} \tag{13.61}$$

Direcțiile principale şi direcțiile corespunzătoare tensiunilor tangențiale maxime date de relațiile (13.11) (13.17) sunt în acest caz date de:

$$tg2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x}\ ; \quad tg2\alpha^* = -\frac{\sigma_x}{2\tau_{xy}} \tag{13.62}$$

Rezultă că orientarea direcțiilor principale depinde de valorile pe care le iau tensiunile σ_x şi τ_{yx} valori care sunt funcții de poziția punctului O pe suprafața secțiunii sau de cota y_O (fig. 13.13).

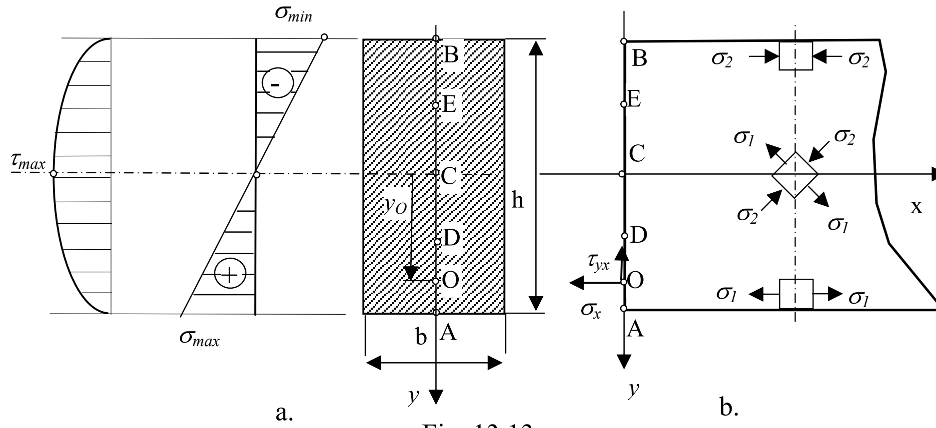


Fig. 13.13

În cazul secțiunii dreptunghiulare $b\times h$ din figura 13.13 valorile acestor tensiuni sunt:

$$\sigma_x = \frac{12M_{iz}}{bh^3}\cdot y_O\,;$$

$$\tau_{yx} = \frac{T_y S_z^*}{bI_y} = \frac{3T_y}{2bh}\left[1-4\left(\frac{y_O}{h}\right)^2\right] \tag{13.63}$$

În punctele *A, B, C, D şi E* ale secțiunii (fig.13.13) avem valorile:

- în punctul A (y_O=$h/2$):

$$\sigma_x = \frac{6M_{iz}}{bh^2} > 0, \quad \tau_{yx} = 0 \tag{13.64}$$

$$\sigma_1 = \sigma_x, \quad \sigma_2 = 0; \ \tau_{max,min} = \pm\sigma_x/2, \quad \sigma_{1,2}^* = \sigma_x/2 \tag{13.65}$$

$$\begin{aligned} &tg2\theta = 0 \quad \Rightarrow \theta_1 = 0; \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}; \\ &tg2\varphi = \infty \quad \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}; \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}; \end{aligned} \tag{13.66}$$

- în punctul D (y_O=*h/4*):

$$\sigma_x = \frac{3M_{iz}}{bh^2} > 0, \quad \tau_{yx} = \frac{9T_y}{8bh} > 0 \tag{13.67}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\,; \\ &\tau_{max,min} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\,; \quad \sigma_{1,2}^* = \frac{\sigma_x}{2} \end{aligned} \tag{13.68}$$

$$tg2\alpha = \frac{3hT_y}{4M_{iz}}; \quad tg2\alpha^* = -\frac{4M_{iz}}{3hT_y} \tag{13.69}$$

- în punctul C (y_O=*0*):

$$\sigma_x = 0, \quad \tau_{yx} = \frac{3T_y}{2bh} \tag{13.70}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = \tau_{xy}, \quad \sigma_2 = -\tau_{yx}; \\ &\tau_{max,min} = \pm\tau_{xy}, \quad \sigma_{1,2}^* = 0 \end{aligned} \tag{13.71}$$

$$\begin{aligned} &tg2\theta = \infty \quad \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{4}; \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{4}; \\ &tg2\varphi = 0 \quad \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{2}; \quad \varphi_2 = 0; \end{aligned} \tag{13.72}$$

- în punctul E (y_O= - *h/4*):

$$\sigma_x = -\frac{3M_{iz}}{bh^2} < 0, \quad \tau_{yx} = \frac{9T_y}{8bh} > 0 \tag{13.73}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2}\,; \\ &\tau_{max,min} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{yx}^2}\,; \quad \sigma_{1,2}^* = \frac{\sigma_x}{2} \end{aligned} \tag{13.74}$$

$$tg2\alpha = -\frac{3hT_y}{4M_{iz}}; \quad tg2\alpha^* = +\frac{4M_{iz}}{3hT_y} \tag{13.75}$$

- în punctul B (y_O= - *h/2*):

$$\sigma_x = -\frac{6M_{iz}}{bh^2} < 0, \quad \tau_{yx} = 0 \tag{13.76}$$

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \sigma_x; \quad \tau_{max,min} = \mp\sigma_x / 2, \quad \sigma_{1,2}^* = \sigma_x / 2 \tag{13.77}$$

$$\begin{aligned} &tg2\theta = 0 \quad \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{2}; \quad \theta_2 = 0; \\ &tg2\varphi = \infty \quad \Rightarrow \varphi_1 = -\frac{\pi}{4}; \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{4}; \end{aligned} \tag{13.78}$$

Direcţiile principale se rotesc din punctul A în punctul B al secţiunii cu 90^0 în sens invers trigonometric dacă eforturile secţionale T_y şi M_{iz} sunt pozitive, şi în sens trigonometric dacă eforturile secţionale T_y şi M_{iz} sunt negative (fig. 13.14.b).

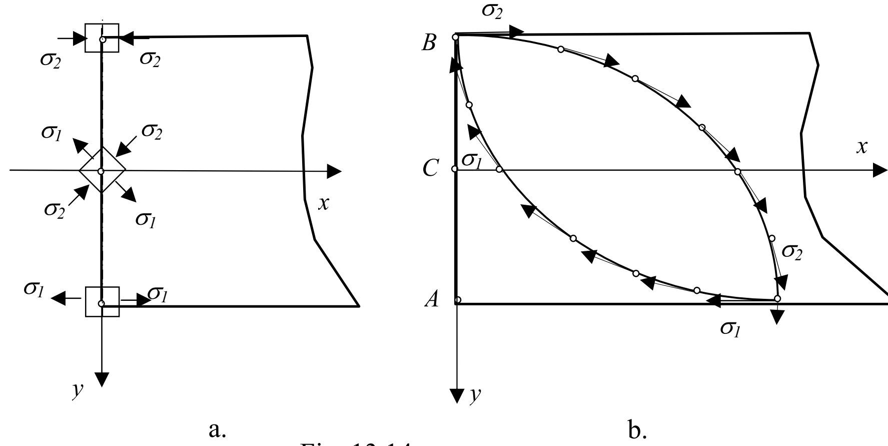


Fig. 13.14

Înfăşurătoarele direcţiilor principale ale lui σ_1 şi σ_2 sunt două curbe perpendiculare între ele numite *linii izostatice de întindere* şi respectiv *de compresiune* (fig.13.14.b).

13.4.6. Încovoierea pură simetrică

Se consideră o bară prismatică de secţiune simetrică (axa de simetrie Oy) solicitată de un cuplu de forţe coplanare cu planul de simetrie axială al barei Oxy. Sub acţiunea momentului de încovoiere M_{iz} se produce în planul Oxy o stare plană de tensiuni (fig. 13.15.a). În jurul unui punct oarecare O al secţiunii starea de tensiuni este caracterizată numai de tensiunea normală σ_x dată de relaţia:

$$\sigma_x = \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y; \quad \tau_{yx} = 0 \tag{13.79}$$

Tensiunile σ şi τ într-un plan având normala înclinată cu unghiul α faţă de axa Ox (fig.13.15.b) pentru acest caz au expresiile:

$$\sigma = \frac{\sigma_x}{2}(1 + \cos 2\alpha) \tag{13.80}$$

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\alpha \tag{13.81}$$

Tensiunile principale σ_1 şi σ_2 , tensiunile tangenţiale maximă şi minimă şi tensiunea $\sigma_{1,2}^*$ date de relaţiile (13.13) , (13.23) şi (13.25) devin:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \left|\frac{\sigma_x}{2}\right|; \tag{13.82}$$

$$\tau_{max,min} = \pm\frac{\sigma_x}{2}; \quad \sigma^*_{1,2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_x}{2} \tag{13.83}$$

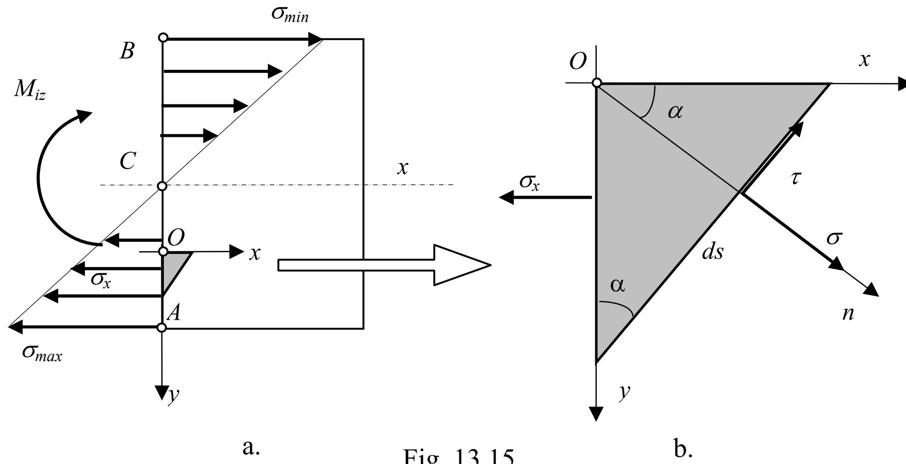


Fig. 13.15

Direcțiile principale şi direcțiile corespunzătoare tensiunilor tangențiale maxime şi minime date de relațiile (13.11) (13.17) sunt în acest caz:

$$\begin{aligned} &tg2\theta = 0 \quad \Rightarrow \theta_1 = 0; \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}; \\ &tg2\varphi = \infty \quad \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}; \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}; \end{aligned} \tag{13.84}$$

Se observă că orientarea direcțiilor principale nu depinde de valorile tensiunilor σ_x şi nici de poziția punctului O pe suprafața secțiunii.

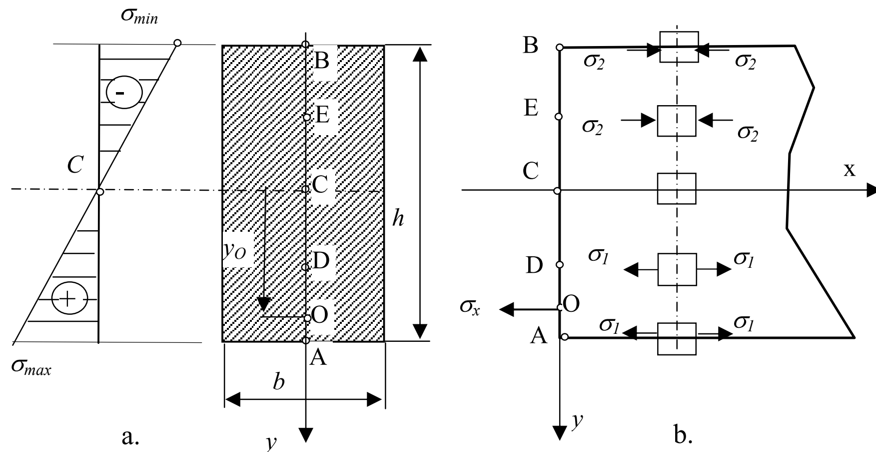


Fig. 13.16

În cazul secțiunii dreptunghiulare $b\times h$ din figura 13.16 valorile tensiunilor sunt:

$$\sigma_x = \frac{12M_{iz}}{bh^3}\cdot y_O;\quad \tau_{yx} = 0 \tag{13.85}$$

- în punctul A ($y_O = h/2$): $\sigma_x = \dfrac{6M_{iz}}{bh^2} > 0$ (13.86)

$$\sigma_1 = \sigma_x,\quad \sigma_2 = 0;\qquad \tau_{max,min} = \pm\sigma_x/2,\quad \sigma^*_{1,2} = \sigma_x/2 \tag{13.87}$$

$$tg2\theta = 0 \quad \Rightarrow \theta_1 = 0;\quad \theta_2 = \frac{\pi}{2};\qquad tg2\varphi = \infty \quad \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4};\quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}; \tag{13.88}$$

- în punctul D ($y_O = h/4$): $\sigma_x = \dfrac{3M_{iz}}{bh^2} > 0$ (13.89)

$$\sigma_1 = \sigma_x,\quad \sigma_2 = 0;\qquad \tau_{max,min} = \pm\sigma_x/2,\quad \sigma^*_{1,2} = \sigma_x/2 \tag{13.90}$$

$$tg2\alpha = \frac{2\tau_{yx}}{\sigma_x} = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = \frac{\pi}{2};\qquad tg2\alpha^* = -\frac{\sigma_x}{2\tau_{yx}} = \infty \Rightarrow \alpha^*_1 = \frac{\pi}{4};\ \alpha^*_2 = \frac{3\pi}{4} \tag{13.91}$$

- în punctul C ($y_O = 0$): $\sigma_x = 0,\quad \tau_{yx} = \dfrac{3T_y}{2bh}$ (13.92)

$$\sigma_1 = \tau_{yx},\quad \sigma_2 = -\tau_{yx};\qquad \tau_{max,min} = \pm\tau_{yx},\quad \sigma^*_{1,2} = 0 \tag{13.93}$$

$$tg2\theta = 0 \quad \Rightarrow \theta_1 = 0;\quad \theta_2 = \frac{\pi}{2};\qquad tg2\varphi = \infty \quad \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4};\quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}; \tag{13.94}$$

- în punctul E ($y_O = -h/4$):

$$\sigma_x = -\frac{3M_{iz}}{bh^2} < 0,\quad \tau_{yx} = 0 \tag{13.95}$$

$$\sigma_1 = 0,\quad \sigma_2 = \sigma_x;\qquad \tau_{max,min} = \mp\sigma_x/2,\quad \sigma^*_{1,2} = \sigma_x/2 \tag{13.96}$$

$$tg2\theta = 0 \quad \Rightarrow \theta_1 = 0;\quad \theta_2 = \frac{\pi}{2};\qquad tg2\varphi = \infty \quad \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4};\quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}; \tag{13.97}$$

- în punctul B (y_O= - *h/2*):

$$\sigma_x = -\frac{6M_{iz}}{bh^2} < 0, \quad \tau_{yx} = 0 \tag{13.98}$$

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \sigma_x; \\ &\tau_{13} = -\sigma_x / 2, \quad \sigma_{1,2}^* = \sigma_x / 2 \end{aligned} \tag{13.99}$$

$$\begin{aligned} &tg2\theta = 0 \qquad \Rightarrow \theta_1 = 0; \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2}; \\ &tg2\varphi = \infty \qquad \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4}; \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{4}; \end{aligned} \tag{13.100}$$

Se observă în acest caz că direcțiile principale rămân aceleaşi $\theta_1 = 0; \quad \theta_2 = \pi / 2$ în orice punct al secțiunii.

13.5. Starea plană de deformații

13.5.1. Deformații specifice liniare şi unghiulare

Starea plană de deformații în planul considerat *Oxy* corespunde unor deformații nule după o direcție perpendiculară pe acest plan: $\varepsilon_z = 0; \ \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ (13.101)

La fel cum starea plană de tensiuni corespunde unei stări spațiale de deformații, şi starea plană de deformații corespunde unei stări spațiale de tensiuni. Un exemplu de stare plană de deformații este starea realizată într-un corp prismatic situat între două suprafețe fixe perpendiculare pe axa *Oz*, supus unei solicitări de compresiune uniaxială după *Ox* sau după *Oy*.

Fie punctul *M* dintr-un corpul elastic supus unei stări plane de deformații şi un sistem de axe de coordonate *Oxy* cu originea în punctul M (fig.13.17). Se consideră un element dreptunghiular *OABC* având laturile *dx* şi *dy* supus unei stări plane de tensiuni. În urma deformațiilor elementul dreptunghiular devine patrulaterul *M'A'B'C'* (fig.13.17).

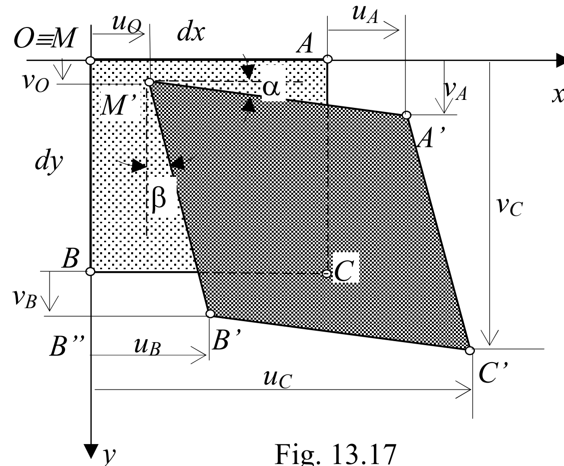


Fig. 13.17

Dacă se dezvoltă în serie *TAYLOR* în jurul punctului *O* deplasărilor după direcțiile *Ox : u(x,y)* şi după *Oy* : *(x,y)* şi se rețin numai termenii derivatelor de ordinul întâi, se obțin următoarele expresii :

$$\begin{cases} u = u_O + \dfrac{\partial u}{\partial x} dx + \dfrac{\partial u}{\partial y} dy \\ v = v_O + \dfrac{\partial v}{\partial x} dx + \dfrac{\partial v}{\partial y} dy \end{cases} \tag{13.102}$$

Ținând seama de relațiile (13.102) deformația elementului după direcția axei *Ox*, se scrie:

$$\Delta(dx) = u_A - u_O = \left(u_O + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) - u_O = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \tag{13.103}$$

Deformația specifică liniară ε_x sau *alungirea specifică* după direcția *Ox* este :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} \cong \frac{\partial u}{\partial x} \tag{13.104}$$

Ținând seama de relațiile (13.102) se obține în mod asemănător *alungirea specifică* a elementului după direcția *Oy*:

$$\Delta(dy) = v_B - v_O = \left(v_O + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) - v_O = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \tag{13.105}$$

Deformația specifică liniară ε_y după direcția axei *Oy* este:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta(dy)}{dy} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dy} + \frac{\partial v}{\partial y} \cong \frac{\partial v}{\partial y} \tag{13.106}$$

Lunecarea specifică γ_{xy} reprezintă variația unghiului de $\pi/2$ dintre laturile *MA* şi *MB* exprimată în radiani, adică suma celor două unghiuri : α al muchiei *M'A'* cu axa *Ox* şi β al muchiei *M'B'* cu axa (fig.13.17) ale căror expresii sunt:

$$\begin{aligned} \alpha &\cong tg\alpha = \frac{v_A - v_O}{(dx + u_A) - u_O} = \frac{\partial v}{\partial x} \\ \beta &\cong tg\beta = \frac{u_B - u_O}{(dy + v_B) - v_O} = \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \tag{13.107}$$

Lunecarea specifică γ_{xy} este suma celor două unghiuri α şi β (13.107):

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{13.108}$$

Expresiile (13.104), (13.106) şi (13,108) reprezintă relațiile dintre deformațiile specifice şi deplasări pentru starea plană de deformații :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \tag{13.109}$$

13.5.2. Variația deformațiilor specifice la rotirea sistemului de axe

Fie punctul *M* dintr-un corp elastic supus unei stări plane de deformații şi două sisteme de axe *Oxy* şi *Ox'y'* cu originea în punctul *M* (fig.13.18). Sistemul *Ox'y'* este rotit față de *Oxy* cu unghiul θ.

Se consideră elementul dreptunghiular *OABC* având laturile *dx* şi *dy* înainte de deformare. În urma deformațiilor acesta devine patrulaterul *M'A'B'C'* (fig.13.18).

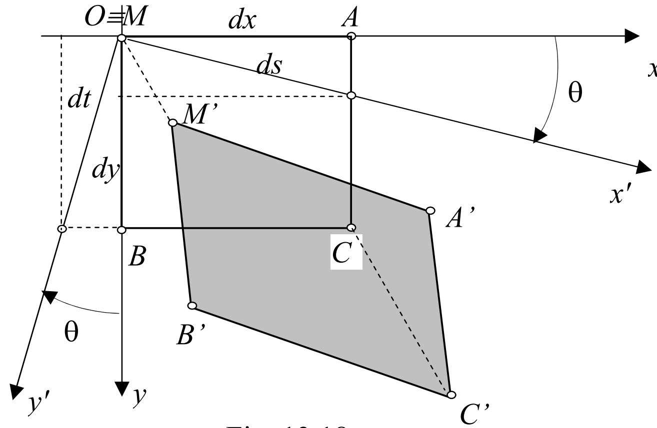


Fig. 13.18

Deplasările punctelor *M* şi *C* după direcțiile axelor *Ox'* şi *Oy'* se exprimă în funcție de deplasările după direcțiile axelor *Ox* , *Oy* şi θ (fig.13.18) astfel :

$$\begin{cases} u'_O = u_O \cos\theta + v_O \sin\theta \\ v'_O = -u_O \sin\theta + v_O \cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'_C = \left(u_O + \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy \right)\cos\theta + \left(v_O + \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy \right)\sin\theta \\ v'_C = -\left(u_O + \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy \right)\sin\theta + \left(v_O + \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy \right)\cos\theta \end{cases} \qquad (13.110)$$

Proiecțiile laturilor *ds* şi *dt* după direcțiile axelor *Ox* şi *Oy* se scriu (fig.13.18):

$$\begin{cases} dx = ds\cos\theta \Rightarrow \dfrac{dx}{ds} = \cos\theta \\ dy = ds\sin\theta \Rightarrow \dfrac{dy}{ds} = \sin\theta \end{cases} ; \quad \begin{cases} dx = -dt\sin\theta \Rightarrow \dfrac{dx}{dt} = -\sin\theta \\ dy = ds\cos\theta \Rightarrow \dfrac{dy}{dt} = \cos\theta \end{cases} \qquad (13.111)$$

Deformațiile specifice ale elementului după *Ox'* şi *Oy'* se scriu (fig.13.18):

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\Delta'(ds)}{ds} = \frac{u'_A - u'_O}{ds} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds} \right)\cos\theta + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{ds} \right)\sin\theta$$

$$\varepsilon_{y'} = \frac{\Delta'(dt)}{dt} = \frac{v'_B - v'_O}{dt} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt} \right)\sin\theta + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt} \right)\cos\theta \qquad (13.112)$$

Ținând seama de relațiile (13.109), (13.111) și înlocuind în (13.112) se obțin deformațiile specifice după direcțiile *Ox'* și *Oy'* în funcție de deformațiile specifice din sistemul *Oxy* și unghiul θ:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \sin\theta\cos\theta \\ \varepsilon_{y'} &= \varepsilon_x \sin^2\theta + \varepsilon_y \cos^2\theta - \gamma_{xy} \sin\theta\cos\theta \end{aligned} \qquad (13.113)$$

Lunecarea specifică $\gamma_{x'y'}$ se obține în mod analog cu γ_{xy} ca suma celor două unghiuri α' și β' :

$$\begin{aligned} \alpha' &\cong tg\alpha' = \frac{v_{A'} - v_{O'}}{(ds + u_{A'}) - u_{O'}} \\ \beta' &\cong tg\beta' = \frac{u_{B'} - u_{O'}}{(dt + v_{B'}) - v_{O'}} \end{aligned} \qquad (13.114)$$

în care deplasările nodurilor *A* și *B* după direcțiile *Ox'* și *Oy'* se scriu:

$$\begin{cases} u'_A = \left(u_O + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)\cos\theta + \left(v_O + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\sin\theta \\ v'_A = -\left(u_O + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)\sin\theta + \left(v_O + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'_B = \left(u_O + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)\cos\theta + \left(v_O + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\sin\theta \\ v'_B = -\left(u_O + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right)\sin\theta + \left(v_O + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right)\cos\theta \end{cases} \qquad (13.115)$$

Înlocuind în expresiile (13.114) și neglijând termenii foarte mici de la numitor în raport cu *ds* și *dt* se obține :

$$\begin{aligned} \alpha' &\cong tg\alpha' = -\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right)\sin\theta + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{ds}\right)\cos\theta \\ \beta' &\cong tg\beta' = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)\sin\theta \end{aligned} \qquad (13.116)$$

Ținând seama de relațiile (13.111) și înlocuind în (13.116) se obține lunecarea:

$$\gamma_{x'y'} = \alpha' + \beta' = -2\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\sin\theta\cos\theta + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \qquad (13.117)$$

Ținând seama de relațiile (13.104), (13.106) și (13,108) se obține lunecarea specifică: $\gamma_{x'y'} = -2\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)\sin\theta\cos\theta + \gamma_{xy}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$ (13.118)

Relațiile (13.113) și (13.117) se pot scrie în funcție de unghiul 2θ:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta \\ \varepsilon_{y'} &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta - \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta \\ \gamma_{x'y'} &= -\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)\sin 2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta \end{aligned} \qquad (13.119)$$

13.5.3. Deformații specifice principale

Deformațiile specifice liniare $\varepsilon_{x'}$, $\varepsilon_{y'}$ variază cu unghiul θ și ating valori maxime sau minime. Pentru a determina unghiul θ se anulează derivatele expresiilor deformațiilor liniare (13.119) în raport cu 2θ:

$$\frac{d\varepsilon_{x'}}{d(2\theta)} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} sin\,2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} cos\,2\theta = 0$$
$$\frac{d\varepsilon_{y'}}{d(2\theta)} = \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} sin\,2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2} cos\,2\theta = 0 \qquad (13.120)$$

Comparând expresiile (13.120) cu expresia lui $\gamma_{x'y'}$ (13.119) se observă că derivata deformațiilor specifice $\varepsilon_{x'}$ și $\varepsilon_{y'}$ în raport cu 2θ este ½ din lunecarea specifică γ_{xy}:

$$\frac{d\varepsilon_{x'}}{d(2\theta)} = -\frac{d\varepsilon_{x'}}{d(2\theta)} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \qquad (13.121)$$

Ca și în cazul tensiunilor principale *în secțiunile în care deformațiile specifice liniare devin maxime sau minime, lunecarea specifică se anulează.* Reciproca nu este adevărată. Deformațiile specifice maxime sau minime se numesc *deformații principale*. Unghiurile direcțiilor deformațiilor specifice principale sunt date de soluțiile ecuației trigonometrice :

$$tg2\theta^* = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \qquad (13.122)$$

Soluțiile ecuației (13.122) sunt:

$$\theta_1^* = arctg\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}; \qquad \theta_2^* = \frac{\pi}{2} + arctg\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \qquad (13.123)$$

Deformațiile specifice principale ε_1 sau ε_2 se obțin înlocuind soluțiile (13.123) în relația (13.119) :

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \qquad (13.124)$$

Se poate arăta că direcțiile deformațiilor specifice principale ε_1 și ε_2 sunt identice cu direcțiile tensiunilor principale σ_1 și σ_2.

13.5.4. Lunecări specifice maxime sau minime

Deformațiile specifice unghiulare depind de valoarea unghiului θ și ating valori maxime sau minime. Pentru aceasta se anulează derivatele expresiei lunecării specifice (13.119) în raport cu 2θ:

$$\frac{d\gamma_{x'y'}}{d(2\theta)} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)cos\,2\theta - \gamma_{xy}\,sin\,2\theta = 0 \qquad (13.125)$$

Unghiurile direcțiilor normale la planele lunecărilor specifice maxime sau minime sunt date de soluțiile ecuației trigonometrice :

$$tg2\theta^{**} = -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{\gamma_{xy}} \qquad (13.126)$$

Soluțiile ecuației (13.122) sunt:

$$\theta_1^{**} = arctg\frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}}$$
$$\theta_2^{**} = \frac{\pi}{2} + arctg\frac{\varepsilon_y - \varepsilon_x}{\gamma_{xy}} \qquad (13.127)$$

Lunecările specifice maxime γ_1 sau γ_2 se obțin înlocuind soluțiile (13.127) în relația (13.119) :

$$\gamma_{1,2} = \pm\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_{xy}^2} \qquad (13.128)$$

Se observă că produsul pantelor celor două direcții : $tg2\theta^{**}$ şi $tg2\theta^{*}$ date de relațiile (13.122) şi (13.126) este egal cu -1, ceea ce înseamnă că cele două direcții sunt perpendiculare:

$$2\theta^{**} = 2\theta^{*} + \pi/2 \quad \Leftrightarrow \quad \theta^{**} = \theta^{*} + \pi/4 \qquad (13.129)$$

Lunecările specifice maxime apar într-un plan înclinat cu un unghi de 45^0 față de planul deformațiilor principale şi ținând seama de (13.124) acestea au expresia:

$$\gamma_{max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \qquad (13.130)$$

13.5.5. Rozeta tensometrică

Dacă se cunosc deformațiile specifice liniare ε_x , ε_y şi lunecarea specifică γ_{xy} față de un sistem de axe *Oxy*, se pot determina valorile unghiurilor pentru care acestea ating valori maxime sau minime, precum şi valorile acestor deformații principale $\varepsilon_{1,2}$. Dacă se cunosc (prin măsurători) deformațiile specifice liniare după anumite direcții situate între ele la unghiuri de 45^0, 60^0, 90^0 sau 120^0, se pot determina deformațiile principale, tensiunile principale şi valorile unghiurilor direcțiilor principale. Aceste calcule stau la baza principiului de funcționare al rozetelor tensometrice pentru starea plană de tensiuni şi deformații. Dacă sistemul *Oxy* este un sistem principal atunci $\gamma_{xy}=0$ şi prima relație (13.119) se scrie:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}cos\,2\theta \qquad (13.131)$$

Pentru trei valori particulare ale direcțiilor deformațiilor specifice notate cu *a, b* şi *c* situate la unghiurile: θ, $\theta+\alpha_1$, $\theta+\alpha_2$ față de *Ox* , ținând seama de relația (13.131) se pot scrie următoarele relații:

$$\varepsilon_a = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}cos\,2\theta$$
$$\varepsilon_b = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}cos\,2(\theta + \alpha_1) \qquad (13.132)$$
$$\varepsilon_c = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}cos\,2(\theta + \alpha_2)$$

Eliminând unghiul θ din relațiile (13.132) se obțin deformațiile specifice principale în funcție de deformațiile specifice liniare ε_a , ε_b şi ε_c.

a. Rozeta tensometrică dreptunghiulară

Rozeta tensometrică dreptunghiulară este formată din trei mărci tensometrice care se dispun la un unghi de 45^0 între ele ca în figura 13.19. În acest caz în relațiile (13.132) se înlocuiesc valorile : $\alpha_1 = 45^0, \quad \alpha_2 = 90^0$ (13.133)

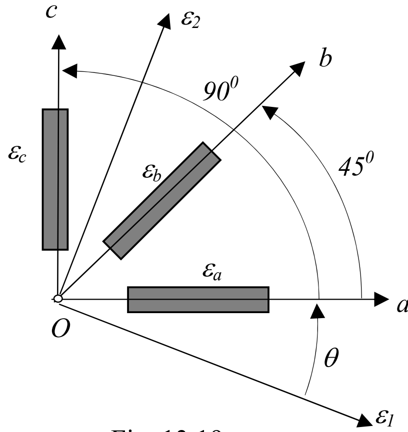


Fig. 13.19

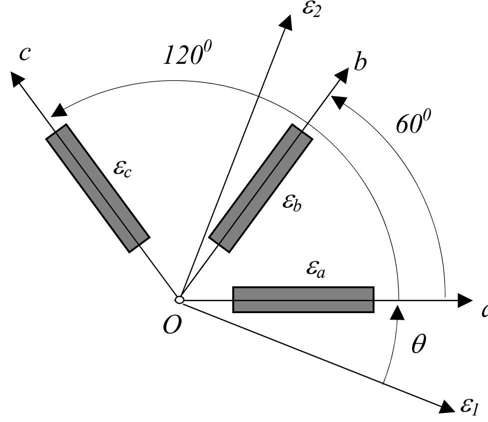


Fig. 13.20

Se obțin următoarele relații:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cos 2\theta \\ \varepsilon_b &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \sin 2\theta \\ \varepsilon_c &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \cos 2\theta \end{aligned} \qquad (13.134)$$

Eliminând unghiul θ din relațiile (13.134) se obține:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}; \qquad \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$$

$$\Rightarrow \qquad \varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2} \qquad (13.135)$$

Unghiul θ se obține din relațiile (13.134) și (13.135) :

$$tg 2\theta^* = \frac{\varepsilon_a - 2\varepsilon_b + \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c} \qquad (13.136)$$

Observație : Conform figurii 13.19, valoarea unghiul θ^* a direcției principale 1 dată de relația (13.136) este negativă, sau se măsoară în sens invers trigonometric față de direcția primei mărci tensometrice *a.*

b. Rozeta tensometrică delta

Rozeta tensometrică delta este formată din trei mărci tensometrice care se dispun la un unghi de 60^0 între ele ca în figura 13.20. În acest caz în relațiile (13.130) se înlocuiesc valorile : $\alpha_1 = 60^0, \quad \alpha_2 = 120^0$ (13.137)

Se obțin următoarele relații:

$$\begin{aligned} \varepsilon_a &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} cos\, 2\theta \\ \varepsilon_b &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} cos(2\theta + 120^0) \\ \varepsilon_c &= \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} cos(2\theta + 240^0) \end{aligned} \quad (13.138)$$

Eliminând unghiul θ din relațiile (13.138) se obține:

$$\begin{aligned} &\frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \\ &\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \\ &\Rightarrow \ \varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2} \end{aligned} \quad (13.139)$$

Unghiul θ se obține din relațiile (13.138) şi (13.139) :

$$tg 2\theta^* = -\frac{\sqrt{3}(\varepsilon_b - \varepsilon_c)}{2\varepsilon_a - \varepsilon_b - \varepsilon_c} \quad (13.140)$$

Observație: Conform figurii 13.20, valoarea unghiul θ^* a direcției principale 1 dată de relația (13.140) este negativă, în sens invers trigonometric față de *a*.

13.6. Legea a lui *HOOKE* pentru starea plană de tensiuni

Pentru materiale omogene şi izotrope şi pentru anumite valori ale sarcinilor exterioare, între tensiuni şi deformațiile specifice există o dependență liniară de forma $\sigma = f(\varepsilon)$ numită şi *legea lui Hooke.*

Legea lui *HOOKE* pentru solicitarea simplă de întindere sau compresiune şi pentru solicitarea simplă de forfecare se scrie:

$$\sigma = \varepsilon E \ , \qquad \tau = \gamma G \quad (13.141)$$

în care: σ este tensiunea din piesa solicitată la întindere-compresiune axială ;
τ - tensiunea tangențială la forfecare ;
ε – deformația specifică liniară ;
γ - deformația specifică unghiulară sau lunecarea specifică ;
E – modulul de elasticitate longitudinal (*YOUNG*) ;
G - modulul de elasticitate transversal : $G = E / 2(1 - \nu)$

Se consideră că elementul de volum dV este supus pe rând unei stări plane de tensiuni normale σ_x şi σ_y respectiv tensiunilor tangențiale τ_{yx} .

Rezultă în total trei cazuri de solicitări simple :

- două solicitări de întindere simplă după direcțiile axelor *Ox* și *Oy*
- solicitare de forfecare pură în două plane paralele cu *Oxy*.

Relațiile dintre deformații specifice liniare și tensiuni în acest caz sunt:

$$\varepsilon'_x = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{\sigma_x}{E}$$
$$\varepsilon'_y = -\nu \cdot \varepsilon'_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E} \qquad (13.142)$$
$$\varepsilon'_z = -\nu \cdot \varepsilon'_x = -\nu \frac{\sigma_x}{E}$$

în care ν este *coeficientul contracției transversale* sau *coeficientul lui Poisson*

În mod analog se obțin relațiile dintre deformații specifice liniare și tensiuni atunci când elementul este supus acțiunii unor forțe elementare $dF_y=\sigma_y dxdz$:

$$\varepsilon'_x = -\nu \cdot \varepsilon'_y = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$
$$\varepsilon'_y = \frac{\Delta(dy)}{dy} = \frac{\sigma_y}{E} \qquad (13.143)$$
$$\varepsilon'_z = -\nu \cdot \varepsilon'_y = -\nu \frac{\sigma_y}{E}$$

Aplicând principiul suprapunerii efectelor pentru cele două stări de solicitare simplă se obțin deformațiile specifice liniare:

$$\begin{cases} \varepsilon_x=\varepsilon'_x+\varepsilon''_x & \Rightarrow \varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x-\nu\sigma_y\right) \\ \varepsilon_y=\varepsilon'_y+\varepsilon''_y & \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y-\nu\sigma_x\right) \\ \varepsilon_z=\varepsilon'_z+\varepsilon''_z & \Rightarrow \varepsilon_z = -\nu\frac{1}{E}\left(\sigma_x+\sigma_y\right) \end{cases} \qquad (13.144)$$

Dacă asupra elementului de volum paralelipipedic acționează perechile de forțe elementare $dF_{xy}=\tau_{xy}dxdy$ se obțin deformațiile unghiulare specifice:

$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{yz}}{G}, \qquad \gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0 \qquad (13.145)$$

Din relațiile (13.144) se observă că unei stări plane de tensiuni îi corespunde o stare spațială de deformații. Pentru o stare plană de deformații relațiile (13.144) dintre tensiuni și deformațiile specifice liniare se mai scriu sub forma :

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right); \qquad (13.146)$$

Dacă axele *Ox* și *Oy* sunt direcțiile tensiunilor principale respectiv direcțiile deformațiilor specifice principale atunci relațiile (13.146) devin :

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2\right); \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1\right); \qquad (13.147)$$

Pentru rozetele tensometrice de mai sus se pot calcula tensiunile principale $\sigma_{1,2}$ în funcție de deformațiile $\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$ cu ajutorul relațiilor (13.133) şi (13.145):

a. *pentru rozeta dreptunghiulară* (fig.13.19):

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2} \Rightarrow$$
$$\sigma_{1,2} = \frac{E}{2}\left[\frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{1-\nu} \pm \frac{\sqrt{2}}{1+\nu}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2}\right] \tag{13.148}$$

b. *pentru rozeta delta* (fig.13.20):

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} \pm \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2} \Rightarrow$$
$$\sigma_{1,2} = \frac{E}{3}\left[\frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{1-\nu} \pm \frac{\sqrt{2}}{1+\nu}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_b)^2 + (\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (\varepsilon_b - \varepsilon_c)^2}\right] \tag{13.149}$$

13.7. Probleme propuse

13.7.1. Se consideră o placă izotropă solicitată în planul ei de un sistem de forțe aflate în echilibru. Măsurând deformațiile specifice cu rozeta tensometrică dreptunghiulară se obțin valorile : $\varepsilon_a = 0{,}876\ 10^{-3};\ \varepsilon_b = 0{,}520\ 10^{-3};\varepsilon_c = 0{,}642\ 10^{-3}$. *Se cer :*

a. deformațiile $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ şi poziția direcțiilor principale;

b. lunecarea specifică maximă γ_{max} ;

c. tensiunile principale $\sigma_1,\ \sigma_2$, dacă $E=2{,}1\cdot 10^5$ *MPa* şi $\nu=0{,}3$.

R : $\varepsilon_1 = 1{,}025\ 10^{-3};\ \varepsilon_2 = 0{,}493\ 10^{-3};\ \theta_1^* = 31^0 58';\gamma_{max} = 0{,}532\cdot 10^{-3};\ \sigma_1 = 270{,}67\ MPa;\ \sigma_2 = 184{,}73\ MPa.$

13.7.2. Se consideră o placă izotropă solicitată în planul ei de un sistem de forțe aflate în echilibru. Măsurând deformațiile specifice cu rozeta tensometrică delta se obțin valorile : $\varepsilon_a = 0{,}8\ 10^{-3};\ \varepsilon_b = 0{,}5\ 10^{-3};\varepsilon_c = -0{,}7\ 10^{-3}$. *Se cer :*

a. deformațiile $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ şi poziția direcțiilor principale;

b. lunecarea specifică maximă γ_{max} ;

c. tensiunile principale $\sigma_1,\ \sigma_2$, dacă $E=2{,}1\cdot 10^5$ *MPa* şi $\nu=0{,}3$.

R : $\varepsilon_1 = 1{,}117 10^{-3};\ \varepsilon_2 = -0{,}717 10^{-3};\ \theta_1^* = 24^0 33'\ ;\gamma_{max} = 1{,}834\cdot 10^{-3};\ \sigma_1 = 208{,}13\ MPa;\ \sigma_2 = -88{,}13\ MPa$

13.7.3. Se consideră un corp elastic solicitat de un sistem de forțe şi un sistem de axe global *Oxyz,* astfel încât într-un punct al său există tensiunile:

$\sigma_x = -90MPa;\ \sigma_y = 110MPa;\ \sigma_z = 70MPa;\ \tau_{xy} = 50MPa;\ \ \tau_{xz} = \tau_{zy} = 0$. Se cer :

a. tensiunile principale $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ şi direcțiile principale ;

b. tensiunile tangențiale maxime ;

c. deformațiile principale $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ şi ε_3 dacă $E=2{,}1\cdot 10^5$ *MPa* şi $\nu=0{,}3$.;

d. lunecările specifice maxime;

Raspuns: $\sigma_1 = 121{,}8MPa;\ \ \sigma_2 = 70MPa;\ \ \sigma_3 = -101{,}8MPa;$

$\ell_1 = 0{,}2297;\ m_1 = 0{,}9733;\ n_1 = 0;\ \ \ell_2 = m_2 = 0;\ n_2 = 1;\ \ \ell_3 = -0{,}9733;\ m_3 = 0{,}2297;\ n_3 = 0.$

14

STAREA SPAȚIALĂ DE TENSIUNI ŞI DEFORMAȚII

14.1. Starea spațială de tensiuni

Un *corp deformabil* asupra căruia acționează un sistem de sarcini își modifică atât forma cât și dimensiunile inițiale iar în interiorul lui se produce un *câmp de tensiuni* a cărui *distribuție* depinde de configurația de încărcare a sarcinilor exterioare (când nu depășesc anumite valori limită), de legăturile cu mediul exterior (condițiile pe frontieră) și de proprietățile fizice ale materialului din care este confecționat (modul de elasticitate și coeficientul contracției transversale).

Un *corp perfect elastic* este caracterizat de deformații *reversibile*: corpul revine la forma și dimensiunile inițiale atunci când sarcinile exterioare își încetează acțiunea. Dacă deformațiile corpului sunt în *domeniul elastic,* sub acțiunea sarcinilor exterioare corpul se află într-o *stare de echilibru elastic* sau *tensiunile se află în echilibru cu sarcinile exterioare. Teoria elasticității* se ocupă cu :

- studiul distribuției de tensiuni și deformații care apar în interiorul unui corp perfect elastic, omogen și izotrop sub acțiunea sarcinilor exterioare ;
- ecuațiile de echilibru ale tensiunilor ;
- ecuațiile de echilibru pe frontieră sau condițiile de contur ;
- ecuațiile geometrice de legătură dintre deformații și deplasări ;
- ecuațiile de compatibilitate-continuitate a deformațiilor specifice ;
- ecuațiile fizice dintre tensiuni și deformații ;
- variația tensiunilor normale și tangențiale pe diferite suprafețe interioare ale corpului, deformația volumică specifică ;
- energia potențială specifică totală, de modificare a volumului și de modificare a formei.

14.1.1. Tensorul tensiunilor

Fie $P(x, y, z)$ un punct oarecare din interiorul unui corp elastic supus acțiunii unui sistem de sarcini, un sistem triortogonal de axe $Oxyz$ cu originea în punctul P și un paralelipiped de volum $dV=dxdydz$ cu cele trei fețe coincidente cu planele sistemului, ca în figura 14.1.

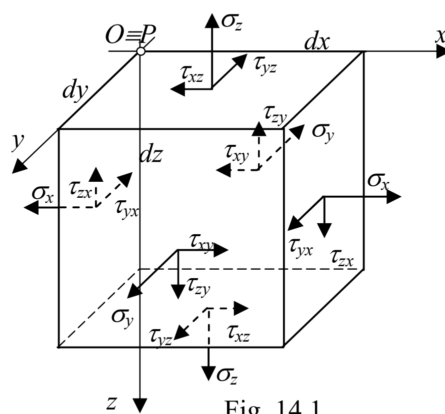


Fig. 14.1

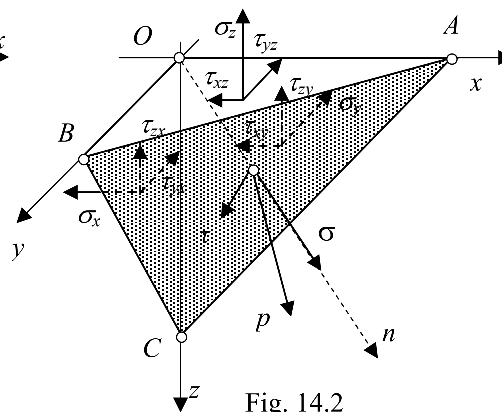


Fig. 14.2

Sub acțiunea sarcinilor exterioare pe fiecare din cele şase fețe ale paralelipipedului acționează câte trei tensiuni: una normală σ şi două tensiuni tangențiale τ cuprinse în planul feței şi orientate după cele două axe. Tensiunile tangențiale sunt notate cu doi indici: primul reprezintă direcția axei cu care este paralelă, iar cel de-a doilea , direcția normalei la fața respectivă (de exemplu: τ_{xy} reprezintă tensiunea tangențială orientată după direcția axei Ox, conținută în planul a cărui normală este paralelă cu axa Oy).

Pe fețele pozitive ale paralelipipedului, situate la distanțele *dx, dy* şi respectiv *dz* față de originea sistemului, tensiunile au acelaşi sens cu axele de coordonate corespunzătoare, iar pe fețele negative (ce coincid cu planele sistemului de axe *Oxyz)* tensiunile au sens opus axelor de coordonate (fig.14.1).

Teorema dualității tensiunilor tangențiale afirmă că tensiunile tangențiale situate pe plane perpendiculare adiacente sunt perpendiculare pe muchia comună, orientate înspre aceasta şi sunt egale ca mărime:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}\,, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tag{14.1}$$

Se defineşte *tensorul tensiunilor* matricea formată din celor nouă componente scalare ale tensiunilor ce acționează pe cele trei fețe pozitive ale paralelipipedului:

$$T_\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{14.2}$$

Ținând seama de teorema dualității tensiunilor tangențiale, starea de tensiune dintr-un corp (cele nouă componente ale tensorului tensiunilor) este caracterizată de şase componente scalare independente: trei tensiuni normale σ_x , σ_y , σ_z şi trei tangențiale τ_{xy}, τ_{yz} , τ_{zx}.

Pe o suprafață oarecare având normala *On* acționează tensiunea *p* care se poate descompune după două direcții astfel (fig. 14.2):

- după normala *On* - tensiunea normală σ ;
- şi după o direcție conținută în planul respectiv - tensiunea tangențială τ.

Expresiile celor două componente ale tensiunii *p* depind de orientarea suprafeței şi de cele şase componente ale tensorului tensiune definit mai sus.

14.1.2. Tensorul deformațiilor

Fie *P(x, y, z)* un punct din interiorul corpului elastic supus acțiunii unui sistem de sarcini şi un sistem triortogonal de axe *Oxyz* având originea în punctul *P*. Se consideră un paralelipiped de volum *dV=dxdydz,* având cele trei fețe coincidente cu planele sistemului, ca în figura 14.3.

Starea plană de deformații arată că dacă *u* şi *v* sunt deplasările punctului *P* după direcțiile celor axelor *Ox* şi *Oy*, deformațiile specifice liniare şi unghiulare corespunzătoare planului *Oxy* (fig.14.3) au expresiile:

$$Oxy: \quad \left\{ \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x};\ \ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y};\ \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right. \tag{14.3}$$

În mod analog se obțin deformațiile specifice corespunzătoare planelor *Oyz* şi *Ozx:*

$$Oyz: \begin{cases} \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}; \; \gamma_{yz} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \end{cases}$$
$$Ozx: \begin{cases} \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}; \; \gamma_{zx} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \end{cases} \qquad (14.3')$$

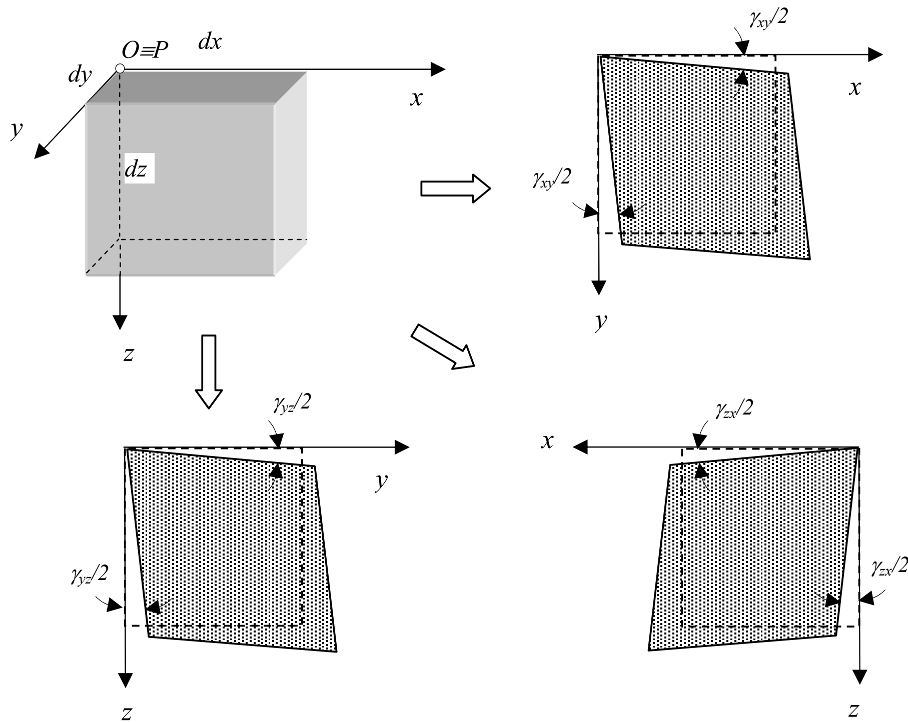


Fig. 14.3

Se notează cu: $\bar{\delta}_x$, $\bar{\delta}_y$, $\bar{\delta}_z$ vectorii variațiilor deplasărilor punctului *P* după cele trei direcții:

$$\bar{\delta}_x = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad \bar{\delta}_y = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad \bar{\delta}_z = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (14.4)$$

Cu ajutorul acestor vectori se defineşte *tensorul deplasărilor specifice*:

$$T_{\delta}=\left[\bar{\delta}_x\ \bar{\delta}_y\ \bar{\delta}_z\right]=\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{14.5}$$

Acest tensor se poate descompune într-un *tensor simetric* $T_{\delta\varepsilon}$ şi unul *antisimetric* $T_{\delta\omega}$ având expresiile :

$$T_{\delta\varepsilon}=\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{14.6}$$

$$T_{\delta\omega}=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{14.7}$$

Ţinând seama de relaţiile (14.3), *tensorul simetric al deplasărilor specifice* $T_{\delta\varepsilon}$ reprezintă tocmai *tensorul deformaţiilor specifice* T_{ε}:

$$T_{\varepsilon}=T_{\delta\varepsilon}=\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}{}_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{14.8}$$

Tensorul antisimetric $T_{\delta\omega}$ corespunde rotaţiilor de corp rigid ale elementului de volum şi nu prezintă interes în studiul deformaţiilor.

14.1.3. Ecuaţiile de echilibru ale tensiunilor

Fie *P(x, y, z)* un punct din interiorul unui corp elastic supus acţiunii unui sistem de sarcini, un sistem de axe *Oxyz* cu originea în punctul *P* şi un element de volum *dV=dxdydz,* având feţele coincidente cu planele sistemului ca în figura 14.4.

Variaţia tensiunilor după cele trei direcţii *Ox, Oy* şi *Oz* se poate scrie ţinând seama că deplasările punctului *P* (*u, v, w)* şi tensiunile corespunzătoare sunt funcţii continue de *x,y,z*. Dacă se dezvoltă în serie Taylor funcţiile tensiunilor după axa *Ox* (fig. 14.4) şi se reţin numai termenii reprezentând prima derivată se obţine:

$$\sigma_x(x,y,z)=\sigma_{x0}+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx;\quad \tau_{xy}(x,y,z)=\tau_{xy0}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}dy;\quad \tau_{xz}(x,y,z)=\tau_{xz0}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}dz$$

În mod asemănător se obţin expresiile tensiunilor după direcţiile *Oy* şi *Oz* :

$$\begin{aligned}&\sigma_y(x,y,z)=\sigma_{y0}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy;\quad \tau_{yx}(x,y,z)=\tau_{yx0}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}dx;\quad \tau_{yz}(x,y,z)=\tau_{yz0}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}dz\\&\sigma_z(x,y,z)=\sigma_{z0}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}dz\quad \tau_{zx}(x,y,z)=\tau_{zx0}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}dx;\quad \tau_{zy}(x,y,z)=\tau_{zy0}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}dy\end{aligned}\tag{14.9}$$

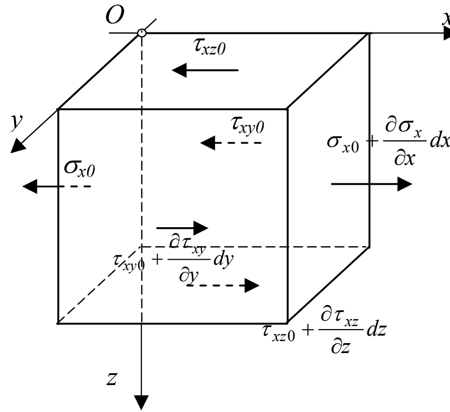


Fig. 14.4

Ecuaţiile de echilibru ale tensiunilor se scriu ţinând seama că *forţele elementare interioare* pe feţele elementului paralelipipedic şi *forţele elementare exterioare volumice*: $dF_x=XdV$, $dF_y=YdV$, $dF_z=ZdV$ sunt în echilibru : de exemplu ecuaţia de echilibru a forţelor elementare după axa *Ox* se scrie:

$$\begin{aligned}&\left(\sigma_{x0}+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dydz+\left(\tau_{xy0}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}dy\right)dzdx+\left(\tau_{xz0}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}dz\right)dxdy\\&-\sigma_{x0}dydz-\tau_{xy0}dzdx-\tau_{xz0}dxdy+Xdxdydz=0\end{aligned}\tag{14.10}$$

După reducerea termenilor asemenea şi simplificări se obţine ecuaţia de echilibru a tensiunilor după direcţia *Ox*:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X=0\tag{14.11}$$

Ecuațiile de echilibru a tensiunilor după Oy şi Oz se obțin în mod analog:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+Y=0\\&\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z=0\end{aligned} \qquad (14.12)$$

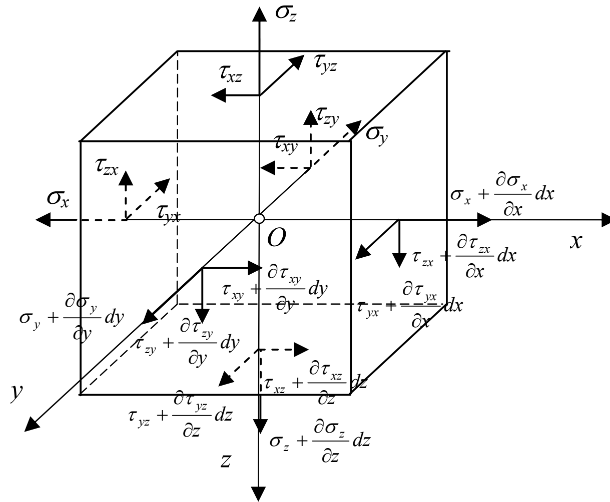


Fig. 14.5

Ecuația de echilibru a momentelor forțelor interioare şi exterioare scrisă față de o axă paralelă cu Ox ce trece prin centrul elementului de volum (fig.14.5) este:

$$\tau_{xz}dxdy\cdot\frac{dz}{2}-\tau_{zx}dydz\cdot\frac{dx}{2}-\left(\tau_{xz}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}dz\right)dxdy\cdot\frac{dz}{2}+\left(\tau_{zx}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}dx\right)dydz\cdot\frac{dx}{2}=0 \qquad (14.13)$$

Neglijând termenii infiniți de ordinul patru şi reducând termenii asemenea se obține o relație ce exprimă *teorema dualității tensiunilor tangențiale:*

$$\left(\tau_{xz}-\tau_{zx}\right)dxdydz=0 \quad \text{sau} \quad \tau_{xz}=\tau_{zx} \qquad (14.14)$$

Tensiunile tangențiale din două plane perpendiculare sunt egale ca mărime şi perpendiculare pe muchia comună a celor două plane .

În mod similar se obțin ecuațiile de echilibru a momentelor forțelor elementare față de axele *Oy şi Oz*:

$$\tau_{xy}=\tau_{yx} \quad ; \quad \tau_{yz}=\tau_{zy} \qquad (14.15)$$

Ecuațiile (14.11) şi (14.12) reprezintă ecuațiile de echilibru între tensiuni şi forțele volumice exterioare.

În cazul unui corp elastic care este supus acțiunii unor sarcini exterioare direct aplicate sau de legătură, ecuațiile de echilibru (14.11) şi (14.12) se scriu:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \qquad (14.16)$$

14.1.4. Ecuațiile de echilibru pe frontieră

Ecuațiile de echilibru pe frontieră sau *condițiile pe contur* se scriu pentru elementele de volum *dV* aflate într-o vecinătate a frontierei pe care acționează o sarcină distribuită *f(x,y,z)* (fig.14.6). Sarcina distribuită *f(x,y,z)* este o forță de suprafață direct aplicată sau de legătură.

Se consideră un element tetraedric *OABC* având muchiile *OA, OB* şi *OC* orientate după direcțiile *Ox, Oy, Oz*, cu originea sistemului de axe în punctul *M* aflat în vecinătatea frontierei, ca în figura 14.6.

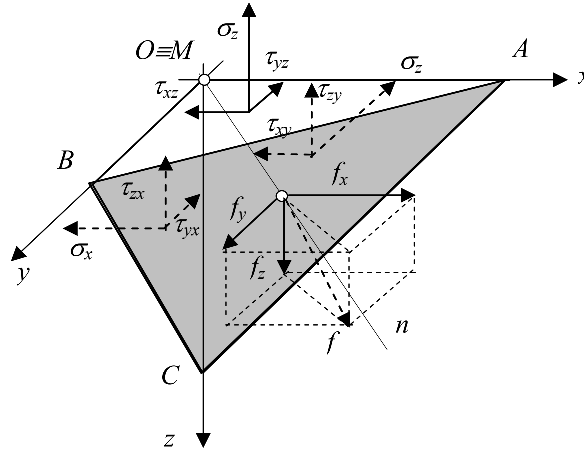


Fig. 14.6

Dacă *dA* este aria feței *ABC* şi *On* normala la aceasta, de cosinuşi directori:

$$\ell = \cos\alpha; \quad m = \cos\beta; \quad n = \cos\gamma \qquad (14.17)$$

ariile celor trei fețe ale tetraedrului se scriu cu ajutorul cosinuşilor directori astfel :

$$\begin{cases} A_{OBC} = dA\cos\alpha = \ell \cdot dA \\ A_{OAC} = dA\cos\beta = m \cdot dA \\ A_{OAB} = dA\cos\gamma = n \cdot dA \end{cases} \qquad (14.18)$$

Dacă se descompune sarcina distribuită *f(x,y,z)* după cele trei direcţii *Ox, Oy* şi *Oz* se obţin componentele f_x, f_y şi f_z (fig.14.6).

Ecuaţiile de echilibru ale forţelor elementare corespunzătoare tensiunilor în proiecţii pe cele trei axe ale sistemului *Oxyz* se scriu:

$$\begin{cases} f_x dA - \sigma_x dA \cdot \ell - \tau_{xy} dA \cdot m - \tau_{xz} dA \cdot n = 0 \\ f_y dA - \tau_{yx} dA \cdot \ell - \sigma_y dA \cdot m - \tau_{yz} dA \cdot n = 0 \\ f_z dA - \tau_{zx} dA \cdot \ell - \tau_{zy} dA \cdot m - \sigma_z dA \cdot n = 0 \end{cases} \tag{14.19}$$

Simplificând ecuaţiile (14.19) se obţin *ecuaţiile condiţiilor pe contur* :

$$\begin{cases} \sigma_x \cdot \ell + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n = f_x \\ \tau_{yx} \cdot \ell + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n = f_y \\ \tau_{zx} \cdot \ell + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n = f_z \end{cases} \tag{14.20}$$

Ecuaţiile echilibrului elastic (14.16) şi *ecuaţiile condiţiilor pe contur* (14.20) formează împreună grupa *ecuaţiilor statice ale Teoriei elasticităţii.*

14.1.5. Relaţiile între deformaţii şi deplasări (Cauchy)

Ecuaţiile geometrice sau relaţiile între deformaţii şi deplasări (Cauchy) exprimă legătura între deformaţiile specifice şi deplasările din interiorul unui mediu elastic sub acţiunea sarcinilor exterioare.

Se consideră un punct *P* din interiorul corpului elastic supus acţiunii unor sarcini exterioare şi *Oxyz* un sistem triortogonal de axe cu originea în punctul *P*.

Dacă deplasările punctului *P* după direcţiile celor trei axe *Ox, Oy, Oz,* notate cu *u, v, w,* sunt funcţii continue de coordonatele *x,y,z* şi u_O, v_O, w_O sunt deplasările originii *O* (şi a punctului *P*), dezvoltând în serie Taylor şi reţinând termenii primelor derivate parţiale, se obţin deplasările într-o vecinătate a punctului *P*:

$$\begin{cases} u = u_O + \dfrac{\partial u}{\partial x}dx + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy + \dfrac{\partial u}{\partial z}dz \\ v = v_O + \dfrac{\partial v}{\partial x}dx + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy + \dfrac{\partial v}{\partial z}dz \\ w = w_O + \dfrac{\partial w}{\partial x}dx + \dfrac{\partial w}{\partial y}dy + \dfrac{\partial w}{\partial z}dz \end{cases} \tag{14.21}$$

Relaţiile între deformaţiile specifice şi deplasări au fost deduse pentru starea plană de deformaţii:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\Delta(dy)}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{14.22}$$

În mod analog se obţin relaţiile între deformaţiile specifice şi deplasări pentru celelalte două plane *Oyz şi Oyx*:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta(dz)}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \tag{14.23}$$

14.1.6. Ecuațiile de continuitate Saint-Venant

Dacă se cunosc deplasările *u, v şi w* după direcțiile axelor *Ox, Oy* şi *Oz* pentru un punct oarecare din interiorul corpului elastic, cu ajutorul relațiilor lui Cauchy se pot calcula cele şase componente independente ale tensorului deformațiilor:

$$T_{\varepsilon} = T_{\delta\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}{}_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{14.24}$$

Celor şase componente ale tensorului deformațiilor (14.24) le corespund mai multe valori ale deplasărilor *u, v, w*, deci relațiile deformații – deplasări nu sunt biunivoce. Ipoteza materialului omogen şi izotrop permite scrierea relațiilor diferențiale între cele şase componente ale tensorului deformațiilor, sau *ecuațiile lui Saint-Venant* astfel:

a. ecuațiile de continuitate între componentele deformațiilor situate în acelaşi plan se obțin derivând de două ori relațiile (14.22) :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}; & \dfrac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}; \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}; & \dfrac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \\ \gamma_{xy} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}; & \dfrac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \dfrac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \end{cases} \tag{14.25}$$

Însumând apoi membru cu membru relațiile (14.25) se obține o relație diferențială între componentele deformațiilor din planul *Oxy:*

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{14.26}$$

În mod analog se obțin relațiile diferențiale ale deformațiilor din *Oyz* şi *Ozx:*

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \tag{14.27}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \tag{14.28}$$

b. ecuațiile de continuitate între componentele deformațiilor situate în plane diferite se obțin derivând parțial relațiile lunecărilor specifice:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}; \quad \dfrac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad \dfrac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \end{cases} \tag{14.29}$$

Însumând membru cu membru primele două relații şi scăzând pe a treia, se obține:

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} = 2\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} \tag{14.30}$$

Dacă se derivează în raport cu y relația (14.30) se obține o relație diferențială a între componentele deformațiilor din plane diferite:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} \tag{14.31}$$

Analog se obțin și celelalte două relații între componentele deformațiilor:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right)&=2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}\\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)&=2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}\end{aligned} \tag{14.32}$$

Relațiile diferențiale de mai sus se numesc *ecuațiile de compatibilitate* sau *ecuațiile de continuitate Saint Venant* și se folosesc pentru verificarea rezultatelor numerice obținute în calculul structural cu metoda elementelor finite.

14.1.7. Legea lui Hooke generalizată

Ecuațiile fizice reprezintă relații care se pot scrie între tensiuni și deformații sau între componentele tensorului tensiune T_σ și componentele tensorului deformației T_ε , de forma:

$$T_\varepsilon = f(T_\sigma) \tag{14.33}$$

Dacă funcția f este liniară, corespondența între tensorii T_ε și T_σ este biunivocă și relația (14.41) se numește *legea lui Hooke generalizată.*

Pentru solicitarea simplă de întindere-commpresiune și de forfecare simplă, legea lui Hooke se scrie: $\sigma = \varepsilon E$, respectiv : $\tau = \gamma G$ (14.34)

în care: σ este tensiunea din piesa solicitată la întindere-compresiune axială ;

τ - tensiunea tangențială la forfeare ;

ε – deformația specifică liniară ;

γ - deformația specifică unghiulară sau lunecarea specifică ;

E – modulul de elasticitate longitudinal (Young) ;

G - modulul de elasticitate transversal: $G = E / 2(1+\nu)$

Pentru cazul general de solicitare se fac următoarele ipoteze de lucru:

- materialul corpului elastic este omogen și izotrop;
- deformațiile corpului elastic sunt mici în raport cu dimensiunile sale și se află în domeniul elastic ;
- este valabil principiul suprapunerii efectelor: efectul total final este rezultatul însumării efectelor fiecărei solicitări simple luată separat;
- fenomenul deformației elastice este izotermic iar lucrul mecanic al sarcinilor exterioare se transformă integral în energie potențială de deformație elastică.

Se consideră elementul de volum $dV=dxdydz$ din figura 14.7 supus pe rând acțiunii unei perechi de forțe elementare corespunzătoare tensiunilor normale σ_x , σ_y , σ_z , respectiv acțiunii unei perechi de forțe elementare corespunzătoare tensiunilor tangențiale τ_{yz}, τ_{zx} , τ_{yx} . În total sunt șase cazuri de solicitare:

- trei solicitări de întindere simplă după direcțiile *Ox, Oy* și *Oz*.
- trei solicitări de forfecare pură cu forțe elementare situate în trei perechi de plane opuse.

În figura 14.7 este reprezentat elementul de volum solicitat de perechea de forțe elementare de întindere simplă $dF_x=\sigma_x dydz$ corespunzătoare tensiunilor normale σ_x. Acesta suferă o deformație liniară longitudinală : $\Delta(dx)$ *și* două deformații liniare transversale : $\Delta(dy)$ și $\Delta(dz)$.

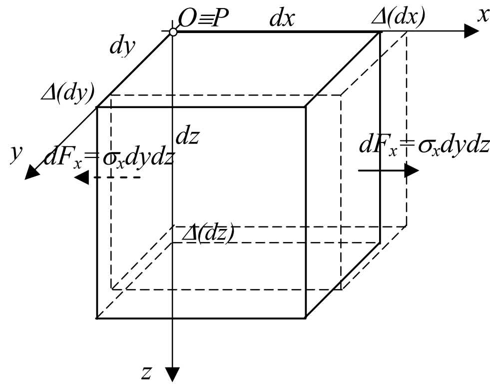


Fig. 14.7

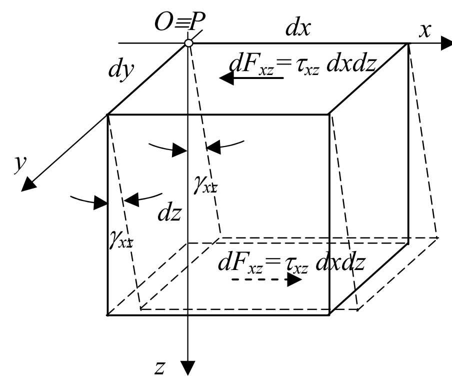


Fig. 14.8

Relațiile dintre deformații specifice liniare și tensiuni în acest caz sunt:

$$\begin{aligned} \varepsilon'_x &= \frac{\Delta(dx)}{dx} = \frac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon'_y &= -\nu\cdot\varepsilon'_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E} \\ \varepsilon'_z &= -\nu\cdot\varepsilon'_x = -\nu\frac{\sigma_x}{E} \end{aligned} \tag{14.35}$$

în care ν este *coeficientul contracției transversale* sau *coeficientul lui Poisson*

Corespunzător celor trei deformații liniare avem deformațiile specifice pentru prima stare de solicitare simplă :

$$\varepsilon'_x=\frac{\sigma_x}{E};\ \varepsilon'_y=-\nu\frac{\sigma_x}{E};\ \varepsilon'_z=-\nu\frac{\sigma_x}{E} \tag{14.36}$$

În mod analog se obțin deformațiile specifice pentru cazurile când elementul de volum este supus acțiunii forțelor elementare corespunzătoare tensiunilor σ_y și σ_z :

$$\varepsilon''_y=\frac{\sigma_y}{E};\ \varepsilon''_x=-\nu\frac{\sigma_y}{E};\ \varepsilon''_z=-\nu\frac{\sigma_y}{E} \tag{14.37}$$

$$\varepsilon'''_z=\frac{\sigma_z}{E};\ \varepsilon'''_x=-\nu\frac{\sigma_z}{E};\ \varepsilon'''_y=-\nu\frac{\sigma_z}{E} \tag{14.38}$$

Aplicând principiul suprapunerii efectelor pentru primele trei stări de solicitare simplă se obțin deformațiile specifice liniare:

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\varepsilon'_x+\varepsilon''_x+\varepsilon'''_x\\ \varepsilon_y=\varepsilon'_y+\varepsilon''_y+\varepsilon'''_y\\ \varepsilon_z=\varepsilon'_z+\varepsilon''_z+\varepsilon'''_z\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right]\\ \varepsilon_y=\frac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu\left(\sigma_z+\sigma_x\right)\right]\\ \varepsilon_z=\frac{1}{E}\left[\sigma_z-\nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right]\end{cases} \qquad (14.39)$$

În figura 14.8 este reprezentat elementul de volum solicitat de perechea de forțe elementare de întindere simplă $dF_{xz}=\tau_{xz}\ dxdz$ corespunzătoare tensiunilor tangențiale τ_{xz} . Elementul suferă deformația unghiulară γ'_{xz} în planul *Oxz*. Conform relației (14.34) între lunecarea specifică γ'_{xz} şi tensiunea τ_{xz} există relația:

$$\gamma'_{zx}=\frac{\tau_{zx}}{G} \qquad (14.40)$$

Lunecările specifice din cele două plane în acest caz de încărcare sunt nule :

$$\gamma'_{xy}=y'_{yz}=0 \qquad (14.41)$$

În mod analog se obțin lunecările specifice pentru cazurile când elementul de volum este supus acțiunii forțelor elementare corespunzătoare tensiunilor τ_{yz} şi τ_{xy} :

$$\gamma''_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G}, \qquad \gamma''_{zx}=\gamma''_{xy}=0 \qquad (14.42)$$

$$\gamma'''_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}, \qquad \gamma'''_{yz}=\gamma'''_{zx}=0 \qquad (14.53)$$

Aplicând principiul suprapunerii efectelor pentru trei stări de solicitare se obțin deformațiile specifice unghiulare:

$$\left\{\gamma_{zy}=\frac{\tau_{zy}}{G};\quad \gamma_{xz}=\frac{\tau_{xz}}{G};\quad \gamma_{yx}=\frac{\tau_{yx}}{G}\right. \qquad (14.44)$$

Relațiile (14.39) şi (14.44) între componentele tensorului deformațiilor funcție de componentele tensiunilor reprezintă *legea lui Hooke generalizată în coordonate carteziene. Legea generală a lui Hooke* se poate scrie şi între componentele tensorului tensiunilor funcție de componentele deformațiilor:

$$\begin{cases}\sigma_x=\frac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y+\nu\varepsilon_z\right]\\ \sigma_y=\frac{2G}{1-2\nu}\left[\nu\varepsilon_x+(1-\nu)\varepsilon_y+\nu\varepsilon_z\right]\\ \sigma_z=\frac{2G}{1-2\nu}\left[\nu\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y+(1-\nu)\varepsilon_z\right]\end{cases} \qquad \begin{cases}\tau_{yz}=G\gamma_{yz}\\ \tau_{zx}=G\gamma_{zx}\\ \tau_{xy}=G\gamma_{xy}\end{cases} \qquad (14.45)$$

Se notează:

ε_v *deformația specifică volumică*: $\varepsilon_v=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$ (14.46)

λ *constanta lui Lame*: $\lambda=2\nu G/(1-2\nu)$ (14.47)

Legea generală a lui Hooke (14.45) se mai scrie:

$$\begin{cases}\sigma_x=2G\varepsilon_x+\lambda\varepsilon_v\\ \sigma_y=2G\varepsilon_y+\lambda\varepsilon_v\\ \sigma_z=2G\varepsilon_z+\lambda\varepsilon_v\end{cases};\qquad \begin{cases}\tau_{yz}=G\gamma_{yz}\\ \tau_{zx}=G\gamma_{zx}\\ \tau_{xy}=G\gamma_{xy}\end{cases}\tag{14.48}$$

Ținând seama de relațiile între deformațiile specifice și deplasări (Cauchy), *legea generală a lui Hooke* (14.45) se scrie:

$$\begin{cases}\sigma_x=\dfrac{2G}{1-2\nu}\left[(1-\nu)\dfrac{\partial u}{\partial x}+\nu\dfrac{\partial v}{\partial y}+\nu\dfrac{\partial w}{\partial z}\right]\\ \sigma_y=\dfrac{2G}{1-2\nu}\left[\nu\dfrac{\partial u}{\partial x}+(1-\nu)\dfrac{\partial v}{\partial y}+\nu\dfrac{\partial w}{\partial z}\right]\\ \sigma_z=\dfrac{2G}{1-2\nu}\left[\nu\dfrac{\partial u}{\partial x}+\nu\dfrac{\partial v}{\partial y}+(1-\nu)\dfrac{\partial w}{\partial z}\right]\end{cases};\qquad \begin{cases}\tau_{yz}=G\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\\ \tau_{zx}=G\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\\ \tau_{xy}=G\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\end{cases}\tag{14.49}$$

14.1.8. Direcții și tensiuni principale

Fie *P(x, y, z)* un punct oarecare din interiorul corpului elastic supus acțiunii unor sarcini exterioare și un sistem de axe *Oxyz* triortogonal având originea în punctul *P*.

Se consideră elementul de volum tetraedric având muchiile *OA=dx, OB=dy* și *OC=dz* orientate după direcțiile sistemului de axe ca în figura 14.10. Pe fețele acestui element acționează tensiunile normale σ_x, σ_y, σ_z, tensiunile tangențiale τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} și tensiunea *p* (pe fața *ABC)*.

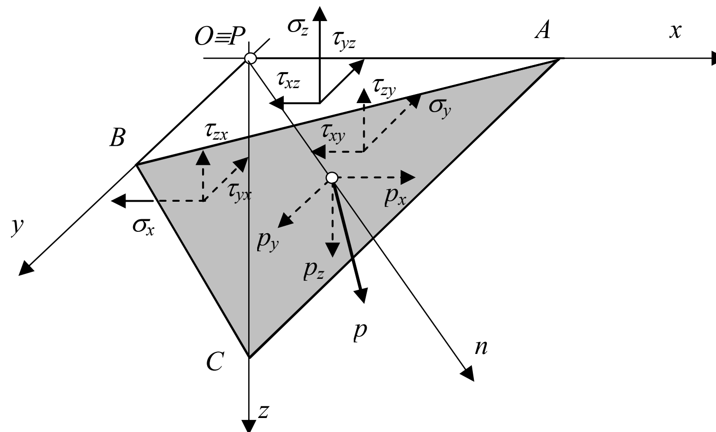


Fig. 14.10

Dacă suprafața *ABC* de arie *dA* are normala *On* de cosinușii directori $\ell=\cos\alpha$, $m=\cos\beta$ și $n=\cos\gamma$, ariile celor trei fețe ale tetraedrului se scriu:

$$\begin{cases} A_{OBC} = dA\cos\alpha = \ell \cdot dA \\ A_{OAC} = dA\cos\beta = m \cdot dA \\ A_{OAB} = dA\cos\gamma = n \cdot dA \end{cases} \quad (14.60)$$

Dacă se descompune tensiunea p după direcțiile Ox, Oy şi Oz se obțin componentele: $p_x = p\ell$, $p_y = pm$ şi $p_z = pn$.

Ecuațiile de echilibru ale forțelor elementare corespunzătoare tensiunilor pe cele patru fețe ale tetraedrului în proiecții după cele trei axe Ox, Oy şi Oz se scriu:

$$\begin{cases} p_x dA - \sigma_x dA \cdot \ell - \tau_{xy} dA \cdot m - \tau_{xz} dA \cdot n = 0 \\ p_y dA - \tau_{yx} dA \cdot \ell - \sigma_y dA \cdot m - \tau_{yz} dA \cdot n = 0 \\ p_z dA - \tau_{zx} dA \cdot \ell - \tau_{zy} dA \cdot m - \sigma_z dA \cdot n = 0 \end{cases} \quad (14.61)$$

Simplificând ecuațiile (14.71) se obțin expresiile componentelor p_x, p_y şi p_z în funcție de componentele tensorului tensiunilor şi cosinuşii directori ai normalei On:

$$\begin{cases} p_x = \sigma_x \cdot \ell + \tau_{xy} \cdot m + \tau_{xz} \cdot n \\ p_y = \tau_{yx} \cdot \ell + \sigma_y \cdot m + \tau_{yz} \cdot n \\ p_z = \tau_{zx} \cdot \ell + \tau_{zy} \cdot m + \sigma_z \cdot n \end{cases} \quad (14.62)$$

Tensiunea p se exprimă cu ajutorul celor trei componente astfel:

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2} \quad (14.63)$$

Dacă se descompune tensiunea p după normala On şi o direcție conținută în planul ABC se obțin tensiunile σ şi τ (fig.14.11):

$$\begin{aligned} \sigma &= pr_{On}\overline{p} = \ell p_x + mp_y + np_z \\ \sigma &= \sigma_x \ell^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} \cdot \ell m + 2\tau_{yz} \cdot mn + 2\tau_{zx} \cdot n\ell \end{aligned} \quad (14.64)$$

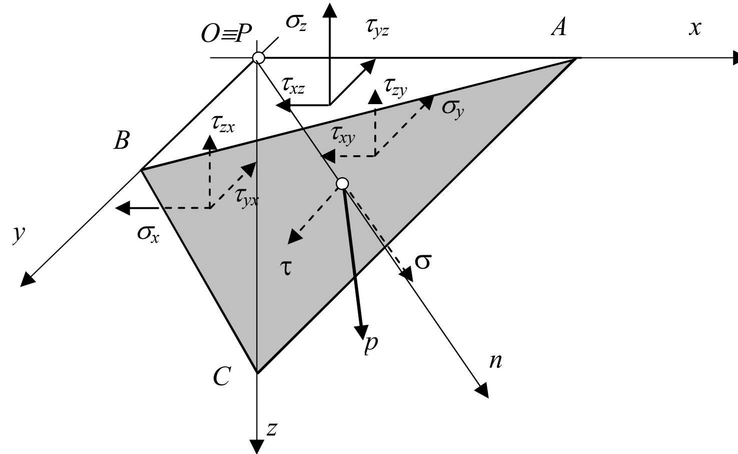


Fig. 14.11

Tensiunea tangențială se obține ținând seama de relația geometrică la descompunerea lui p după cele două direcții :

$$\tau^2 = p^2 - \sigma^2 \tag{14.65}$$

$$\tau^2 = p_x^2 + p_x^2 + p_x^2 - \left(\sigma_x \ell^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} \cdot \ell m + 2\tau_{yz} \cdot mn + 2\tau_{zx} \cdot n\ell\right) \tag{14.66}$$

Pentru anumite direcții particulare ale normalei On tensiunile tangențiale date de relația (14.66) sunt nule şi avem $p \equiv \sigma$ iar componentele p_x, p_y şi p_z se scriu:

$$\begin{cases} p_x = \sigma \cdot \ell \\ p_y = \sigma \cdot m \\ p_z = \sigma \cdot n \end{cases} \tag{14.67}$$

Înlocuind relațiile (14.67) în (14.62) se obține un sistem de ecuații omogen având ca necunoscute cosinuşii directori ℓ, *m, n :*

$$\begin{cases} (\sigma_x - \sigma)\ell + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = 0 \\ \tau_{yx}\ell + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{yz} n = 0 \\ \tau_{zx}\ell + \tau_{zy} m + (\sigma_z - \sigma)n = 0 \end{cases} \tag{14.68}$$

Întrucât între cosinuşii directori există relația $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$ soluția banală $\ell = m = n = 0$ se exclude. Sistemul omogen (14.68) admite soluții nebanale dacă determinantul să este nul:

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0 \tag{14.69}$$

Relația (14.69) reprezintă o ecuație de gradul trei care se mai poate scrie:

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0; \tag{14.70}$$

în care s-a notat :

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_x \end{vmatrix} \tag{14.71}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Soluțiile ecuației (14.70) sunt σ_1, σ_2, σ_3 şi se numesc *tensiuni principale* iar direcțiile normalei On corespunzătoare celor trei tensiuni σ_1, σ_2, σ_3 se numesc *direcții principale.* Dacă se înlocuiesc valorile tensiunilor principale σ_1, σ_2, σ_3 în sistemul de ecuații (14.68) se obțin cosinuşii directori ai direcțiilor principale.

O proprietate importantă a direcțiilor principale este aceea că sunt perpendiculare două câte două.

14.1.9. Tensiuni tangențiale maxime şi minime

Tensiunile tangențiale ating valori maxime sau minime în plane bisectoare ale diedrelor drepte corespunzătoare tensiunilor normale principale.

În figura 14.12.a sunt reprezentate direcțiile principale, tensiunile normale principale şi planele bisectoare ale diedrelor corespunzătoare tensiunilor principale σ_1 şi σ_2 , pentru tensiunile principale σ_2 şi σ_3 în figura 14.12.b şi pentru tensiunile principale σ_1 şi σ_3 în figura 14.12.c .

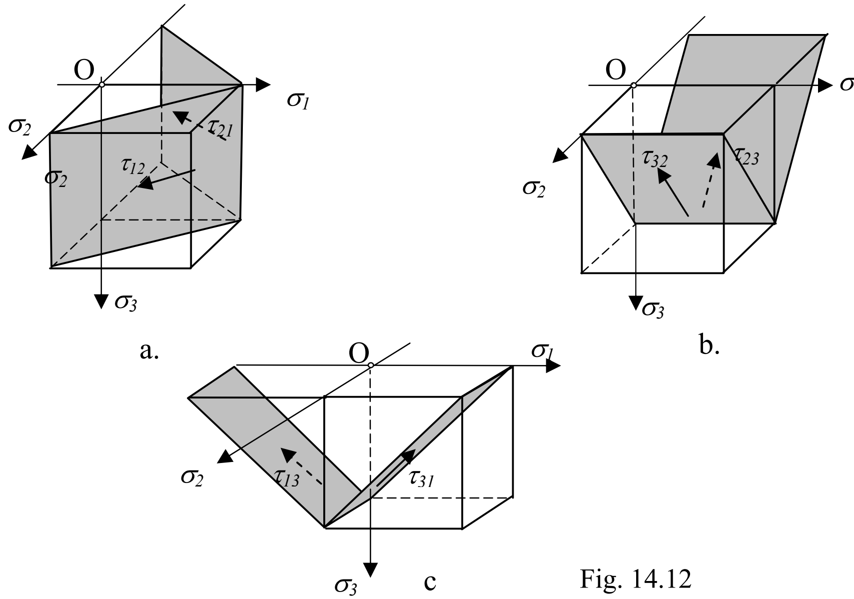


Fig. 14.12

Valorile tensiunilor tangențiale maxime şi minime au expresiile:

$$\begin{cases} \tau_{12} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{21} = -\dfrac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \\ \tau_{23} = \dfrac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{23} = -\dfrac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \\ \tau_{13} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{31} = -\dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \end{cases} \tag{14.72}$$

Presupunând că între tensiunile normale principale există relația de ordine $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ rezultă valoarea maximă tensiunilor tangențiale :

$$\tau_{max} = \tau_{13} \tag{14.73}$$

Pentru a demonstra proprietățile de mai sus se face ipoteza că elementul de volum tetraedric are muchiile *OA, OB* şi *OC* orientate după direcțiile principale (fig. 14.13). În acest caz tensiunile tangențiale pe cele trei plane având ca normale direcțiile principale, sunt nule. Normala *On* a suprafeței *ABC* are cosinuşii directori ℓ , *m* şi *n*.

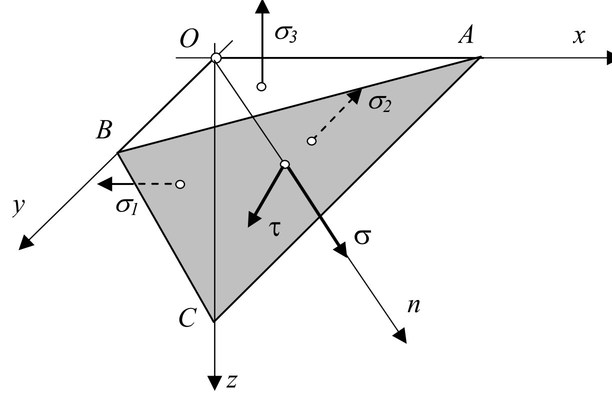


Fig. 14.13

Componentele tensiunii p după cele trei axe de coordonate conform relației (14.62) se scriu astfel:

$$\begin{cases} p_x = \sigma_1 \cdot \ell \\ p_y = \sigma_2 \cdot m \\ p_z = \sigma_3 \cdot n \end{cases} \qquad (14.74)$$

Tensiunea p se scrie astfel: $p = \sqrt{\sigma_1^2 \cdot \ell^2 + \sigma_2^2 \cdot m^2 + \sigma_3^2 \cdot n^2}$ (14.75)

Descompunând tensiunea p după direcția normalei On și o direcție conținută în planul ABC și On, se obține tensiunea normală σ ca proiecția tensiunii p pe direcția normalei On:

$$\begin{aligned} &\sigma = \ell p_x + m p_y + n p_z = \sigma_1 \ell^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \\ &\tau^2 = p^2 - \sigma^2 = \sigma_1^2 \ell^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - \left(\sigma_1 \ell^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2\right)^2 \end{aligned} \qquad (14.76)$$

Efectuând unele calculele în a doua relație (14.76) se obține:

$$\tau^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \ell^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 n^2 \ell^2 \qquad (14.77)$$

Pentru a găsi maximul sau minimul funcției $\tau^2(\ell, m, n)$ se anulează derivatele sale parțiale în raport cu $\ell,\ m,\ n$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \tau^2}{\partial \ell} = 2\ell(\sigma_1 - \sigma_3)\left[2m^2(\sigma_3 - \sigma_2) + \left(1 - 2\ell^2\right)(\sigma_1 - \sigma_3)\right] = 0 \\ &\frac{\partial \tau^2}{\partial m} = 2m(\sigma_2 - \sigma_1)\left[2n^2(\sigma_1 - \sigma_3) + \left(1 - 2m^2\right)(\sigma_2 - \sigma_1)\right] = 0 \\ &\frac{\partial \tau^2}{\partial n} = 2n(\sigma_3 - \sigma_2)\left[2\ell^2(\sigma_2 - \sigma_1) + \left(1 - 2n^2\right)(\sigma_3 - \sigma_2)\right] = 0 \end{aligned} \qquad (14.78)$$

Întrucât tensiunile normale principale sunt ordonate ($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) şi variabilele ℓ, m, n nu pot fi simultan nule, ţinând seama că ℓ, m, n nu depind de valorile tensiunilor principale $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ atunci relaţiile (14.78) se scriu:

$$\left[2m^2(\sigma_3 - \sigma_2) + (1 - 2\ell^2)(\sigma_1 - \sigma_3)\right] = 0,$$
$$\ell \neq 0, \quad m = 0; \quad 1 - 2\ell^2 = 0 \Rightarrow \ell = \pm\sqrt{2}/2; \; n = \pm\sqrt{2}/2$$

$$\left[2n^2(\sigma_1 - \sigma_3) + (1 - 2m^2)(\sigma_2 - \sigma_1)\right] = 0,$$
$$m \neq 0, \quad n = 0; \quad 1 - 2m^2 = 0 \Rightarrow m = \pm\sqrt{2}/2; \; \ell = \pm\sqrt{2}/2 \qquad (14.79)$$

$$\left[2\ell^2(\sigma_2 - \sigma_1) + (1 - 2n^2)(\sigma_3 - \sigma_2)\right] = 0$$
$$n \neq 0, \quad \ell = 0; \quad 1 - 2n^2 = 0 \Rightarrow n = \pm\sqrt{2}/2; \; m = \pm\sqrt{2}/2$$

Rezultă că pentru fiecare pereche de tensiuni principale, direcţiile normalelor planelor în care tensiunile tangenţiale sunt maxime sau minime sunt înclinate cu 45^0 faţă de direcţiile principale corespunzătoare. Astfel:

- pentru perechea de tensiuni σ_1, σ_2 : $n = 0; \; m = \pm\sqrt{2}/2; \; \ell = \pm\sqrt{2}/2$ (fig.14.12.a) se obţine tensiunea tangenţială maximă:

$$\tau_{12}^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \ell^2 m^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \qquad (14.80)$$

- pentru perechea de tensiuni σ_2, σ_3 : $\ell = 0; \; n = \pm\sqrt{2}/2; \; m = \pm\sqrt{2}/2$ (fig.14.12.b) se obţine tensiunea tangenţială maximă:

$$\tau_{23}^2 = (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 = \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \qquad (14.81)$$

- pentru perechea de tensiuni σ_1, σ_3 : $m = 0; \; \ell = \pm\sqrt{2}/2; \; n = \pm\sqrt{2}/2$ (fig.14.12.c) se obţine tensiunea tangenţială maximă:

$$\tau_{13}^2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 n^2 \ell^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \qquad (14.82)$$

14.1.10. Elipsoidul tensiunilor

Expresia (14.64) a tensiunii normale pe o faţă oarecare *ABC* a cărei normală are cosinuşii directori ℓ, m, n este :

$$\sigma = \sigma_x \ell^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{zy} \ell m + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} n\ell \qquad (14.83)$$

Alegând convenabil sistemul de axe *Oxyz,* astfel încât axele să coincidă cu direcţiile principale vom avea : $\sigma_x = \sigma_1; \; \sigma_y = \sigma_2; \; \sigma_z = \sigma_3; \; \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ şi expresia tensiunii normale (14.83) devine:

$$\sigma = \sigma_1 \ell^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \qquad (14.84)$$

Ținând seama de relația (14.74) cosinușii directori se pot scrie astfel:

$$\ell = \frac{p_x}{\sigma_1}; \qquad m = \frac{p_y}{\sigma_2}; \qquad n = \frac{p_z}{\sigma_3}. \tag{14.85}$$

Înlocuind cosinușii directori (14.85) în relația (14.84) se obține expresia tensiunii normale în funcție de tensiunile principale σ_1 σ_2 și σ_3:

$$\sigma = \frac{p_x^2}{\sigma_1} + \frac{p_y^2}{\sigma_2} + \frac{p_z^2}{\sigma_3} \tag{14.86}$$

Ținând seama de relația dintre cosinușii directori $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$ (14.85) se scrie:

$$\frac{p_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{p_y^2}{\sigma_2^2} + \frac{p_z^2}{\sigma_3^2} = 1. \tag{14.87}$$

În sistemul de axe p_x, p_y, p_z relația (14.87) reprezintă ecuația unui elipsoid, *elipsoidul tensiunilor lui Lame* având semiaxele σ_1, σ_2, σ_3 ca în figura 14.14.

Tensiunea p este reprezentată prin vectorul $\overline{OP}$ de cosinuși directori ℓ, m, n. Proiecțiile vectorului $\overline{OP}$ pe cele trei axe p_x, p_y, p_z depind de orientarea normalei planului *ABC*.

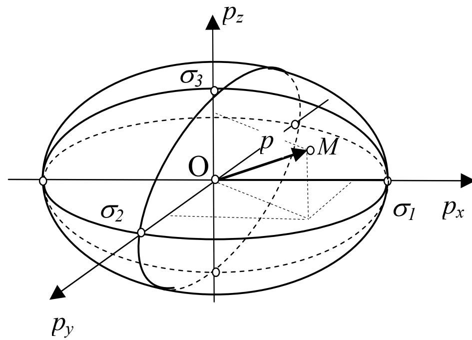


Fig. 14.14

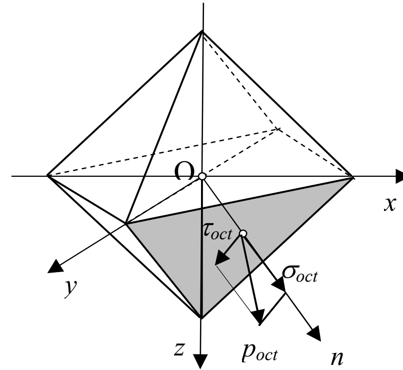


Fig. 14.15

14.1.11. Tensiuni octaedrice

Se consideră un octaedru (corpul geometric cu opt fețe) având normala fiecărei dintre fețele sale înclinată cu același unghi față de axele sistemului *Oxyz* (fig.14.15). Din condiția $|\ell| = |m| = |n|$ și relația $\ell^2 + m^2 + n^2 = 1$, rezultă :

$$|\ell| = |m| = |n| = \sqrt{3}/3 \tag{14.88}$$

Alegând convenabil sistemul de axe *Oxyz,* astfel încât axele să coincidă cu direcțiile principale și ținând seama de relațiile (14.75) și (14.76) avem:

$$p=\sqrt{\sigma_1^2\cdot\ell^2+\sigma_2^2\cdot m^2+\sigma_3^2\cdot n^2}$$
$$\sigma=\sigma_1\ell^2+\sigma_2 m^2+\sigma_3 n^2;\quad \tau=\sqrt{p^2-\sigma^2} \tag{14.89}$$

Înlocuind valorile (14.88) rezultă *tensiunile octaedrice:*

$$\sigma_{oct}=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}$$
$$\tau_{oct}=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2} \tag{14.90}$$

14.1.12. Deformația specifică volumică. Ecuația lui Poisson

Se consideră un element paralelipipedic de volum $dV=dx\cdot dy\cdot dz$ din interiorul unui corp elastic supus acțiunii unui sistem de sarcini exterioare. Deformațiile liniare după cele trei axe *Ox, Oy* şi *Oz* sunt:

$$\Delta(dx)=\varepsilon_x dx;\quad \Delta(dy)=\varepsilon_y dy;\quad \Delta(dz)=\varepsilon_z dz \tag{14.91}$$

Variația volumului elementar se poate scrie astfel :

$$\Delta(dV)=[dx+\Delta(dx)]\cdot[dy+\Delta(dy)]\cdot[dz+\Delta(dz)]-dxdydz$$
$$\Delta(dV)\cong(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)dxdydz \tag{14.92}$$

Deformația specifică volumică este definită astfel:

$$\varepsilon_V=\frac{\Delta(dV)}{dV}=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z \tag{14.93}$$

Dacă cele trei axe *Ox, Oy* şi *Oz* coincid cu direcțiile principale, *deformația volumică specifică* se scrie:

$$\varepsilon_V=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 \tag{14.94}$$

Ținând seama de tensiunea principală medie $\sigma_m=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3}$ şi de legea generală a lui Hooke față de sistemul de axe principale:

$$\varepsilon_1=\frac{1}{E}[\sigma_1-\nu(\sigma_2+\sigma_3)];$$
$$\varepsilon_2=\frac{1}{E}[\sigma_2-\nu(\sigma_3+\sigma_1)]; \tag{14.95}$$
$$\varepsilon_3=\frac{1}{E}[\sigma_3-\nu(\sigma_1+\sigma_2)]$$

se obține:

$$\varepsilon_V=\frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$
$$\varepsilon_V=\frac{3(1-2\nu)}{E}\sigma_m \tag{14.96}$$

Se notează $K=\frac{E}{3(1-2\nu)}$ *modulul de elasticitate cubic.*

Se obține *ecuația lui Poisson :* $\sigma_m=K\varepsilon_V$ (14.97)

14.1.13. Cercurile lui Mohr pentru starea spațială de tensiuni

Se consideră relațiile: $p^2 = \sigma_1^2\ell^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 = \sigma^2 + \tau^2$ (14.98)

$$\sigma = \sigma_1\ell^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \quad (14.99)$$

Dacă se înlocuieşte $n^2 = 1 - \ell^2 - m^2$ n^2 în cele două relații se obține:

$$\begin{cases} \sigma_1^2\ell^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2\left(1-\ell^2-m^2\right) = \sigma^2 + \tau^2 \\ \sigma = \sigma_1\ell^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3\left(1-\ell^2-m^2\right) \end{cases} \quad (14.100)$$

Relațiile (14.100) se mai pot scrie forma:

$$\begin{cases} \left(\sigma_1^2-\sigma_3^2\right)\ell^2 + \left(\sigma_2^2-\sigma_3^2\right)m^2 = \sigma^2 + \tau^2 - \sigma_3^2 \\ \left(\sigma_1-\sigma_3\right)\ell^2 + \left(\sigma_2-\sigma_3\right)m^2 = \sigma - \sigma_3. \end{cases} \quad (14.101)$$

Multiplicând a doua relație (14.101) cu $\left(\sigma_2+\sigma_3\right)$ se obține:

$$\left(\sigma_1-\sigma_3\right)\left(\sigma_2+\sigma_3\right)\ell^2 + \left(\sigma_2^2-\sigma_3^2\right)m^2 = \left(\sigma-\sigma_3\right)\left(\sigma_2+\sigma_3\right). \quad (14.102)$$

Scăzând relația (14.112) din prima relație (14.111) se obține:

$$\left(\sigma_1-\sigma_3\right)\left[\left(\sigma_1+\sigma_3\right)-\left(\sigma_2+\sigma_3\right)\right]\ell^2 = \sigma^2+\tau^2-\sigma_3^2-\left(\sigma-\sigma_3\right)\left(\sigma_2+\sigma_3\right) \quad (14.103)$$

După unele transformări în relația (14.113) se obține:

$$\left(\sigma-\sigma_2\right)\left(\sigma-\sigma_3\right)+\tau^2 = \left(\sigma_1-\sigma_2\right)\left(\sigma_1-\sigma_3\right)\ell^2 \quad (14.104)$$

În mod similar, eliminând n^2 şi ℓ^2, respectiv ℓ^2 şi m^2 rezultă relațiile:

$$\left(\sigma-\sigma_3\right)\left(\sigma-\sigma_1\right)+\tau^2 = \left(\sigma_2-\sigma_3\right)\left(\sigma_2-\sigma_1\right)m^2 \quad (14.105)$$

$$\left(\sigma-\sigma_1\right)\left(\sigma-\sigma_2\right)+\tau^2 = \left(\sigma_3-\sigma_1\right)\left(\sigma_3-\sigma_2\right)n^2 \quad (14.106)$$

- pentru cazul particular $\ell = 0$ relația (14.104) devine:

$$\left(\sigma-\sigma_2\right)\left(\sigma-\sigma_3\right)+\tau^2 = 0. \quad (14.107)$$

Relația (14.107) reprezintă ecuația unui cerc în coordonate (σ, τ) cu centrul :

$C_{23}\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}, 0\right)$ şi raza $r_1 = \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}$ (fig. 14.16).

- pentru cazul particular $n = 0$ relația (14.105) devine:

$$\left(\sigma-\sigma_3\right)\left(\sigma-\sigma_1\right)+\tau^2 = 0. \quad (14.108)$$

şi reprezintă cercul cu centrul : $C_{13}\left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}, 0\right)$, şi raza $r_2 = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$

- pentru cazul particular $m = 0$ relația (14.106) devine:

$$\left(\sigma-\sigma_1\right)\left(\sigma-\sigma_2\right)+\tau^2 = 0. \quad (14.109)$$

şi reprezintă cercul cu centrul : $C_{12}\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, 0\right)$, şi raza $r_3 = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$

Cele trei cercuri din figura 14.16 sunt *cercurile lui Mohr pentru starea spațială de tensiuni* cu ajutorul cărora se reprezintă o starea oarecare de tensiuni (σ,τ) cu un punct în zona haşurată din exteriorul cercurilor C_{12} şi C_{23} şi din interiorul cercului C_{13}.

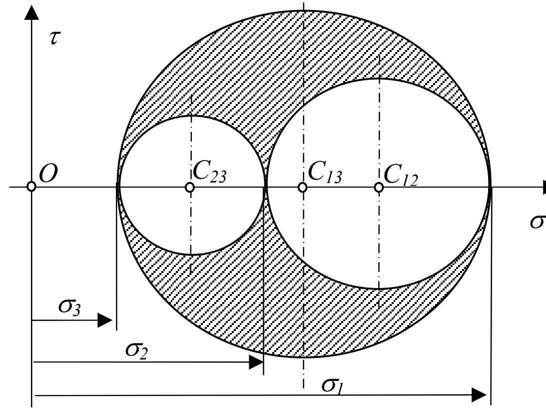


Fig. 14.16

Într-adevăr, considerând $\ell \neq 0,\ m \neq 0,\ n \neq 0$ şi ţinând seama de relaţia : $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, se obţine:

$$
\begin{aligned}
&(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)\ell^2 > 0;\\
&(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)m^2 < 0;\\
&(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)n^2 > 0;
\end{aligned}
\tag{14.110}
$$

şi de relaţiile (14.104), (14.105) şi (14.106) se obţin inegalităţile:

$$
\begin{aligned}
&(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) + \tau^2 > 0;\\
&(\sigma - \sigma_3)(\sigma - \sigma_1) + \tau^2 < 0;\\
&(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) + \tau^2 > 0
\end{aligned}
\tag{14.111}
$$

care reprezintă tocmai zona haşurată din figura 14.16.

14.1.14. Energia potenţială de deformaţie elastică

Sub acţiunea forţelor exterioare, un corp elastic suferă deformaţii iar punctele de aplicaţie a forţelor suferă deplasări deci acestea efectuează lucru mecanic.

Se face ipoteza că lucrul mecanic efectuat de aceste forţe se transformă integral în energie potenţială de deformaţie.

Se consideră un cub elementar cu laturile *dx, dy* şi *dz* pe feţele căruia acţionează separat tensiunile normale σ_x, σ_y, σ_z şi tensiunile tangenţiale τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} care suferă deformaţii specifice liniare ε_x, ε_y, ε_z şi lunecări specifice: γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}.

Ţinând seama de ipoteza de mai sus, lucrul mecanic al forţelor elementare corespunzătoare fiecărei stări de solicitare simplă se transformă în energie potenţială de deformaţie elastică:

- pentru solicitările de întindere simplă:

$$\begin{cases} dL_x = \frac{1}{2}\sigma_x dydz \cdot \varepsilon_x dx = U_{1x} dV & \Rightarrow U_{1x} = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x \\ dL_y = \frac{1}{2}\sigma_y dxdz \cdot \varepsilon_y dy = U_{1y} dV & \Rightarrow U_{1y} = \frac{1}{2}\sigma_y \varepsilon_y \\ dL_z = \frac{1}{2}\sigma_z dxdy \cdot \varepsilon_z dz = U_{1z} dV & \Rightarrow U_{1z} = \frac{1}{2}\sigma_z \varepsilon_z \end{cases} \quad (14.112)$$

- pentru solicitările de forfecare simplă:

$$\begin{cases} dL_{yz} = \frac{1}{2}\tau_{yz} dydz \cdot \gamma_{yz} dx = U_{1yz} dV & \Rightarrow U_{1yz} = \frac{1}{2}\tau_{yz}\gamma_{yz} \\ dL_{zx} = \frac{1}{2}\tau_{zx} dzdx \cdot \gamma_{zx} dy = U_{1zx} dV & \Rightarrow U_{1zx} = \frac{1}{2}\tau_{zx}\gamma_{zx} \\ dL_{xy} = \frac{1}{2}\tau_{xy} dxdy \cdot \gamma_{xy} dz = U_{1xy} dV & \Rightarrow U_{1xy} = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} \end{cases} \quad (14.113)$$

Energia potențială specifică totală pentru starea generală de deformație este suma energiilor specifice pentru cele şase solicitări simple:

$$U_1 = \frac{1}{2}\left[\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right]. \quad (14.114)$$

Folosind relațiile legii lui Hooke generalizate şi înlocuind în expresia (14.114) se obține expresia generală a energiei potențiale specifice totale:

$$U_1 = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right)\right] + \frac{1}{2G}\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right) \quad (14.115)$$

Dacă axele sistemului *Oxyz* coincid cu direcțiile principale, atunci $\sigma_x=\sigma_1;\ \sigma_y=\sigma_2;\ \sigma_z=\sigma_3;\ \tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$ şi expresia (14.115) se scrie astfel:

$$U_1 = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right] \quad (14.116)$$

După aplicarea unor forțe exterioare, un corp îşi modifică atât forma inițială cât şi dimensiunile (volumul). Corespunzător acestor modificări, energia potențială specifică totală se poate descompune în *energie potențială specifică de variație a formei* U_{1f} şi *energie potențială specifică de variație a volumului* U_{1V}:

$$U_1 = U_{1f} + U_{1V} \quad (14.117)$$

Dacă asupra paralelipipedului cu laturile *dx, dy, dz* acționează forțe elementare astfel încât acesta îşi modifică proporțional dimensiunile adică îşi păstrează forma inițială, atunci între dimensiunile sale după deformare şi cele inițiale există relația:

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{dy_1}{dy} = \frac{dz_1}{dz} \quad (14.118)$$

în care dimensiunile sale după deformare se pot scrie:

$$dx_1 = \left(1 + \varepsilon_x\right)dx;\ dy_1 = \left(1 + \varepsilon_y\right);\ dz_1 = \left(1 + \varepsilon_z\right) \quad (14.119)$$

Aceasta conduce la: $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z$ (14.120)

Ținând seama de legea lui Hooke generalizată (14.48) rezultă:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \qquad (14.121)$$

Starea de tensiune corespunzătoare aceloraşi deformații specifice după cele trei direcții este caracterizată de tensiuni aceleaşi normale: $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z$. Dacă axele sistemului *Oxyz* coincid cu direcțiile principale, relația (14.121) se scrie:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_m \qquad (14.122)$$

Pentru o astfel de stare particulară de solicitare, ținând seama de relația (14.116), se obține expresia *energiei potențiale specifice de variație a volumului U_{1V} în funcție de tensiunile principale σ_1 , σ_2 , σ_3* :

$$U_{1V} = \frac{1-2\nu}{6E}\left(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\right)^2 \qquad (14.123)$$

Ținând seama de relația (14.117) se obține şi expresia *energiei potențiale specifică de variație a formei U_{1f} în funcție de tensiunile principale σ_1 , σ_2 , σ_3*:

$$U_{1f} = U_1 - U_{1V} = \frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right)\right]$$
$$U_{1f} = \frac{1+\nu}{6E}\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2\right] \qquad (14.124)$$

14.2. Starea spațială de deformații

14.2.1. Variația deformațiilor dintr-un corp elastic . Direcții şi deformații principale

Se consideră un punct interior al corpului *M(x,y,z)* şi un element paralelipipedic cu muchiile orientate după axele sistemului cartezian ales, de volum *dV=dxdydz* (fig.14.17).

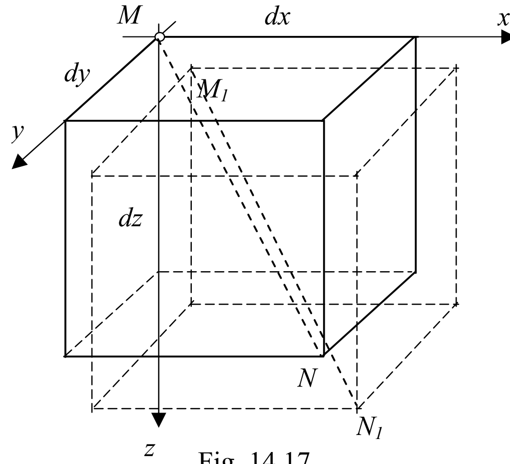


Fig. 14.17

Fie punctul *N(x+dx, y+dy, z+dz)* diametral opus punctului M.

După deformația elementului paralelipipedic, punctele au coordonatele M_1 (x_1, y_1, z_1) şi respectiv: N_1 $(x_1+dx_1,\ y_1+dy_1,\ z_1+dz_1)$ iar deformația specifică a segmentului $\overline{MN}$ se scrie:

$$\varepsilon=\frac{\left|\overline{M_1N_1}\right|-\left|\overline{MN}\right|}{\left|\overline{MN}\right|}=\frac{ds_1-ds}{ds} \tag{14.125}$$

în care:

$$ds^2=\overline{MN}^2=dx^2+dy^2+dz^2 \tag{14.126}$$

$$ds_1^2=\overline{MN}_1^2=dx_1^2+dy_1^2+dz_1^2 \tag{14.127}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x+u \quad \Rightarrow \quad dx_1 = dx+du \\ y_1 &= y+v \quad \Rightarrow \quad dy_1 = dy+dv \\ z_1 &= z+w \quad \Rightarrow \quad dz_1 = dz+dw \end{aligned} \tag{14.128}$$

Ținând seama de relația (14.125) se obține :

$$ds_1^2= ds^2(\varepsilon+1)^2= ds^2(\varepsilon^2+2\varepsilon+1) \tag{14.129}$$

Dacă se ține seama de ipoteza micilor deformații, se poate neglija termenul de ordinul doi ($\varepsilon^2 = 0$), obținându-se: $\quad 2\varepsilon ds^2=ds_1^2-ds^2 \quad$ (14.130)

Înlocuind relațiile (14.126) şi (14.127) în relația (14.130) se obține :

$$2\varepsilon\cdot ds^2=2(dx\cdot du+dy\cdot dv+dz\cdot dw)+du^2+dv^2+dw^2 \tag{14.131}$$

Exprimând diferențialele deplasărilor *du, dv, şi dw* sub forma:

$$\begin{cases} du=\dfrac{\partial u}{\partial x}dx+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy+\dfrac{\partial u}{\partial z}dz \\ dv=\dfrac{\partial v}{\partial x}dx+\dfrac{\partial v}{\partial y}dy+\dfrac{\partial v}{\partial z}dz \\ dw=\dfrac{\partial w}{\partial x}dx+\dfrac{\partial w}{\partial y}dy+\dfrac{\partial w}{\partial z}dz \end{cases} \tag{14.132}$$

şi neglijând infiniții de ordinul doi (du^2, dv^2 *şi* dw^2) din relația (14.131) se obține:

$$\begin{aligned} \varepsilon ds^2 &= \frac{\partial u}{\partial x}(dx)^2+\frac{\partial v}{\partial y}(dy)^2+\frac{\partial w}{\partial z}(dz)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)dxdy+ \\ &+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)dydz+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)dzdx \end{aligned} \tag{14.133}$$

Împărțind relația (14.133) cu ds^2 şi ținând seama de relațiile cosinuşilor directori:

$$\frac{dx}{ds}=cos(On,Ox)=\ell\,,\quad \frac{dy}{ds}=cos(On,Oy)=m\,,\quad \frac{dz}{ds}=cos(On,Oz)=n \tag{14.134}$$

şi de relațiile diferențiale între deformații şi deplasări (14.22) şi (14.23) se obține deformația specifică a elementului *MN* în funcție de elementele tensorului deformațiilor şi cosinuşii directori ai direcției *MN*:

$$\varepsilon=\varepsilon_x\ell^2+\varepsilon_y m^2+\varepsilon_z n^2+\gamma_{xy}\ell m+\gamma_{yz}mn+\gamma_{zx}n\ell \tag{14.135}$$

Se poate demonstra că între teoria tensiunilor şi cea a deformaţiilor există o analogie deplină: există astfel trei direcţii principale notate cu *1, 2, 3*, pentru care deformaţiile specifice au valori extreme $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$ (deformaţii principale) iar lunecările specifice în planele corespunzătoare acestor deformaţii principale sunt nule (vezi cazul stării plane de deformaţii). Prin analogie cu starea spaţială de tensiuni, deformaţiile principale ε_1 , ε_2 şi ε_3 sunt soluţiile ecuaţiei:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y - \varepsilon & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}{}_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0 \tag{14.136}$$

Se poate demonstra că lunecările specifice au valori extreme în planele bisectoare ale diedrelor principale si acestea au valorile :

$$\begin{cases} \gamma_{12} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ \gamma_{23} = \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \\ \gamma_{13} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \end{cases} \tag{14.137}$$

Prin analogie cu starea de tensiuni, se poate defini *deformaţia octaedrică normală* ε_{oct} şi *deformaţia octaedrică tangenţială* γ_{oct} :

$$\varepsilon_{oct} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} \tag{14.138}$$

$$\gamma_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \tag{14.139}$$

14.2.2. Relaţia dintre constantele elastice E, G şi ν

Dacă se consideră legea lui Hooke generalizată (14.39) într-un sistem de axe ce coincid cu direcţiile principale:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)\right] \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right] \end{cases} \tag{14.140}$$

Dacă se scade a treia relaţie din prima, şi se ţine seama de (14.137) se obţine :

$$\gamma_{13} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 = \frac{1+\nu}{E}(\sigma_1 - \sigma_3) \tag{14.141}$$

Ţinând seama de relaţia între lunecările specifice şi tensiunile maxime $\gamma_{13} = \frac{\tau_{13}}{G}$ şi de relaţia (14.72) se obţine:

$$\gamma_{13} = \frac{\tau_{13}}{G} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2G} \tag{14.142}$$

Prin identificarea relațiilor (14.141) şi (14.142) rezultă relația între E, G şi ν:

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)} \tag{14.143}$$

14.2.3. Tensorul deformațiilor

Ținând seama de relația (14.96) :

$$\varepsilon_V=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\frac{1-2\nu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) \tag{14.144}$$

şi făcând notațiile: $\sigma_m=\dfrac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3};\quad \varepsilon_m=\dfrac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}{3}$ (14.145)

se obține :

$$\varepsilon_m=\frac{(1-2\nu)}{E}\sigma_m \tag{14.146}$$

sau :

$$\sigma_m=\frac{E}{1-2\nu}\varepsilon_m \tag{14.147}$$

Folosind relațilie legii lui Hooke generale (14.48) într-un sistem de axe ce coincid cu direcțiile principale se obțin:

$$\begin{cases}\sigma_1-\sigma_m=\dfrac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_1+\dfrac{3\nu}{1-2\nu}\varepsilon_m\right]-\dfrac{E}{1-2\nu}\varepsilon_m=\dfrac{E}{1+\nu}(\varepsilon_1-\varepsilon_m)=2G(\varepsilon_1-\varepsilon_m)\\ \sigma_2-\sigma_m=\dfrac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_2+\dfrac{3\nu}{1-2\nu}\varepsilon_m\right]-\dfrac{E}{1-2\nu}\varepsilon_m=\dfrac{E}{1+\nu}(\varepsilon_2-\varepsilon_m)=2G(\varepsilon_2-\varepsilon_m)\\ \sigma_3-\sigma_m=\dfrac{E}{1+\nu}\left[\varepsilon_3+\dfrac{3\nu}{1-2\nu}\varepsilon_m\right]-\dfrac{E}{1-2\nu}\varepsilon_m=\dfrac{E}{1+\nu}(\varepsilon_3-\varepsilon_m)=2G(\varepsilon_3-\varepsilon_m)\end{cases} \tag{14.148}$$

Cu ajutorul acestor relații se poate scrie atât tensorul tensiunilor cât şi cel al deformațiilor într-un sistem de axe ce coincid cu direcțiile principale:

a. Tensorul tensiunilor este format dintr-un *tensor sferic* $T_{\sigma S}$ ce produce variația volumului şi un *tensor deviator* $T_{\sigma D}$ ce produce modificarea formei:

$$T_\sigma=T_{\sigma S}+T_{\sigma D}=\begin{pmatrix}\sigma_m&0&0\\0&\sigma_m&0\\0&0&\sigma_m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\sigma_1-\sigma_m&0&0\\0&\sigma_2-\sigma_m&0\\0&0&\sigma_3-\sigma_m\end{pmatrix} \tag{14.149}$$

b. Tensorul deformațiilor este format dintr-un tensor *sferic de variație a volumului* $T_{\varepsilon S}$ şi un tensor *deviator sau de variație a formei* $T_{\varepsilon D}$:

$$T_\varepsilon=T_{S\varepsilon}+T_{D\varepsilon}=\begin{pmatrix}\varepsilon_m&0&0\\0&\varepsilon_m&0\\0&0&\varepsilon_m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varepsilon_1-\varepsilon_m&0&0\\0&\varepsilon_2-\varepsilon_m&0\\0&0&\varepsilon_3-\varepsilon_m\end{pmatrix} \tag{14.150}$$

Între componentele corespunzătoare ale celor patru tensori există relațiile (14.147) respectiv (14.148) deduse mai sus.

14.3. Probleme propuse

14.3.1. Se consideră un corp elastic solicitat de un sistem de forțe spațial şi un sistem de axe global *Oxyz,* astfel încât într-un punct al său există tensiunile:

$\sigma_x = 50MPa;\ \ \sigma_y = 60MPa;\ \ \sigma_z = -20MPa;\ \ \tau_{xy} = 30MPa;\ \ \tau_{xz} = 0;\ \ \tau_{zy} = 50MPa$. Se cer:

a. tensiunile principale $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ şi direcțiile principale ;

b. tensiunile tangențiale maxime ;

c. deformațiile principale ε_1, ε_2 şi ε_3 dacă $E=2,1\cdot 10^5$ *MPa* şi $\nu=0,3$.;

d. lunecările specifice maxime;

Raspuns: $\sigma_1 = 99,24MPa;\ \ \sigma_2 = 36,66MPa;\ \ \sigma_3 = -45,9MPa;$

$\ell_1 = 0,49;\ m_1 = 0,804;\ n_1 = 0,337;\ \ \ell_2 = -0,86;\ m_2 = 0,382;\ n_2 = 0,337;$

$\ell_3 = -0,143;\ m_3 = 0,455;\ n_3 = -0,878;$

14.3.2. Se consideră un corp elastic solicitat de un sistem spațial de forțe şi un sistem de axe global *Oxyz,* astfel încât într-un punct al său se produc deformațiile:

$\varepsilon_x = 1,4\cdot10^{-3};\ \varepsilon_y = -1,2\cdot10^{-3};\ \varepsilon_x = 1,8\cdot10^{-3};\ \gamma_{xy} = 0,6\cdot10^{-3};\ \gamma_{yz} = -0,4\cdot10^{-3};\ \gamma_{zx} = 0,8\cdot10^{-3}$.

Se cer:

a. deformațiile specifice principale ε_1, ε_2 şi ε_3 şi direcțiile principale ;

b. lunecările specifice maxime;

c. tensiunile principale $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ dacă $E=2,1\cdot 10^5$ *MPa* şi $\nu=0,3$;

d. tensiunile tangențiale maxime;

Raspuns: $\varepsilon_1 = 2,047\cdot10^{-3};\ \varepsilon_2 = 1,207\cdot10^{-3};\ \varepsilon_3 = -1,254\cdot10^{-3};\ \ \ell_1 = 0,5245;\ m_1 = -0,003;\ n_1 = 0,8514$

$\ell_2 = -0,8424;\ m_2 = -0,149;\ n_2 = 0,518;\ \ \ell_3 = -0,1247;\ m_3 = 0,9888;\ n_3 = 0,0811.$

14.3.3 Se consideră un corp elastic de formă paralelipipedică, care este introdus într-un corp nedeformabil având cavitatea identică cu forma paralelipipedică a corpului (fig.4.18). Corpul este solicitat perpendicular pe fața liberă $b\times h$ cu o presiune uniform distribuită *p* astfel încât se deformează numai după direcție axială. Se cunosc : *b=200mm, h=300mm, p=10 MPa,* $E=1,15\cdot 10^5$ *MPa* şi $\nu=0,34$. *Se cer:* a. tensiunile principale $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ şi direcțiile principale ;

b. deformațiile principale ε_1, ε_2 şi ε_3 ;

c. lunecările specifice maxime;

d. tensiunile tangențiale maxime .

Raspuns: $\sigma_1 = \sigma_2 = -5,15MPa;\ \ \sigma_3 = -10MPa;$

$\varepsilon_1 = 5,65\cdot10^{-5};\ \ \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0;\ \ \gamma_{max} = 0,565\cdot10^{-4};\ \ \tau_{max} = 2,425\ MPa$

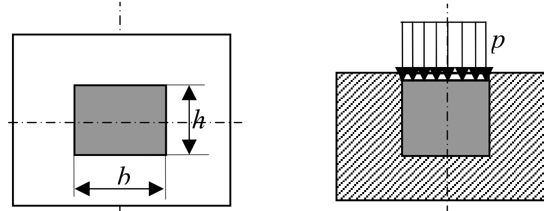


Fig.4.18

15

TEORII DE REZISTENȚĂ

15.1. Stări limită de tensiuni şi deformaţii

Teoriile stărilor limită sau *de rezistență* dau răspuns la următoarea întrebare: Care sunt condiţii ce trebuiesc îndeplinite din punctul de vedere al solicitărilor unei piese, pentru a nu se atinge *starea limită de rezistență* într-un punct oarecare din interiorul ei?

Sarcinile exterioare aplicate pe frontiera sau în interiorul unui corp elastic produc în acesta un câmp de tensiuni şi deformaţii având o distribuţie unică care depinde atât de forma geometrică a corpului, de legăturile lui cu mediul fix, de mărimea şi configuraţia acestor sarcini exterioare. Aceste stări de tensiuni şi deformaţii pot duce la apariţia într-un punct sau într-o zonă mică din volumul piesei a unor *stări de tensiuni şi deformaţii limită* care se compară cu *starea de tensiuni şi deformaţii limită* corespunzătoare unei solicitări etalon de întindere uniaxială.

În cazul solicitării etalon de întindere uniaxială *starea limită de tensiuni şi deformaţii* corespunzătoare poate fi mai uşor exprimată în funcţie de forţa de întindere, dimensiunile epruvetei şi caracteristicile mecanice ale materialului: modulul de elasticitate şi coeficientul lui Poisson cu ajutorul unor caracteristici mecanice cum ar fi: tensiunile principale, deformaţiile specifice principale, tensiunile tangenţiale maxime, energiile specifice totale sau de variaţie a formei.

Starea limită de tensiuni şi deformaţii la întinderea uniaxială se atinge atunci când tensiunea de întindere devine egală cu valoarea unei *caracteristici mecanice naturale* a materialului cum ar fi: limita de proporţionalitate σ_p, limita de elasticitate σ_e, tensiunea de curgere σ_c sau tensiunea de rupere σ_r a materialului, sau este egală cu *o valoare limită stabilită convențional: rezistența admisibilă* σ_a .

Verificarea de rezistență a unui element constă în determinarea tensiunii maxime din zona periculoasă (în cazul unei bare în secţiunea periculoasă) şi compararea ei cu tensiunea admisibilă. Pentru verificare trebuie să fie îndeplinită condiţia:

$$\sigma_{max} \le \sigma_a \tag{15.1}$$

în care: σ_a este *rezistența admisibilă a materialului*, $\sigma_a = \sigma_k / c$

c - coeficientul de siguranță al stării reale de tensiune, definit ca raportul dintre *caracteristica mecanică naturală* a materialului σ_k şi *tensiunea echivalentă maximă din piesă* σ_{ech} :

$$C = \sigma_k / \sigma_{ech} \tag{15.2}$$

Pentru solicitarea de întindere monoaxială coeficientul de siguranță este raportul dintre *caracteristica mecanică naturală* a materialului σ_k şi *tensiunea normală maximă atinsă în piesă*:

$$C = \sigma_k / \sigma_{\max} \tag{15.3}$$

Teoriile de rezistență au avut la bază un anumit *factor sau criteriu preponderent* ce caracterizează starea limită de tensiuni şi deformaţii, cum ar fi: tensiunea normală maximă, deformaţia longitudinală maximă, tensiunea tangenţială maximă, energia potenţială specifică totală maximă, energia potenţială specifică de modificare a formei.

Prin identificarea acestei stări de tensiuni şi deformaţii cu cea corespunzătoare solicitării de întindere simplă rezultă o relaţie între tensiunile principale ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) din piesă şi tensiunea σ_{max} corespunzătoare stării limită de la întinderea simplă care mai este numită şi tensiune echivalentă σ_{ech}.

Dacă se cunosc : valoarea coeficientului de siguranţă c şi valoarea caracteristicii mecanice naturale σ_k a materialului, se poate exprima tensiunea echivalentă a stării limită σ_{ech} în funcţie de tensiunile principale din piesă sub forma generală:

$$\sigma_{ech} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \qquad (15.4)$$

Într-un sistem de axe de coordonate ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) relaţia (15.4) reprezintă ecuaţia unei suprafeţe închise sau deschise iar stările limită de tensiuni corespund punctelor situate pe această suprafaţă : astfel o stare de tensiuni corespunzătoare unui punct situat în interiorul suprafeţei închise este o stare de tensiuni nepericuloasă, iar o stare de tensiuni corespunzătoare unui punct situat în exteriorul suprafeţei închise este o stare de tensiuni periculoasă.

În funcţie de factorul ales ca factor preponderent la atingerea stării limită există cinci teorii de rezistenţă clasice:

T_I - *Teoria tensiunii normale maxime (Galilei, Rankine);*

T_{II} - *Teoria deformaţiilor maxime (Moriotte, Saint Venant);*

T_{III} - *Teoria tensiuni tangenţiale maxime (Coulomb, Guest, Tresca);*

T_{IV} -*Teoria energiei potenţiale specifice totale de deformaţie (Beltrami, Haigh);*

T_V - *Teoria energiei potenţiale specifice de deviaţie (Huber, Hencky, R. von Mises;)*

(T_M) Teoria lui Mohr este o generalizare a teoriilor de mai sus ce exprimă într-o formă unitară starea limită dintr-un corp şi ţine seama de comportarea diferită a unor materiale la solicitarea de întindere şi compresiune.

Valabilitatea unei teorii de rezistenţă se poate atesta cu ajutorul determinărilor experimentale pentru anumite stări particulare de solicitare. Astfel :

- experienţele efectuate pe cuburi de marmură supuse la compresiune triaxială uniformă au arătat că acestea au rezistat foarte bine indiferent de mărimea sarcinii. De aici rezultă că rezistenţa la rupere prin compresiune triaxială uniformă este practic nelimitată, tensiunea echivalentă este infinită. Nici una dintre teoriile de rezistenţă de mai sus nu se verifică pentru acest caz particular, valorile tensiunilor echivalente pe care le furnizează fiind limitate.
- experienţele efectuate pe cilindri subţiri supuşi unor solicitări particulare de torsiune ce corespund unor stări de forfecare pură, au arătat că aceştia ating starea limită atunci când tensiunea tangenţială maximă este jumătate din valoarea tensiunii maxime de la întinderea simplă:

$$\tau_{lim} = \frac{\sigma_{max}}{2} \qquad (15.5)$$

15.2. Teorii clasice de rezistență
15.2.1. T_I - Teoria tensiunii normale maxime (Galilei, Rankine)

Conform teoriei tensiunii normale maxime, *starea limită într-un corp se atinge atunci când valoarea maximă a tensiuniii principale din piesă devine egală cu valoarea tensiunii normale corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere uniaxială simplă*:

$$max(|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|) = \sigma_k \quad (15.6)$$

Întrucât starea generală de tensiuni dintr-un corp este caracterizată de tensiunile principale σ_1, σ_2, σ_3, în cazul unei stări spațiale de tensiuni inferioare stării limită de mai sus sunt valabile inegalitățile:

$$\begin{aligned} -\sigma_k \le \sigma_1 \le \sigma_k \\ -\sigma_k \le \sigma_2 \le \sigma_k \\ -\sigma_k \le \sigma_3 \le \sigma_k \end{aligned} \quad (15.7)$$

În cazul unei stări spațiale de tensiuni inegalitățile (15.7) reprezintă volumul unui cub de latură $2\sigma_k$ ca în figura 15.1, iar în cazul unei stări plane de tensiuni cu $\sigma_2=0$, acestea reprezintă suprafața din interiorul unui pătrat de latură $2\sigma_k$ ca în figura 15.2.

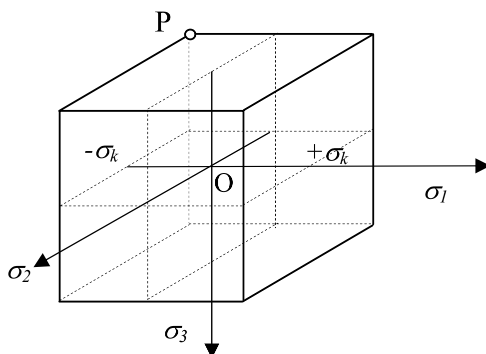


Fig. 15.1

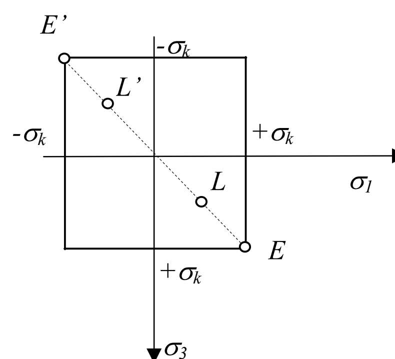


Fig. 15.2

Conform relației (15.6) tensiunea echivalentă după teoria I este:

$$\sigma_{ech} = max\{|\sigma_1|, |\sigma_2|, |\sigma_3|\} \quad (15.8)$$

Pentru starea plană tensiunea echivalentă după teoria I se scrie:

$$\sigma_{ech} = max\{|\sigma_1|, |\sigma_3|\} \quad (15.9)$$

Dezavantajele *teoriei tensiunii normale maxime* sunt:

- conform relațiilor (15.7) pentru o stare de compresiune triaxială uniformă cu $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=-\sigma_k$ starea limită se atinge în vârful cubului $P(-\sigma_k, -\sigma_k, -\sigma_k)$, ceea ce nu concordă cu rezultatele experimentale care au arătat că rezistența la rupere prin compresiune triaxială uniformă este practic nelimitată;

- această teorie nu ține seama de valorile diferite ale rezistenței la întindere și respectiv la compresiune a unor materiale ; rezultatele obținute folosind teoria tensiunii principale maxime se pot îmbunătăți parțial dacă se consideră pentru rezistența la compresiune o valoare mai mare: $\sigma'_k = \alpha\, \sigma_k$, $(\alpha > 1)$;
- pentru cazul solicitării plane la forfecare pură : $\sigma_1 = -\sigma_3 = \pm\, \tau_{xz}$, $\sigma_2 = 0$, rezultatele obținute cu teoria tensiunii principale maxime indică două puncte *E* și *E'* din figura 15.2 de coordonate: $\sigma_1 = -\sigma_3 = \pm\tau_{lim} = \sigma_k$, ceea ce nu concordă cu rezultatele experimentale care au arătat că starea limită se atinge pentru o valoare a tensiuni tangențiale maxime egală cu jumătate din valoarea tensiunii maxime σ_k: $\tau_{lim} = \pm\sigma_k/2$ corespunzătoare punctelor *L* și *L'* din figura 15.2.

15.2.2. T_{II} - Teoria deformației specifice maxime (Mariotte, Saint Venant)

Conform teoriei deformației specifice maxime, *starea limită într-un corp se atinge atunci când deformația specifică principală devine egală cu valoarea deformației specifice corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere uniaxială simplă :*

$$\varepsilon_{max} = max\left(|\varepsilon_1|,|\varepsilon_2|,|\varepsilon_3|\right) = \varepsilon_k \qquad (15.10)$$

Deformația specifică maximă corespunzătoare stării limită de la întinderea simplă are expresia:

$$\varepsilon_k = \frac{\sigma_k}{E} \qquad (15.11)$$

Întrucât ε_1, ε_2, ε_3 sunt deformațiile specifice principale corespunzătoare direcțiilor principale *1,2,3*, în cazul unei încărcări inferioare stării limită definită mai sus sunt valabile inegalitățile:

$$\begin{aligned} -\varepsilon_k &\le \varepsilon_1 \le \varepsilon_k; \\ -\varepsilon_k &\le \varepsilon_2 \le \varepsilon_k; \\ -\varepsilon_k &\le \varepsilon_3 \le \varepsilon_k. \end{aligned} \qquad (15.12)$$

Ținând seama de relația (15.10) și de relațiile dintre deformațiile specifice principale ε_1, ε_2, ε_3 și tensiunile principale σ_1, σ_2, σ_3 (legea generală a lui Hooke):

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)]/E \\ \varepsilon_2 &= [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)]/E \\ \varepsilon_3 &= [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)]/E \end{aligned} \qquad (15.13)$$

relațiile (15.12) devin:

$$\begin{aligned} -\sigma_k &\le \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \le \sigma_k, \\ -\sigma_k &\le \sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1) \le \sigma_k, \\ -\sigma_k &\le \sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2) \le \sigma_k. \end{aligned} \qquad (15.14)$$

Pentru o stare spațială de tensiuni, într-un sistem de coordonate (σ_1, σ_2, σ_3) condițiile (15.14) reprezintă interiorul unui paralelipiped oblic cu secțiunea în planul (σ_1, σ_3) un romb.

Pentru o stare plană de tensiuni, într-un sistem de coordonate (σ_1, σ_3) relațiile (15.14) devin:

$$- \sigma_k \le \sigma_1 - \nu\,\sigma_3 \le \sigma_k,$$
$$- \sigma_k \le \sigma_3 - \nu\,\sigma_1 \le \sigma_k \qquad (15.15)$$

şi reprezintă interiorul unui romb având diagonalele *AA'* şi *BB'* identice cu prima şi a doua bisectoare a sistemului de axe, ca în figura 15.3.

Tensiunea echivalentă conform teoriei *a II a* pentru starea generală de tensiuni se scrie:

$$\sigma_{ech} = max\left\{\left|\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right|;\ \left|\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)\right|;\ \left|\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right|\right\} \qquad (15.16)$$

Tensiunea echivalentă conform teoriei *a II a* pentru o stare plană de tensiuni se scrie:

$$\sigma_{ech} = max\left\{\left|\sigma_1 - \nu\sigma_3\right|;\ \left|\sigma_3 - \nu\sigma_1\right|\right\} \qquad (15.17)$$

Tensiunile principale σ_1 şi σ_3 pentru starea plană de tensiuni din planul *Oxz* sunt:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{zx}^2} \qquad (15.18)$$

Înlocuind în relația (15.18) se obține:

$$\sigma_{ech} = \left|\frac{1-\nu}{2}(\sigma_x + \sigma_z) + \frac{1+\nu}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_z)^2 + 4\tau_{xz}^2}\right| \qquad (15.19)$$

Avantajul *teoriei a II a* se remarcă în cazul materialelor fragile, unde rezultatele obținute folosind această teorie sunt foarte apropiate de cele obținute experimental.

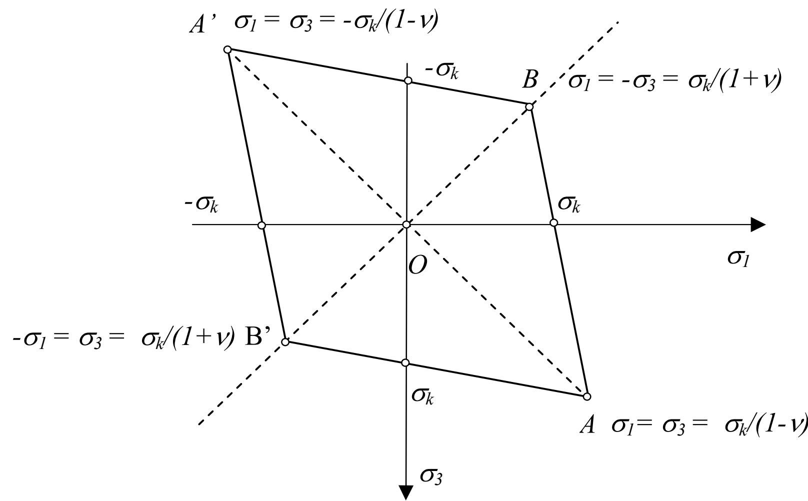


Fig. 15.3

15.2.3. T_{III} - Teoria tensiunii tangențiale maxime (Coulomb, Guest, Tresca)

Conform teoriei tensiunii tangențiale maxime, *starea limită într-un corp se atinge atunci când tensiunea tangențială maximă devine egală cu valoarea tensiunii tangențiale corespunzătoare stării limită la solicitarea de întindere uniaxială simplă :*

$$\tau_k = \sigma_k / 2 \qquad (15.20)$$

Această tensiune se produce în cazul stării de solicitare de întindere simplă într-un plan înclinat cu 45^0 față de direcția forței sau a tensiunii principale $\sigma_1 = \sigma_k$.

Pentru starea generală de solicitare, tensiunile tangențiale maxime acționează în în plane înclinate cu 45^0 față de direcțiile principale şi se calculează conform relațiilor:

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad \tau_{31} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \qquad (15.21)$$

Întrucât starea generală de tensiuni dintr-un corp este caracterizată de tensiunile tangențiale maxime (15.21) în cazul unei încărcări inferioare stării limită definită de teoria de mai sus, sunt valabile inegalitățile:

$$\begin{aligned} -\tau_k &\le \tau_{12} \le \tau_k; \\ -\tau_k &\le \tau_{23} \le \tau_k; \\ -\tau_k &\le \tau_{31} \le \tau_k \end{aligned} \qquad (15.22)$$

Ținând seama de relațiile (15.21) dintre tensiunile tangențiale maxime şi tensiunile principale, condițiile (15.22) se mai scriu sub forma:

$$\begin{aligned} -\sigma_k &\le \sigma_1 - \sigma_2 \le \sigma_k; \\ -\sigma_k &\le \sigma_1 - \sigma_3 \le \sigma_k; \\ -\sigma_k &\le \sigma_2 - \sigma_3 \le \sigma_k \end{aligned} \qquad (15.23)$$

Pentru o stare spațială de tensiuni, într-un sistem de coordonate (σ_1, σ_2, σ_3) condițiile (15.14) reprezintă interiorul unei prisme hexagonale înclinate, având ca axă trisectoarea primului triedru, de ecuație: $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$.

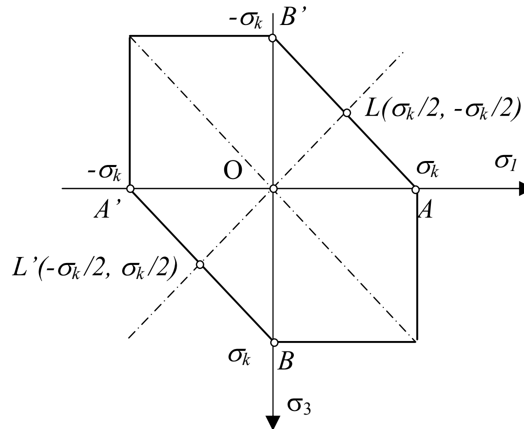


Fig. 15.4

În cazul unei stări plane de tensiuni, într-un sistem de coordonate (σ_1, σ_3) relațiile (15.23) devin:

$$\begin{aligned} -\sigma_k &\le \sigma_1 - \sigma_3 \le \sigma_k \\ -\sigma_k &\le \sigma_1 \le \sigma_k \\ -\sigma_k &\le \sigma_3 \le \sigma_k, \end{aligned} \tag{15.23'}$$

și reprezintă interiorul unui hexagon neregulat simetric în raport cu cele două bisectoare ca în figura 15.4

Tensiunea echivalentă conform teoriei *a III-a* pentru starea generală de tensiuni se scrie:

$$\sigma_{ech} = max\left\{\left|\sigma_1 - \sigma_2\right|;\ \left|\sigma_1 - \sigma_3\right|;\ \left|\sigma_2 - \sigma_3\right|\right\} \tag{15.24}$$

Tensiunea echivalentă conform teoriei *a III-a* pentru starea plană de tensiuni ($\sigma_2 = 0$) devine:

$$\sigma_{ech} = max\left\{\left|\sigma_1\right|;\ \left|\sigma_1 - \sigma_3\right|;\ \left|\sigma_3\right|\right\} \tag{15.25}$$

Dacă $\sigma_1 \cdot \sigma_3 < 0$, atunci termenul $\left|\sigma_1 - \sigma_3\right|$ are cea mai mare valoare deci tensiunea echivalentă conform teoriei *a III-a* se scrie:

$$\sigma_{ech} = \left|\sigma_1 - \sigma_3\right| \tag{15.26}$$

Dacă $\sigma_1 \cdot \sigma_3 > 0$ pentru starea plană de tensiuni se obține tensiunea echivalentă :

$$\sigma_{ech} = max\left\{\left|\sigma_1\right|;\ \left|\sigma_3\right|\right\} \tag{15.27}$$

Se observă că pentru o stare plană de întindere sau compresiune biaxială (cadranele I și III) stările limită conform teoriei a III-a coincid cu cele corespunzătoare primei teorii .

În cazul unor stări plane de tensiuni preponderent de forfecare ($\sigma_1 \cdot \sigma_3 < 0$ - în cadranele II și IV), stările limită sunt situate sub liniile dreptele *AB'* și *A'B,* iar pentru starea plană de forfecare pură ($\sigma_1 = -\sigma_3 = \pm\tau_k$) starea limită corespunde punctelor $L(\sigma_k/2, -\sigma_k/2)$ și $L'(-\sigma_k/2, \sigma_k/2)$ ceea ce concordă cu rezultatele obținute experimental.

Întrucât din condițiile de rezistență corespunzătoare teoriei *a III-a* lipsește coeficientul contracției transversale ν, această teorie poate fi folosită și în domeniul elasto – plastic ca și *criteriu de plasticitate.*

15.2.4. T_{IV} - Teoria energiei potențiale specifice totale (Beltrami, Haigh)

Conform acestei teorii, *starea limită într-un corp se atinge atunci când energia potențială specifică totală devine egală cu valoarea energiei potențiale specifice totale corespunzătoare stării limită de la întinderea uniaxială simplă :*

$$U_{1k} = \frac{\sigma_k^2}{2E} \tag{15.28}$$

Pentru starea generală de tensiuni energia potențială specifică totală U_1 are expresia :

$$U_1 = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1\right)\right] \tag{15.29}$$

Identificând cele două expresii (15.27) şi (15.28) se obţine tensiunea echivalentă pentru o stare generală de tensiuni:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} \qquad (15.30)$$

Într-un sistem de axe de coordonate (σ_1, σ_2, σ_3) relaţia (15.30) reprezintă un elipsoid.

În cazul particular al stării plane de tensiuni *(σ_2=0)* tensiunea echivalentă se scrie:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_3} \qquad (15.31)$$

Într-un sistem de axe de coordonate *(σ_1, σ_3)* relaţia (15.31) reprezintă o elipsă având semiaxa înclinată cu $\alpha=45^0$ ca în figura 15.5.

Comparând figurile 15.4 şi 15.5 se observă că tensiunile echivalente pentru stările limită conform teoriei *a III-a* şi teoriei *a IV a* sunt foarte apropiate .

În cadranele II şi IV, ce corespund unor stări de tensiune preponderent de forfecare ($\sigma_1 \cdot \sigma_3 < 0$), stările limită sunt reprezentate prin arcele de elipsă *AB'* şi *A'B*.

Pentru solicitarea de forfecare pură starea limită corespunde punctelor *L* şi *L'* de coordonate $\sigma_1 = -\sigma_3 = \sigma_k / \sqrt{2+2\nu}$, foarte apropiate de rezultatele obţinute experimental : $\sigma_1 = -\sigma_3 = \sigma_k/2$ sau de cele obţinute cu *teoria a III-a*.

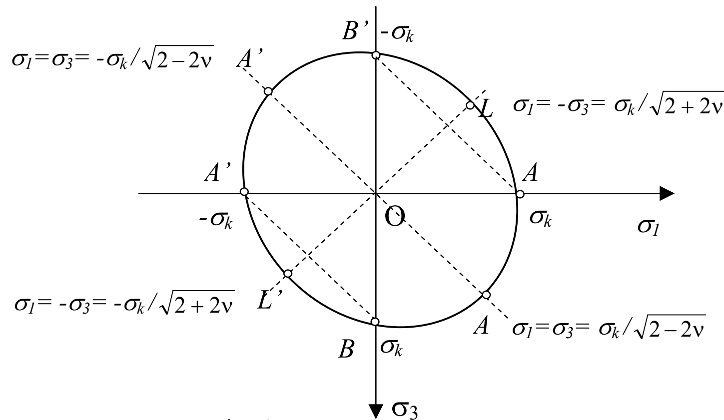


Fig. 15.5

15.2.5. T_V - Teoria energiei potenţiale specifice de variaţie a formei (Huber, Hencky, R. von Misses)

Această teorie admite ca factor preponderent *energia potenţială specifică de variaţie a formei* U_{1f} şi afirmă că *starea limită într-un corp se atinge atunci când energia specifică de variaţie a formei devine egală cu valoarea energiei potenţiale specifice de variaţie a formei de la starea limită de întindere uniaxială simplă :*

$$U_{1kf} = \frac{1+\nu}{3E}\sigma_k^2 \qquad (15.32)$$

Pentru starea generală de tensiuni energia specifică de variație a formei U_{1f} are expresia:

$$U_1^D = \frac{1+\nu}{3E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right)\right] \qquad (15.33)$$

Identificând cele două expresii (15.32) și (15.33) se obține tensiunea echivalentă pentru starea generală de tensiuni:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right)} \qquad (15.34)$$

Pentru o stare spațială de tensiuni, într-un sistem de coordonate (σ_1, σ_2, σ_3) relația (15.34) reprezintă un elipsoid.

În cazul particular al stării plane de tensiuni ($\sigma_2=0$) tensiunea echivalentă se scrie:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_3} \qquad (15.35)$$

Într-un sistem de axe de coordonate (σ_1, σ_3) relația (15.35) reprezintă o elipsă având semiaxa înclinată cu $\alpha=45^0$ față de axa ($O\sigma_1$) care trece în cadranele I și III, prin vârfurile hexagonului corespunzător stărilor limită de la teoria tensiunii tangențiale maxime ca în figura 15.6.

În cadranele II și IV , care corespund unor stări preponderent de forfecare ($\sigma_1 \cdot \sigma_3 < 0$), stările limită sunt reprezentate de arcele de elipsă *AB'* și *A'B* (fig. 15.6).

Pentru starea forfecare pură starea limită corespunde punctelor *L* și *L'* ($\sigma_1 = -\sigma_3 = \sigma_k/\sqrt{3}$) care sunt foarte apropiate de rezultatele obținute experimental ($\sigma_1 = -\sigma_3 = \sigma_k/2$).

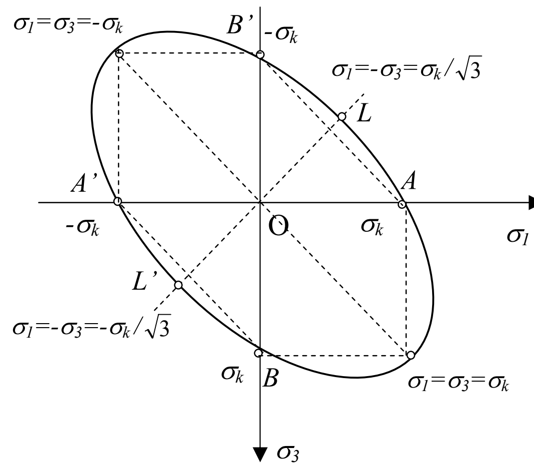


Fig. 15.6

Teoria energiei specifice de variație a formei se aplică în cazul solicitărilor preponderent de compresiune ($\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 <0$) şi concordă cu rezultatele experimentale obținute în cazul compresiunii triaxiale uniforme .

Astfel pentru solicitarea de compresiune triaxială uniformă $\sigma_1 =\sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_m$ relația (15.34) devine $\sigma_{ech}=0$ ceea ce este în concordanță cu rezultatele obținute experimental: oricât de mare ar fi valoarea tensiunii de compresiune σ_m nu se atinge starea limită în corp.

Ca şi teoriei tensiunii tangențiale maxime , teoria energiei potențiale specifice de variație a formei este o teorie de lunecare şi prezintă aceleaşi avantaje, în plus aceasta exprimă condiția de rezistență printr-o singură relație de forma:

$$\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)}\leq \sigma_k \qquad (15.36)$$

15.3. Teoria stărilor limită a lui MOHR

Teoria stărilor limită a lui MOHR este o generalizare a teoriilor clasice prezentate anterior. Conform acestei teorii *starea limită într-un corp se atinge atunci când se produc alunecări după plane în care tensiunile tangențiale sunt maxime*, sau *primele deformații din corp se produc atunci când tensiunea tangențială maximă τ_{max} dintr-un plan de alunecare atinge valoarea maximă corespunzătoare stării limită de la întinderea simplă.*

Dependența $\tau = f(\sigma)$ se reprezintă în sistemul de coordonate (τ ,σ) printr-o curbă *intrinsecă de rezistență* sau *înfăşurătoarea lui Mohr*, simetrică față de axa σ.

Pentru o stare spațială de tensiuni cu $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, tensiunile σ şi τ într-un plan oarecare corespunzătoare stării limită pot fi reprezentate în sistemul de coordonate (τ, σ) cu ajutorul celor trei cercuri ale lui Mohr ca în figura 15.7. Se observă că valoarea maximă a tensiunii tangențiale corespunde punctului B :

$$\tau_{max}=\tau_2=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \qquad (15.37)$$

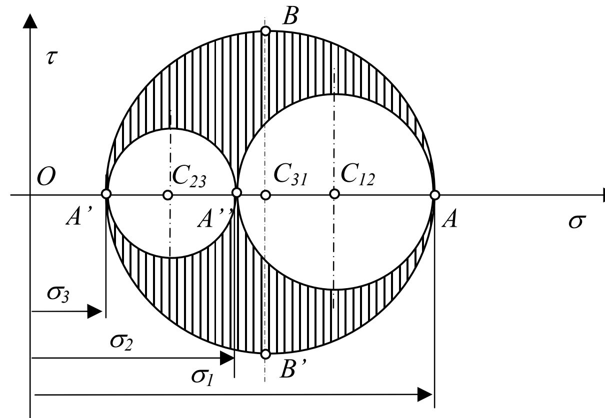


Fig. 15.7

Se consideră o serie de cercuri ale lui Mohr având diametrele maxime egale cu σ_1 - σ_3 ce reprezintă stări limită pentru diferite tipuri de solicitări. Înfăşurătoarea acestor cercuri este *curba intrinsecă* (fig.15.7) şi reprezintă o *stare limită generală* pentru toate tipurile de solicitări posibile.

În figura 15.8 s-au reprezentat stările limită pentru câteva stări particulare :

- cercul cu centrul $C_0 \equiv O$ reprezintă o stare de întindere-compresiune biaxială uniformă cu $\sigma_1 = -\sigma_3$; $\sigma_1 > 0$; $\sigma_3 < 0$, sau într-un plan înclinat cu 45^0 față de direcțiile principale, o stare de forfecare pură;
- cercul cu centrul C_1 - o stare de întindere uniaxială $\sigma_1 > 0$; $\sigma_3 = 0$;
- cercul cu centrul C_2 - o stare de compresiune uniaxială $\sigma_1 = 0$; $\sigma_3 < 0$;
- cercurile de centre C_3 , C_4 , C_5 – diferite stări de întindere biaxială neuniformă cu $\sigma_1 > 0$; $\sigma_3 > 0$; $\sigma_1 > \sigma_3$;
- cercurile de centre C_6 , C_7 - diferite stări de compresiune biaxială neuniformă $\sigma_1 < 0$; $\sigma_3 < 0$; se observă o comportare diferită a materialului la întindere - compresiune.
- cercul C_n - o stare de întindere biaxială uniformă $\sigma_1 = \sigma_3 > 0$

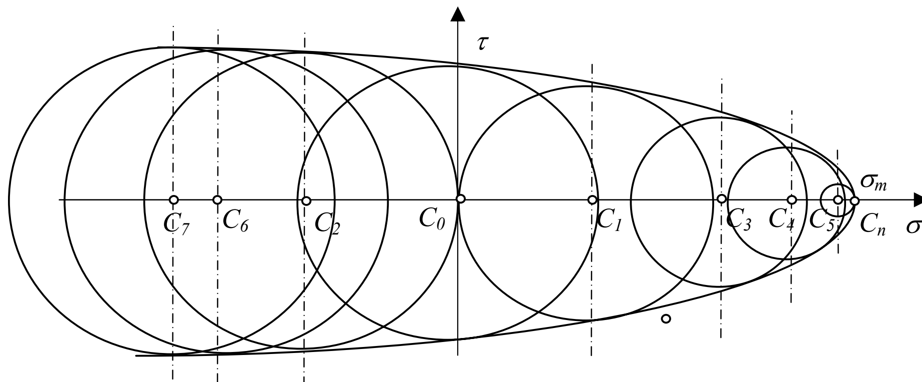


Fig. 15.8

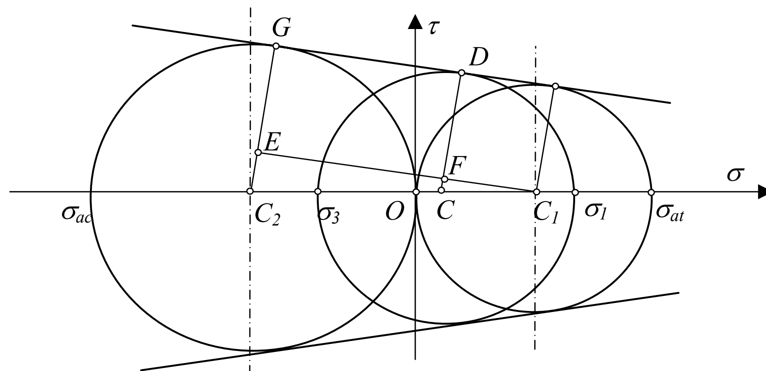


Fig. 15.9

Datorită dificultății obținerii curbei intrinseci generale a stărilor limită pentru fiecare tip de material, MOHR a propus o schematizare a curbei intrinseci prin două linii tangente la cercurile corespunzătoare stărilor limită de la solicitarea de întindere şi compresiune simplă (fig. 15.9).

O stare oarecare de solicitare (întindere-compresiune neuniformă) s-a reprezentat printr-un cerc intermediar cu centrul *C* ($\sigma_1 > 0$; $\sigma_3<0$). S-a notat cu σ_{at} *tensiunea admisibilă la întindere* (corespunzătoare stării limită dintr-un plan perpendicular pe direcția forței de întindere) şi cu σ_{ac} *tensiunea admisibilă la compresiune* (corespunzătoare stării limită dintr-un plan perpendicular pe direcția forței de compresiune). Din asemănarea triunghiurilor C_1CF şi C_1C_2E din figura 15.9 rezultă:

$$\frac{C_1C}{C_1C_2}=\frac{FC}{EC_2} \tag{15.38}$$

în care: $C_1C=OC_1-OC=\frac{\sigma_{at}}{2}-\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$, $C_1C_2=C_2O+OC_1=\frac{\sigma_{at}}{2}+\frac{\sigma_{ac}}{2}$ (15.39)

$$FC=CD-FD=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}-\frac{\sigma_{at}}{2} \quad EC_2=C_2G-EG=\frac{\sigma_{ac}}{2}-\frac{\sigma_{at}}{2}$$

Înlocuind valorile date de relațiile (15.39) în relația (15.38) şi luând σ_{ac} cu semnul minus, se obține relația:

$$\sigma_1-\frac{\sigma_{at}}{\sigma_{ac}}\cdot\sigma_3=\sigma_{at} \tag{15.40}$$

Notând :

$$K=\frac{\sigma_{at}}{\sigma_{ac}} \text{ şi } \sigma_{ech}=\sigma_{at} \tag{15.41}$$

relația (15.40) devine: $\sigma_{ech} = \sigma_1 - K\,\sigma_3$ (15.42)

Relația lui Mohr (15.42) exprimă tensiunea echivalentă funcție de tensiunile principale σ_1 , σ_3 şi raportul *K* dintre tensiunile admisibile la întindere-compresiune pentru cazul materialelor cu comportare diferită la întindere şi compresiune.

Particularizând această teorie, se obține pentru diferite cazuri particulare :

- pentru materialele având aceeaşi comportare la întindere şi compresiune ($\sigma_{at} = \sigma_{ac}$ $K=1$) relația de calcul a tensiunii echivalente este identică cu cea corespunzătoare teoriei tensiunii tangențiale maxime T_τ:

$$\sigma_{ech} = \sigma_1 - \sigma_3 \tag{15.43}$$

- pentru forfecării pure ($\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$) relația de calcul a tensiunii echivalente devine: $\tau + K\,\tau = \sigma_{ech}$

sau

$$\tau_{ech}=\frac{\sigma_{ech}}{1+K} \tag{15.44}$$

- pentru starea plană de tensiuni (σ_1, σ_3) relația de calcul a tensiunii echivalente devine: $\sigma_{ech} = |\sigma_1 - K\sigma_3| \le \sigma_a$ (15.45)
- dacă $|\sigma_1| \ge |\sigma_3|$, relația (15.45) este o generalizare a teoriilor clasice:
- pentru $K = 0$, se obține T_I şi T_{III} (varianta $\sigma_1 \cdot \sigma_2 > 0$) ;
- pentru $K = 1$, se obține T_{III} (varianta $\sigma_1 \cdot \sigma_2 < 0$) ;
- pentru $K = \nu = 0,3$ se obține T_{II} .

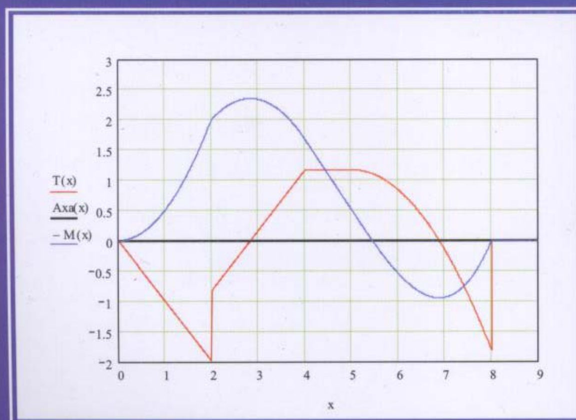
BIBLIOGRAFIE

1.	Anghel, A	-	*Rezistenţa materialelor. Partea I.* Ed.Tehnică, Bucureşti 1986
2.	Anghel, V., Pastramă, Ş.D, Mareş, C.	-	*Metode şi programe pentru calculul structurilor. Noţiuni teoretice şi aplicaţii în MATLAB, Ed.UPB, 1998*
	Atanasiu, M.		*Metode analitice noi în Rezistenţa materialelor.* Ed. U.P.B. 1994
3.	Buga, M., Iliescu, N., Atanasiu, C., Tudose, I.		*Probleme alese de Rezistenţa materialelor* Ed. U.P.B. 1985
4.	Buzdugan, Gh.	-	*Rezistenţa materialelor.* Ed.Academiei, Bucureşti 1986
5.	Buzdugan, Gh. s.a.	-	*Culegere de probleme din Rezistenţa Materialelor* E.D.P. Bucureşti 1979.
6.	Constantinescu, I., Dăneţ, G.V.	-	*Metode noi pentru calcule de rezistenţă* Ed.Tehnică, Bucureşti 1989
7.	Creţu, A.		*Probleme alese din Rezistenţa materialelor,* Ed. Mediamira, Cluj-Napoca 2001.
8.	Creţu, A.		*Tensiuni, Stress, Contraintes,* Ed. UT Cluj-Napoca 1993
9.	Deutsch, I.s.a.	-	*Probleme din rezistenţa materialelor.* Ed. Did. şi Pedagogică Bucureşti 1986
	Drobotă, V.		Rezistenţa materialelor. Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1982
10	Feodosyev, V	-	Strength of materials, Ed. MIR, Moscou, Second edition, 1973.
11.	Gheorghiu, H., Hadar, A., Constantin, N.	-	*Analiza structurilor din materiale izotrope şi anizotrope,* Editura Printech, Bucureşti 1998
12.	Huidu, Th.	-	*Mecanica teoretică şi elemente de mecanica solidului deformabil,* vol. III, Institutul de Petrol şi Gaze, Ploieşti, 1983
13	Ispas, B., Constantinescu E., Alexandrescu, I.	-	*Rezistenţa materialelor. Culegere de probleme.* Ed Tehnică, Bucureşti 1997.
14	Iliescu, N., Jiga, G. , Hadar A.-		Teste grilă de Rezistenţa materialelor. Ed. Printech, Bucureşti 2000
15	Marin, C., Popa, F.	-	*Rezistenţa materialelor Probleme de examen.* Ed. MACARIE, Târgovişte 2001
18	Marin, C., Popa, F.	-	*Calculul reacţiunilor pentru sisteme hiperstatice cu legături semirigide.* Volumul lucrărilor ştiinţifice ale simpozionului internaţional "Universitaria ROPET 2000", Inginerie mecanică.
19	Popa, F., Marin, C.	-	*Metode de calcul şi analiză pentru elementele de structură.* Buletinul Universităţii Petrol Gaze Ploieşti cu lucrările simpozionului jubiliar "90 de ani de la naşterea profesorului Rudolf Voinaroski", Vol. LII, Seria Tehnica nr.2/2000
20	Marin, C., Popa, F.	-	*Metodă analitică pentru calculul reacţiunilor grinzilor continue pe mai multe reazeme rigide denivelate.* Sesiunea jubiliară de comunicări ştiinţifice cu participare internaţională Arad, 27-28 octombrie 2000, Analele Universităţii Aurel Vlaicu din Arad.
21	Marin, C., Popa, F.	-	*Metodă analitică pentru rezolvarea sistemelor static nedeterminate de tipul grinzilor continue cu legături elastice.* Sesiunea jubiliară de comunicări ştiinţifice cu participare internaţională Arad, 27-28 octombrie 2000, Analele Universităţii Aurel Vlaicu din Arad.
22	Marin, C., Petrescu R., Bâzoi M.	-	*Algoritm de calcul pentru rezolvarea unui sistem static nedeterminat de bare drepte prin metoda suprapunerii efectelor.* Sesiunea de comunicări ştiinţifice Târgovişte, 19-20 mai 2002
23	Marin, C., Petrescu R., Bâzoi M.	-	*Algoritm de calcul pentru rezolvarea unui sistem static determinat format din bare curbe plane cu axa geometrică un arc de cerc.*

Sesiunea de comunicări ştiinţifice Târgovişte, 19-20 mai 2002
24 Marin, C., Popa, F., Ardeleanu ,M. - *Distribuţia de tensiuni dintr-o grindă continuă situată pe mai multe reazeme rigide sau elastice încărcată cu un tren de sarcini.* Sesiunea jubiliară de comunicări ştiinţifice cu participare internaţională, Arad, 28- 30 noiembrie 2002, Seria Mecanica.
25 Marin, C., Popa, F. - *Modalităţi de evaluare a cunoştinţelor de Rezistenţa materialelor.* Lucrare publicată în volumul de lucrări al Conferinţei naţionale de Rezistenţa materialelor, REZMAT10, Galaţi, mai 2003.
26 Marin, C., Bucur S., Kufner A. - *Calculul analitic al reacţiunilor pentru o grindă continuă situată pe mai multe reazeme punctuale rigide supusă acţiunii unui tren de sarcini*. Sesiunea de comunicări ştiinţifice a studenţilor şi cadrelor didactice , Târgovişte , 9 -10 iunie 2005
27 Marin, C., Bucur, S., Iancu A. - *Calculul reacţiunilor pentru o grindă continuă situată pe mai multe reazeme punctuale rigide cu o culisă axială de capăt sub un tren de sarcini.* Sesiunea de comunicări ştiinţifice a studenţilor şi cadrelor didactice, Târgovişte, 9 -10 iunie 2005
28 Marin, C., Marin, A., - *Metoda analitica pentru trasarea diagramelor de eforturi în barele drepte.* Sesiunea ştiinţifică SIMEC 2006, UTCB, Bucuresti, Facultatea de Utilaj Tehnologic, martie 2006
29 Marin, C., Marin, A. - *Metoda analitica pentru calculul deplasărilor şi rotirilor barelor drepte supuse la încovoiere.* Sesiunea ştiinţifică SIMEC 2006, UTCB, Bucuresti, martie 2006
30 Mirolioubov, I, s.a. - *Resistance des Materiaux. Manuel de resolution des problemes,* Ed. MIR, Moscou, 4-eme edition, 1977
31 Petrescu G., Marin, M. - *Rezistenţa materialelor.* Vol. I. Ed . Certi Craiova 1994
32 Petrescu G., Marin, M. - *Rezistenţa materialelor. Vol. II. Solicitări speciale.* Ed Certi Craiova 1995
33 Posea, N. s.a. - *Rezistenţa materialelor. Probleme.* Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică Bucureşti 1986
34 Rades, M - *Rezistenţa materialelor* I, Ed. PRINTECH, Bucureşti, 2004
35 Rades, M - *Rezistenţa materialelor* II, Ed. PRINTECH, Bucureşti, 2004
36 Radu, Gh., Munteanu, M - *Rezistenţa materielelor şio elemente de Teoria Elasticităţii.Vol. 1*. Ed. MACARIE, Târgovişte 1994
37 Stepine, P - *Resistance des Materiaux. Manuel de resolution des problemes,* Ed. MIR, Moscou, premiere edition, 1986
38 Timoshenko, S.P. - *Teoria stabilităţii elastice* Ed. Tehnică, Bucureşti 1967
39 Tudose I, Constantinescu D.M., Stoica, M. - *Rezistenţa materialelor. Aplicaţii.* Ed. Tehnică, Bucureşti 1990



- Absolvent al Facultății Tehnologia Construcțiilor de Mașini, Institutul Politehnic din București, promoția 1984, repartiție guvernamentală la INCREST București;
- Stagiu la Întreprinderea de Utilaj Petrolier Târgoviște (1984-1986);
- Inginer proiectant, cercetător științific la IPCUP-CCSITAERS Târgoviște (1986-1992);
- Teza de doctorat *„Contribuții la studiul îmbinărilor suprafețelor recipientelor și anvelopelor sub presiune în regimuri statice și dinamice"* – Universitatea Politehnica București, susținută în 1999;
- Asistent (1992-1996), Șef de lucrări (1996-2000), Conferențiar (2000-2004) și Profesor (2004-prezent) la Universitatea VALAHIA din Târgoviște, catedrele: Inginerie mecanică, Echipamente de Proces și Mecatronică;
- În prezent director al „Departamentului Materiale, Echipamente, Instalații și Roboți" din cadrul Facultății Ingineria Materialelor, Mecatronică și Robotică;
- Titular al cursurilor Rezistența materialelor, Vibrații mecanice, Analiza cu elemente finite și Metode numerice în inginerie;
- Autor a peste 100 de articole și 8 lucrări de specialitate din domeniul ingineriei mecanice: Mecanica (1999), Analiza dinamică a structurilor liniar-elastice (1999), Probleme de Statică (2001), Probleme rezolvate de Mecanică (2001), Rezistența materialelor – Probleme de examen (2001), Vibrațiile structurilor mecanice (2003), Metode numerice în inginerie (2005), Modelarea și simularea sistemelor robotice (2005).





Colecția
UNIVERSITARIA-TEHNICA